

Introdução à Modelagem de Sistemas Complexos

Fabiano L. Ribeiro
Universidade Federal de Lavras - UFLA
Departamento de Física - DFI

e-mail: fribeiro@dfi.ufla.br

8 de abril de 2016

I	Introdução aos Sistemas Complexos	5
1	Introdução	7
1.1	Definição (Tentativa) de Sistemas Complexos	8
1.2	A espera de uma nova revolução Científica	10
1.3	A proposta do livro	11
2	O Paradigma da Modelagem	15
2.1	Arte de extrair o essencial	16
2.2	Modelos Matemáticos	17
2.3	Modelos Computacionais	18
2.4	Modelagem de Sistemas complexos	19
2.5	Modelos e a Realidade	20
3	Modelagem de Sistemas Biológicos I: Dinâmica de Populações	23
3.1	O Modelo de Malthus	23
3.2	O Modelo de Verhulst	26
3.3	Discretização do Modelo de Verhulst: O Mapa Logístico	27
3.4	O Modelo de Gompertz	28
3.5	O modelo Generalizado	32
3.5.1	Modelo Generalizado e Modelo de Bertalanfy	33
3.6	Modelo Microscópico	34
3.7	Aplicações ao Crescimento Populacional Humano	38
4	Leis de Potencia	45
4.1	A Equação da Lei de Potência e Propriedades Livres de Escala	45
4.2	Gráfico Log-Log	46
4.3	Leis de Potencia em textos	46
4.4	Leis de Potência em Terremotos	48
4.5	Leis de Potência no Mercado Financeiro	49
4.6	Leis de Potência em Sistemas Biológicos	50
4.7	Leis de Potência em Fenômenos Sociais	50
4.8	Conclusões	51
5	Modelagem de Sistemas Biológicos: Lei Halométrica	53
5.1	Modelo de Dissipação de Calor	53
5.2	O modelo de Rubner	55
5.3	Lei halométrica da taxa metabólica e da massa corpórea	57
5.4	Modelo de Rede de Distribuição Fractal	59
5.4.1	Algumas considerações	61
5.4.2	A rede de distribuição	61
5.4.3	Análise a respeito do Número de Capilares	64
5.4.4	Volume de Serviço de um capilar	66
5.5	Volume Total de Sangue no Organismo	66
5.6	Lei de escala entre Taxa Metabólica e Massa Corporal	68
5.6.1	Conservação do volume e da área	68
5.7	Conclusão	69

6	Crescimento Animal	71
6.0.1	Discussão sobre os parâmetros a e b	74
6.1	Lei universal de Crescimento	74
6.2	tumor	75
7	Sociofísica: Modelando Sistemas Sociais	77
7.1	O Modelo de Axelrod para Difusão Cultural	77
7.2	Usando Modelo de Axelroad para descrição de mídias de massa	77
7.3	Dinâmica de Opiniões	77
7.4	O Jogo dos Nomes	77

Parte I

Introdução aos Sistemas
Complexos

Quando pensamos em uma formiga que caminha sozinha, imaginamos um ser inofensivo, minimamente inteligente, indefeso. Uma formiguinha é praticamente insignificante. No entanto, há poucos animais na terra que sejam tão destruidores e agressivos quanto uma colônia de formigas, cujas voracidade e eficiência são consequências de uma sofisticada organização. Esta organização é observada em diversos aspectos, como por exemplo na forma com que as formigas realizam as divisões de trabalho. Existem as formigas *soldados*, responsáveis pela guarda do formigueiro; as *operarias*, responsáveis pela manutenção do ninho; e as *coletoras*, responsáveis pela coleta de sementes ou partes de insetos. As formigas se organizam de tal forma que o número de formigas por determinada tarefa é sempre apropriada para cada condição específica. Por exemplo, se acontece uma tentativa inesperada de invasão da colônia por algum agressor, trabalhadoras e coletoras deixam suas posições e começam a agir como formigas soldados. Analogamente, se é descoberto uma nova fonte de recursos, trabalhadoras e soldados deixam seus postos para agir como coletoras. O fato interessante é que a mudança de tarefa é feita sem que haja um comando central. Nem a formiga rainha, nem qualquer outra formiga decidem o que cada uma das outras formigas deve fazer. Na verdade, nenhuma formiga tem acesso às informações da colônia como um todo. Cada uma tem acesso apenas a informações locais a partir das interações (por contato químico e comunicação por tato) com as formigas vizinhas. No entanto, a divisão de trabalho surge; e surge como um fenômeno coletivo auto-organizado resultante das interações locais entre as formigas. Uma colônia de formigas se comporta como um “super-organismo” constituído de uma “inteligência coletiva” formada a partir da interação de uma população de seres pequeninos e minimamente inteligentes.

O formigueiro é um exemplo dos chamados *sistemas complexos*. Um sistema complexo é formado, geralmente, por um número muito grande de unidades (no caso acima, as formigas) no qual emergem propriedades coletivas (a divisão de trabalho, por exemplo) a partir da interação dessas unidades. Exemplos desse tipo permeiam o nosso dia-a-dia. Uma revoada de pássaros seria um outro exemplo. Um pássaro voando sozinho não conseguiria realizar a proeza de atravessar continentes num processo migratório. A migração só é possível por uma *população* de pássaros. Isso se deve a fatores de cooperação, como por exemplo a forma com que esses pássaros realizam o voo coletivo em forma de “V”. Este tipo de configuração diminui a resistência do ar, melhorando o desempenho dinâmico do grupo. Mais uma vez não existe um controlador central que dita a forma com que os pássaros devem se configurar. Não existe um pássaro líder que impõem uma forma geométrica da configuração da revoada. Assim como a distribuição de tarefas no formigueiro emerge das interações locais das formigas, o formato em V é um fenômeno emergente das interações entre os pássaros da revoada.

Outro exemplo de um sistema complexo são as atividades cerebrais, formadas por uma rede de neurônios interligados. Cada neurônio emite um sinal mediante a estímulos de outros neurônios. Estes sinais se propagam pelos fios da rede (*os dendritos*) e é transmitida de um neurônio a outro a partir de um longo tubo, o *axônio*, e por meio de conexões chamadas *sinapses*. A superposição dos sinais emitidos por todos os neurônios do cérebro constitui a atividade cerebral, que comanda as funções vitais e as interações do organismo com o seu meio ambiente. Enquanto um único

neurônio não passa de uma célula que pode ou não emitir sinais de acordo com os estímulos de sua vizinhança, uma população deles dá origem à máquina mais complexa que conhecemos - o cérebro -, capaz de memorizar, raciocinar, abstrair e ter consciência de si mesmo. A atividade cerebral é um fenômeno emergente das interações locais de neurônios.

Exemplos de sistemas complexos são bastante comuns em física, biologia e sócio-economia, uma vez que esses cenários são formados por um *ensemble* de partículas, indivíduos ou agentes, respectivamente. Por exemplo, em física, temos substâncias com propriedades emergem a partir das conexões entre átomos ou moléculas. Em sócio-economia, a interação dos seus agentes constituintes dá origem a dinâmicas complexas, exibindo efeitos de cooperação auto-organizada, estruturas sociais, crashes, etc.

Fenômenos coletivos análogos a esses citados também são abundantes dentro da sociedade humana. Por exemplo, a *primavera Árabe*, caracterizada pela onda de manifestações e protestos que varreram o Oriente médio e Norte da África a partir de 2010. As manifestações acabaram por derrubar três chefes de estado (da Tunísia, do Egito e da Líbia) em questão de meses. Neste contexto, outros chefes de estado, muitos deles no poder há décadas, ameaçaram renunciar frente à violência das manifestações. A origem dessas manifestações foi bem pontual, com um tunisiano ateando fogo a seu próprio corpo como forma de manifestar-se contra as condições de vida de seu país. No entanto, toda a consequência de eventos posteriores acontece sem qualquer intervenção de lideranças bem definidas. A evolução das manifestações se deu pelo uso de redes sociais como o facebook e twitter para organizar, comunicar e sensibilizar a população e a comunidade internacional frente as condições de restrições de liberdade por parte dos estados. A onda de manifestações da primavera árabe acontece como um fenômeno emergente, promovido pela própria rede de interações entre pessoas, e não idealizada por um comandante ou qualquer tipo de liderança.

No Brasil vivemos um contexto similar nas revoltas de junho de 2013. As revoltas, assim como na primavera árabe, teve um estopim muito bem definido: o aumento nas tarifas de ônibus. No entanto, a partir daí surge um movimento de manifestações em todo o país, trazendo as pessoas à rua para se manifestarem contra os abusos de corrupção e da deficiência na administração pública. Essas manifestações aconteceram de uma forma nunca imaginada em uma ou duas semanas antes desse acontecimento. A força social que moveu as pessoas para a rua vão muito além das escolhas ou pressões feitas por um ou outro indivíduo ou grupo. As manifestações aconteceram sem a presença de um controlador central. Isso ficou bastante evidenciado quando a polícia e as autoridades se viram com dificuldades em negociar com os manifestantes, justamente pela falta de representantes. Isso demonstrou o caráter de comportamento emergente no qual nos vimos nesse período conturbado.

O que tem se verificado em vários contextos sociais semelhantes à primavera Árabe e as manifestações brasileiras de 2013 é que uma multidão de milhões de pessoas não pode ser convocada centralizadamente. Fenômenos sociais desse tipo não podem ser planejados por um grupo centralizador, nem mesmo com um forte mecanismo de propaganda. Para que um fenômeno desse tipo aconteça, é preciso um número enorme de feedbacks entre os próprios indivíduos do sistema. São necessárias muitas retroalimentação de reforço, para que pequenos estímulos provenientes da periferia ou de qualquer outro ponto desse sistema afaste esse sistema de uma região estável e o conduza a outro estado (talvez até de instabilidade), e que resultam por modificar o comportamento de todos os outros indivíduos como um todo. O único mecanismo capaz de fazer isso é o próprio sistema.

1.1 Definição (Tentativa) de Sistemas Complexos

Vamos agora apresentar algumas características comuns encontradas nesses sistemas complexos com a intenção de buscar uma definição apropriada. Antes de mais nada, vale refletirmos um pouco a respeito da palavra *complexo*. No dicionário esta palavra está posta como algo que é formado por muitos níveis ou partes. Dessa forma complexo é o inverso de simples, que por sua vez é formado por uma única parte. Nesse sentido, se levassemos a risca o que diz o dicionário, devemos dizer que sistemas complexos são aqueles formados por muitas partes. No entanto, os

sistemas apresentados na seção anterior não apenas apresentam vários níveis, mas também outras características importantes. Por exemplo, estes níveis ou partes estão fortemente correlacionados e intercorrelacionados, o que nos leva a inferir que estes sistemas são muito mais que meros amontoados de partes.

Todos os sistemas citados são compostos por unidades “simples” - simples em comparação ao sistema como um todo. As unidades estão no nível *microscópico* do sistema. Essas unidades interagem entre si, dando origem a propriedades coletivas que não poderiam ser observadas quando as unidades se encontram isoladas. Por exemplo, no caso das formigas, há emergência de divisão de tarefas dentro do formigueiro; e na população de pássaros migratórios, o voo coletivo em forma de V. As atividades coletivas dizem respeito ao nível *macroscópico* do sistema. Outra característica fundamental dos sistemas ilustrados acima é que o comportamento emergente não é proveniente de um controlador central. O macrocomportamento emergente acontece como consequência direta e única das interações no nível microscópico.

Podemos resumir pelo menos quatro características fundamentais dos sistemas complexos:

- são formados por um número grande de unidades;
- unidades interagem umas com as outras;
- ausência de um controlador central;
- emergência de comportamento coletivo

Mas note que as propriedades colocadas acima são apenas características comuns aos sistemas complexos, não uma definição. Na verdade, temos um problema de definição tão complicado como a própria definição de *vida*. Embora seja relativamente fácil para uma pessoa distinguir o que tem e o que não tem vida, a sua definição está muito longe de ser elucidada. Em sistemas complexos temos uma situação bem parecida. Embora possamos identificar propriedades comuns desses sistemas, a sua definição é extremamente controversa dentro da comunidade científica.

Uma característica adicional às 4 citadas acima (mais ainda longe de ser uma definição) é que esses sistemas não podem ser representados ou descritos de uma forma compacta. Por exemplo, os fenômenos que a física tradicionalmente estuda são descritos de forma compacta. As leis de Newton da mecânica, ou as equações de Maxwell do eletromagnetismo, são formadas por um número pequeno de equações elegantes que cabem em uma única página. A partir dessas poucas equações podemos descrever e prever uma vasta quantidade de resultados experimentais. Nesse sentido, podemos dizer que os sistemas usualmente estudados em física admitem uma representação compacta e elegante. No entanto, até onde sabemos, não existem tais leis elegantes e compactas para a descrição do funcionamento do cérebro, do genoma, do mercado financeiro, da sociedade humana, da vida, etc.. Dessa forma, quando estamos lidando com um sistema que não pode ser resumido em leis elegantes e compactas, é sinal que estamos lidando com um sistema complexo.

Uma das razões pelas quais é difícil extrair leis compactas para estes sistemas se deve ao fato que eles apresentam uma história de interações entre suas unidades. Eles são sistemas que encontram meios ou mecanismos para extrair algum tipo de informação a partir do seu ambiente, de modo a usar essa informação para se comportar adaptativamente. Em um sistema complexo, as unidades armazenam e processam informações e estão constantemente evoluindo e se adaptando. As unidades captam essas informações, na maioria das vezes, de sua vizinhança, ou seja, de outras unidades que estão próximas em sua rede de interação. E as vezes, as unidades também captam informações globais, proveniente de um nível macroscópico. Por meio dessas informações, as unidades tomam suas decisões ou mudam seus estados individuais. Dessa forma, estes sistemas estão constantemente evoluindo em resposta as modificações de suas vizinhanças ou do próprio sistema como um todo, o que torna difícil (ou talvez impossível!) descreve-los em termos simples e compactado.

Resumindo, ainda não sabemos como definir um sistema complexo, mas pelo menos temos uma característica crucial que podemos usar para sua identificação. Um sistema complexo é aquele que não permite ser descrito de uma forma simples e compacta (por exemplo, em poucas e elegantes equações matemáticas), em virtude de estar constantemente evoluindo e se adaptando.

1.2 A espera de uma nova revolução Científica

Em 1948, Warren Weaver escreveu um artigo publicado na *American Scientist* (Weaver 1948) dividindo a ciência em três categorias: i) *problemas de simplicidade*; ii) *problemas de complexidade desorganizada*; e iii) *problemas de complexidade organizada*. Enquanto as duas primeiras categorias permitam uma descrição de forma compacta, a terceira não permite. A ciência do séc. 19 e começo do séc. 20 se encaixam na primeira e segunda categoria, e foram muito bem sucedidas em entender estes tipos de fenômenos naturais, justamente por descreve-los com poucas regras ou leis. No entanto, a terceira categoria, que diz respeito aos sistemas complexos, ainda carece de uma ciência apropriada. Vamos apresentar a seguir essas categorias com um pouco mais detalhes.

Os problemas de simplicidade, segundo Weaver, se referem àqueles fenômenos naturais nos quais podemos descreve-los com poucas variáveis. Por exemplo, temperatura e pressão para o estudo de estados termodinâmicos de um gás; número de indivíduos e tempo no estudo de dinâmica populacional; resistência, voltagem e corrente em eletricidade, etc.. Esse tipo de problema que admite poucas variáveis foi tratado de forma muito bem sucedida pelos cientistas do séc. XIX e começo do séc. XX.

Os problemas de complexidade desorganizada dizem respeito àqueles formados por um número enorme de variáveis. Por exemplo, tentar entender as propriedades termodinâmicas a partir da interação de 10^{23} partículas desorganizadas. Se pensarmos que cada partícula se movimenta em 3 dimensões e que cada uma dessas dimensões possui posição e velocidade, teremos $3 \times 2 \times 10^{23}$ variáveis nesse contexto. Na verdade, as poucas (duas ou três) variáveis macroscópicas, como temperatura e pressão, surgem a partir desse número absurdo de variáveis microscópicas. Problemas desse tipo acontecem quando estamos lidando com um problema de complexidade desorganizada. Para resolver esses problemas, usa-se ferramentas matemáticas para cálculos de médias e outras propriedades estatísticas. Mais especificamente, este tipo de problema é atacado por um arcabouço matemático da física, chamado de *mecânica estatística*. Nessa abordagem, assume-se que as partículas ou unidades de um sistema interagem de forma muito fraca ou mesmo nula. Nesse sentido é possível computar médias e flutuações, de modo que as variáveis macroscópicas se tornam computáveis a partir de médias das variáveis microscópicas. Por exemplo, a temperatura, uma variável macroscópica, pode ser computada como o valor médio da energia cinética de cada partícula que constitui um gás. Ou a pressão, que pode ser entendida como proporcional ao número médio de colisões das partículas por unidade de tempo em uma determinada área nas paredes do recipiente que contem o gás. Resumindo, em problemas de complexidade desorganizada podemos dizer que *o todo é equivalente à soma da média das partes*.

Finalmente temos os problemas de complexidade organizada. Nesse tipo de problema temos um número moderado (nem muito nem pouco) de variáveis. Nesse tipo de problema as unidades e consequentemente as variáveis interagem fortemente umas com as outras. Nesse tipo de problema há um número razoável de fatores que interagem de uma forma orgânica. Temos aqui o caso dos sistemas complexos. Esse tipo de problema se mostra tão difícil de ser resolvido (como prever o comportamento de uma sociedade no próximos 10 anos? como explicar o funcionamento do cérebro? como gerenciar políticas econômicas de forma mais eficiente?), que nada que se foi desenvolvido para lidar com os problemas de simplicidade e de complexidade desorganizada parece ser apropriada para este contexto. O fato interessante e talvez preocupante, é que essas técnicas foram muito bem sucedidas em seus respectivos contextos, mas mostram-se completamente estéreis quando lidamos com comportamentos de uma sociedade, por exemplo, ou com a previsão do tempo para os próximos dias. Os problemas de complexidade organizada não podem ser resumidos em poucas variáveis de modo a serem atacados pela abordagem da simplicidade. Nem tão pouco podem ser descritos pelo cálculo de médias e outras técnicas estatísticas, como se faz usando a mecânica estatística em questões de complexidade desorganizada.

Os problemas de complexidade organizada parecem ser o grande desafio da ciência para as próximas décadas. E isso é realmente um desafio antigo, uma vez que o artigo de Warren Weaver já apontava isso, e olha que já se passaram quase 70 anos desde então, e o problema ainda continua posto, e ainda sem solução. Para que possamos entender esse tipo de fenômenos, será preciso desenvolver uma nova ciência. Uma ciência diferente daquela que foi muito bem sucedida

no séc.. XIX e séc. XX. Os problemas antigos foram bem respondidos por esta ciência antiga. No entanto os novos problemas exigem uma ciência nova.

Entre essas novas técnicas que foram desenvolvidas a partir desse artigo preditivo de 1948 podemos citar o grande avanço computacional que se desenvolveu desde então, principalmente a partir da década de 70 e 80.

FALAR RESUMIDAMENTE SOBRE O PARADIGMA DA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E DE COMO ELA ESTA AJUDANDO A COMPREENDER OS SISTEMAS COMPLEXOS.

1.3 A proposta do livro

A interdisciplinariedade é essencial na área de sistemas complexos, tanto em seus fundamentos, quanto em sua metodologia (analítica e computacional), levando à convergência de diversas áreas do conhecimento. Deseja-se então nesse trabalho de pesquisa, continuar a tendência desse foco interdisciplinar, na tentativa de investigação desses sistemas por meio do arcabouço da mecânica estatística.

Este livro tem por objetivo apresentar o que já tem feito em termos de teoria e aplicações, em termos de se atacar esses sistemas complexos. Vamos focar no entanto, nas ferramentas matemáticas e computacionais desenvolvidas nessas últimas décadas e de que forma poderíamos pensar em novas técnicas e paradigmas para se criar essa nova ciência que pede Weaver .

FALAR MAIS

Referências Bibliográficas

Referências do Capítulo

- [Boccaro 2004] N Boccaro. *Modelling Complex Systems*. Springer 2004.
- [Jensen 1998] Henrik Jeldtoft Jensen. *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge University Press; 1 edition (January 13, 1998).
- [Mitchell 2011] Melanie Mitchell. *Complexity: A Guided Tour*. Oxford University Press; 1 edition (September 1, 2011).
- [Per Bak 1999] Per Bak. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. Copernicus Books (23 de abril de 1999).
- [Sawyer 2005] Keith Sawyer . *Social Emergence: Societies As Complex Systems*. Cambridge University Press (November 28, 2005).
- [Weaver 1948] Warren Weaver *Science and complexity*. Classical Papers - E:CO Vol. 6 No. 3 2004 pp. 65-74.
- [Wolfram 2002] tephen Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media; 1 edition (May 2002)

Capítulo 2

O Paradigma da Modelagem

A humanidade tem como anseio a busca pelo conhecimento e a explicação do mundo que nos rodeia. Esta busca incansável surge, provavelmente, com o próprio homem. No entanto a realidade é muito dura. À primeira vista, explicar totalmente um fenômeno físico, biológico ou qualquer outro, é algo inatingível, tamanha as complicações e detalhes envolvidos. Mesmo assim a ciência progride. E hoje podemos nos gabar que compreendemos relativamente bem uma gama enorme de fenômenos naturais. Mas como isso é possível? Como a humanidade pode entender seu mundo natural, dado o número imensurável de variáveis envolvidas?

A resposta é que o homem aprendeu que para entender os aspectos da natureza é preciso dar um passo de cada vez. Primeiro é preciso abandonar os detalhes que envolvem um fenômeno; segundo é preciso dividir este fenômeno em camadas ou subdivisões. Além disso, as primeiras subdivisões - num nível inferior - devem ser tão simples quanto possível de modo a permitir a análise. E assim, estuda-se estas subdivisões mais simples, teoriza-as e busca entendimento e ciência a partir delas. Logo que esse entendimento é atingido, passa-se para a análise da subdivisão que está num nível superior à anterior, buscando mais uma vez o seu entendimento e ciência. O processo se repete até as demais subdivisões. Ao o atingir a última subdivisão - a divisão “mais superior” - , o que na verdade é o próprio *todo*, então conseguimos entender completamente o fenômeno. Mas é claro que, possivelmente, esse estado não seja possível de ser alcançado pela mente humana, em qualquer questão que envolva fenômenos naturais. No entanto, o entendimento de apenas algumas subdivisões de certos fenômenos da natureza já se mostra de grande valia e tem proporcionado à humanidade todo o privilégio da ciência.

Para ilustrar essa concepção, considere o movimento de um corpo sobre uma superfície. Este problema é bastante complicado se queremos entendê-lo na plenitude, uma vez que teríamos que considerar todas as forças atuantes, como atritos, resistência do ar de acordo com a forma desse objeto, etc.. Poderíamos nos dar por vencidos graças a essas dificuldades. Ou então, podemos considerar uma versão mais simples desse problema, assumindo o objeto como um ponto material (sem forma e sem dimensão). Isso nos permite eliminar o problema difícil da resistência do ar. Podemos assumir também que este objeto se move não sobre uma superfície qualquer, mas sobre uma superfície de gelo de modo que o atrito seja drasticamente reduzido. Temos agora um problema bem mais fácil, que é uma “subdivisão” do original, e que nos possibilitará chegar a conclusões e resultados. Após o entendimento desta versão mais simples do problema (corpo se movimentando sobre uma superfície), passamos para uma subdivisão superior, considerando uma versão um pouco mais detalhada do que a anterior. Por exemplo, considerando o atrito (uma subdivisão superior em relação à versão anterior), e assim por diante. Desse estudo decorre todo o nosso entendimento de cinemática. É claro, essa simplificação nos leva a um contexto diferente do original, mas se estamos lidando com uma massa suficientemente pesada e com velocidades suficientemente baixas, a diferença nos resultados do cenário “inventado” em comparação com o cenário real é tão mínima, que teremos um bom resultado comparativo entre teoria (cenário fictício) e experimento (cenário real).

Mas as dificuldades não param por aí. Muitas vezes, o fenômeno que se quer estudar é tão complicado, que mesmo a subdivisão do nível “mais inferior” se mostra impossível de ser real-

izada. Quando este é o caso, uma saída é assumir uma versão alternativa dessa subdivisão do fenômeno. Por exemplo, se quisermos entender a evolução temporal do número de indivíduos de uma população. É claro que teríamos a resposta se soubéssemos, a todo instante, o número de descendentes de cada indivíduo vivo da população. Mas é claro, essa informação é impossível de ser obtida. Bom, mas que tal assumirmos que cada indivíduo vivo dessa população deixa o mesmo número de descendentes por unidade de tempo. Isso não é verdade, é claro, uma vez que cada indivíduo esta sujeito às suas próprias condições particulares. No entanto, na média, este número deve ser uma boa aproximação para a realidade, e conseqüentemente essa hipótese deve ser útil para entendermos um pouco mais sobre o aumento dessa população. Na verdade, no capítulo (3) vamos verificar que esta hipótese funciona relativamente bem se comparada com algumas populações reais quando o tempo de crescimento da população for suficientemente pequeno. Temos aqui um exemplo de *cenário fictício*, construído para imitar a realidade, e por isso dizemos que este cenário é um *modelo* para a realidade. Um modelo obviamente não é a realidade, mas sim uma versão simples desta realidade. Uma versão que capta apenas o que é mais importante, dado o nível de questionamento que estamos procurando a respeito da realidade. O fenômeno real é muito complicado de se estudar cruamente, devido a infinidade de detalhes que ele contém. Um modelo, em contrapartida, a maioria dos detalhes do sistema real são eliminados. O modelo carrega apenas o essencial sobre o que estamos interessados em estudar num primeiro momento. Resumindo, um modelo é uma representação bastante simplificada de um sistema que se queira estudar ou descrever. Este carácter simplificado se deve ao fato de que o sistema real geralmente é bastante complicado, então um modelo deve ser simples para permitir entender a natureza de um dado fenômeno.

2.1 Arte de extrair o essencial

Para ilustrar um pouco mais esse paradigma, vamos tomar o exemplo de mapas que descrevem uma cidade. Na figura abaixo temos um mapa de uma região da cidade de São Paulo juntamente com uma fotografia da mesma região a qual ele se refere. O mapa é um modelo do que é a realidade (aqui mostrada em forma de uma fotografia). Embora a realidade desse lugar diz respeito a um número imensurável de variáveis que vão desde a configuração dos prédios, os ecossistemas dessa região, as interações sociais entre as pessoas que vivem e circulam nesse local, etc.. Enfim, a realidade dessa região diz respeito a um número absurdo de variáveis que regem a dinâmica dessa metrópole. No entanto, quando queremos apenas nos localizar dentro dessa cidade, não precisamos de todos os detalhes deste local. Normalmente precisamos apenas identificarmos em qual rua estamos. Nesse sentido, quando buscamos um mapa para nos localizar precisamos apenas de uma pequena informação, e não de toda. Nesse sentido, se o objetivo é apenas uma localização (saber em qual rua estamos) um modelo de mapa do tipo apresentado na figura é mais que suficiente. No entanto se apenas estas poucas informações ainda não são suficientes, por exemplo, se quisermos saber onde há um supermercado, ou a casa de um amigo, então será necessário um mapa um pouco mais detalhado. Mas ainda assim não precisamos de todas as informações desse local.

Note então que o mapa, sendo um modelo da realidade propriamente dita, possui muito menos informação que a realidade. E a quantidade de informação contida nesse modelo depende do grau de profundidade que precisamos ter dessa realidade. Muitas vezes, como foi o caso do primeiro mapa, apenas uma pequena fração de informação já é o suficiente, eliminando todo o inconveniente de analisar toda a informação disponível nesse sistema real.

Um mapa super detalhado se torna inútil no sentido que se levará um tempo infinito para processarmos a informação contida nele. Ou melhor, num mapa super detalhado, levaríamos o mesmo tempo que levaríamos para processar as informações da própria realidade. Dessa forma um mapa super detalhado será, na verdade, menos efetivo que um mapa mais simples, como menos informação, mas contendo o que realmente nos interessa. Mapas muito completos vão se aproximando da realidade e acabam sendo tão grande, tão real, e ... inútil. Aqui esta o *paradigma da modelagem*: eliminar os detalhes superfulos do sistema real. Nesse sentido um modelo não precisa incorporar todos os aspectos de um sistema. O modelo precisa sim ser suficientemente



Figura 2.1: sdsdsd dsdsd.

simples para que possamos extrair informações a partir dele. Dizemos então que precisamos apenas do essencial. Todo os detalhes não essenciais - o supérfluo - não só é inútil, como também dificulta o processamento da informação.

Mas o que é essencial em um fenômeno? No caso de um mapa de uma cidade a resposta depende da finalidade a qual desejamos utiliza-lo. O mesmo vale para qualquer outro fenômeno natural que queiramos explicar. Um bom exemplo de captura da essência de um sistema é o trabalho “Bull” (1945) de Pablo Picasso. Nessa *master class* de arte moderna, o pintor espanhol apresenta uma sequencia de litografias que tem por finalidade capturar o “espírito” de um touro a partir de uma pintura mais realista e acadêmica, progredindo sucessivamente ao abstrato, tendo em vista a minimização dos traços. No final, o touro se reduz a um simples esboço que capta apenas a essência absoluta da criatura, numa imagem tão concisa quanto possível.

2.2 Modelos Matemáticos

A natureza é demasiadamente complexa em todos os sentidos. Dessa forma, se tentarmos explicar os fenômenos físicos considerando todas as variáveis envolvidas dentro desse contexto, rapidamente vamos perceber que é impossível tratar todas as informações de uma só vez. Se assim o fizermos, não conseguiremos produzir ciência. Dessa forma, a ciência começa a se desenvolver apenas na Grécia antiga com a percepção que a prudencia em não tratar o sistema em todas os seus detalhes, mas dividi-los em partes mais simples, pode ser uma boa ideia. Mas qual o tamanho das partes, bom isso mais uma vez depende do grau de detalhe que estamos interessados.

REESCREVER O PARAGRAFO A SEGUIR!! Os modelos matemáticos são representações da realizada física, nos quais adquirem uma representação matemática de forma que esses modelos possam ser descritos ou representados simbolicamente e discutidos analiticamente. No entanto, como sabiamente escrever Fourries: “A natureza é indiferente às dificuldades matemáticas ...”



Figura 2.2: Acima temos a imagem real de um touro. Ao lado a série de 11 litografias de Picasso, que apresenta o touro desde um desenho mais realista até uma imagem minimalista que capta a essência da criatura.

então dessa forma, se queremos propor um modelo matemático para descrever um sistema ou fenômeno, devemos mais uma vez elaborá-lo de modo que ele seja suficientemente simples para permitir o cálculo matemático.

DEFINIÇÃO DE MODELO: modelo é uma representação simplificada e um sistema que se queira estudar.

2.3 Modelos Computacionais

O uso de modelos matemáticos povoaram toda a ciência do século 18, 19 e começo do século 20. No entanto, na segunda metade do século 20 com o avanço do processamento dos computadores, foi possível um novo paradigma: os modelos computacionais. Enquanto que os modelos matemáticos deveriam ser construídos de forma que permitissem o cálculo para suas previsões. Os modelos computacionais eliminavam esse problema, uma vez que o próprio computador poderá calculá-los, computacionalmente ou numericamente, as consequências de algumas hipóteses que antes não poderiam ser feitas analiticamente.

Por exemplo, com o uso dos computadores foi possível “simular” alguns fenômenos, como é o caso de uma partícula que se reproduz, deixando descendentes que por sua vez também reproduzem. Esse tipo de mecanismo introduzido por von Neumann, conhecido como jogo da vida, captura algumas das essências da reprodução da vida, claro que de forma simplificada, mas exatamente como deve ser um modelo.

Com o uso dos computadores e das simulações foi possível realizar análises que seriam inviáveis em um experimento real. Seja por razões práticas, seja por razões econômicas. Por exemplo, a reprodução de células dentro de um incubadora laboratorial pode levar dias. No entanto usando um modelo computacional para a reprodução dessas células, pode verificar esse mecanismo reprodutivo em questão de segundos. Outro exemplo seria o caso da observação de processos evolutivos em espécies. Para a observação experimental real do processo evolutivo de espécies leva milhares ou milhões de anos, e portanto impossível de ser observado detalhadamente. No entanto, com o uso de modelos computacionais e simulações de cenários evolutivos, podemos observar “indivíduos computacionais” evoluindo em questão de horas.

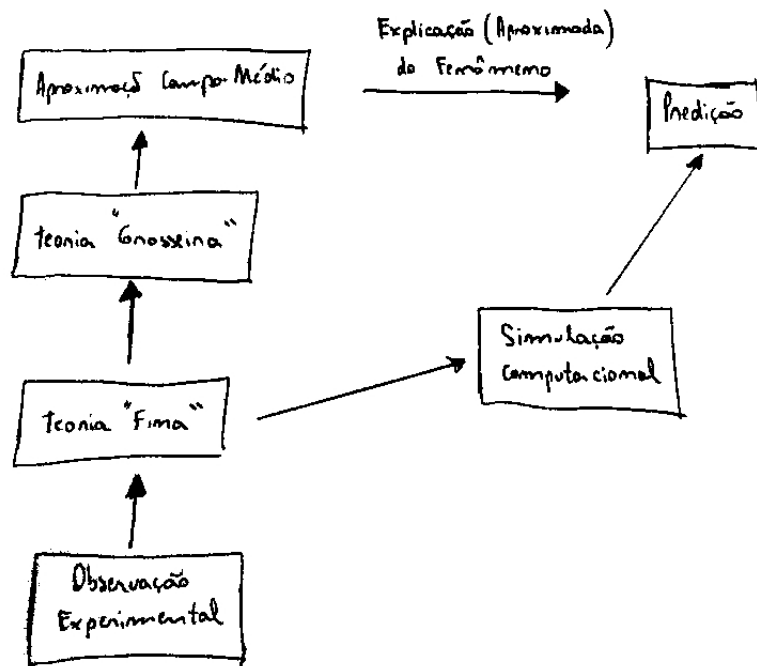


Figura 2.3: asasa sa sa ssa

2.4 Modelagem de Sistemas complexos

Existe um repertório relativamente vasto de técnicas analíticas que permitem o cálculo de propriedades macroscópicas de modelos teóricos que consideram interações microscópicas simples para a descrição de sistemas complexos. Como exemplo dessas técnicas podemos citar as aproximações de campo médio (? ? ? ?). No entanto, esse tipo de aproximação leva a homogeneidade entre os agentes, o que tem se mostrado insuficiente para a descrição adequada das evidências empíricas de sistemas que dependem fortemente da heterogeneidade dessas entidades automatadas. Há então uma necessidade crescente de modelos com padrões mais complexos de interação, como é o caso dos modelos de *autômatos celulares* (?) e de *redes complexas* (Boccaro 2004). Esses modelos, que recebem o nome de *modelos baseados em agentes*, usam simulações computacionais para a representação e análise de sistemas complexos. Mais especificamente, são simuladas (usando técnicas de monte Carlo, por exemplo) tanto a distribuição espacial dos agentes - que constituem uma população - quanto as interações entre eles; geralmente essas interações são feitas a partir de regras simples. As simulações são feitas com o objetivo de se observar o resultado coletivo do modelo proposto para o sistema complexo que se queira analisar.

O uso de modelos matemáticos para tratar de sistemas complexos, tem se mostrado simplistas no sentido das complicações desse sistema, que nos mostra a impossibilidade de ser encerradas em poucas variáveis. No entanto, o uso de modelos computacionais para lidar com esses sistemas tem se mostrado muito bem sucedido. Com o uso de modelos computacionais é possível, por exemplo, modelarmos cada entidade que constitui esses sistemas e assim adicionarmos as regras de interação dele com todas as outras entidades da população. Com esse modelo, a computação das regras pelo computador nos leva a observarmos a dinâmica desse sistema tirando também conclusões sobre a evolução desse sistema. Fato que seria impossível dentro de um modelo matemático. Esse tipo de abordagem é também chamado de modelo baseado em agentes. Nesse tipo de modelo cada indivíduo de uma população tem sua própria história de interação com o ambiente e com todos os outros indivíduos da população. Assim podemos observar pela simulação a emergência de

comportamento macroscópicos a partir das próprias interações individuais - microscópicas - dos indivíduos que constituem a população.

A mecânica estatística, que surgiu da tentativa de compreensão das propriedades termodinâmicas em sistemas de partículas que obedecem dinâmicas definidas, é bastante apropriada para o estudo de sistemas de muitos corpos. Essa metodologia se apresenta como arcabouço natural para análise de SC, afinal é imediata a analogia entre as interações entre partículas de um sistema físico e as interações entre agentes/indivíduos em sistemas sócio-econômicos ou biológicos; isso se deve graças aos vínculos e as interações dos componentes microscópicos desses cenários e a necessidade da análise dos comportamentos macroscópicos emergentes. Entre diversos métodos de física estatística que podem ser perfeitamente aplicáveis à SC, destaca-se as simulações de Monte Carlo, grupo de renormalização, dinâmicas estocásticas, equações do tipo Fokker-Planck, Langevin(?), o método de réplicas para análise de sistemas desordenados (? ?) e, por fim, o método de cavidade e métodos de passagem de mensagem (?).

Os primeiros passos na formulação de cenários econômicos com interações microscópicas mais complexas em termos da mecânica estatística foram dados por Marsili e outros em (? ? ?). Em biologia podemos citar os trabalhos presentes em (? ?). Essencialmente, o que se faz nesses modelos mais complexos é lidar com a heterogeneidade dos agentes sob a forma de desordem (?).

2.5 Modelos e a Realidade

O interessante é que muitas vezes os modelos se tornam tão bem sucedidos em sua descrição da realidade que eles acabam sendo equivocadamente sendo interpretados como a própria realidade. Por exemplo, hoje provavelmente ninguém consideraria a teoria atômica como um modelo, dado as grandes evidências experimentais que temos disponíveis a seu favor que temos hoje. Pouca gente hoje duvidaria da existência dos átomos. No entanto, no final do século 19 e começo do século 20, essa teoria não era nada mais, nada menos que um modelo plausível que explicava as leis de Dalton para as reações químicas. Fato análogo se dá aos genes, que antes era um modelo que explicava as leis de Mendel. Hoje em dia, ninguém diz que os genes são modelos, mas sim a realidade propriamente dita, embora tenha sido criado com o status de um modelo.

Interessante então que esses modelos, embora simplificados em relação a realidade propriamente dita, eles tem uma relação com a realidade que em algumas situações elas se transforma na própria realidade, pelo menos inconscientemente na percepção dos cientistas.

CITAR O EXEMPLO DO VILAREJO QUE SURTIU PELO NOME INVENTADO NO MAPA!!

Referências Bibliográficas

Referências do Capítulo

[Boccaro 2004] N Boccaro. *Modelling Complex Systems*. Springer 2004.

[Jorgensen 2011] S.E. Jorgensen. *Fundamentals of Ecological Modelling, Volume 21, Fourth Edition: Applications in Environmental Management and Research (Developments in Environmental Modelling)*. Elsevier; 4 edition (February 1, 2011).

[Murray 2007] James Dickson Murray. *Mathematical Biology I: an introduction*. Springer; 3rd edition (December 8, 2007).

Capítulo 3

Modelagem de Sistemas Biológicos I: Dinâmica de Populações

Vamos neste capítulo ilustrar a ideia de modelagem introduzida no capítulo anterior, aplicando este paradigma a sistemas biológicos. Mais especificamente, estamos interessados em construir um modelo matemático que nos permita compreender o crescimento populacional. Gostaríamos de entender, por exemplo, como acontece a dinâmica de uma população de bactérias ou mesmo a dinâmica populacional humana. Para isso vamos usar, inicialmente, dados reais de crescimento de uma população de leveduras, representados pelos pontos da figura (3.1). Vamos elaborar modelos matemáticos para tentar inferir como as células de leveduras interagem umas com as outras e com o ambiente de forma que a população cresça obedecendo certos padrões evidenciados pelos dados empíricos.

Para começarmos a organizar as ideias sob o ponto de vista matemático, vamos usar $N(t)$ para representar a população de leveduras (número ou densidade de indivíduos) em função do tempo ou geração t . Em um intervalo de tempo Δt a população sofre uma atualização, ficando com uma população

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta N(t). \quad (3.1)$$

Aqui $\Delta N(t)$ é um número que representa o saldo entre os indivíduos adicionados (nascimentos) e os indivíduos retirados (mortes) neste período. Na verdade

$$\Delta N(t) = \text{Número de Nascimentos em } \Delta t - \text{Número de mortes em } \Delta t. \quad (3.2)$$

É claro que, se soubermos exatamente o número de mortes e de nascimentos em um certo período saberemos exatamente o valor atualizado da população. O problema é que, em geral, não sabemos estes números. O que podemos fazer então é tentar fazer algumas considerações ou suposições a partir de modelos matemáticos. Nas próximas seções vamos apresentar dois tipos de modelos matemáticos para descrever a dinâmica populacional. O primeiro tipo, que chamaremos de *modelos fenomenológicos* ou *modelos macroscópicos*, são modelos que levam em consideração apenas informações da população como um todo. Modelos que se encaixam neste tipo, e que serão discutidos aqui, são os modelos de Malthus, Verhulst, Gompertz e o de Bertalanfy. O segundo tipo, que chamaremos de *modelos microscópicos*, são aqueles que levam em consideração as propriedades da população no nível do indivíduo. Este tipo de modelo procura entender os fenômenos macroscópicos de uma população como uma propriedade emergente das interações entre os indivíduos.

3.1 O Modelo de Malthus

Vamos considerar, num primeiro momento, e por mera simplicidade, que o número de mortes e o número de nascimentos dentro da população de leveduras sejam proporcionais ao número de indivíduos presentes na população e ao intervalo de tempo considerado. Ou seja, vamos considerar que

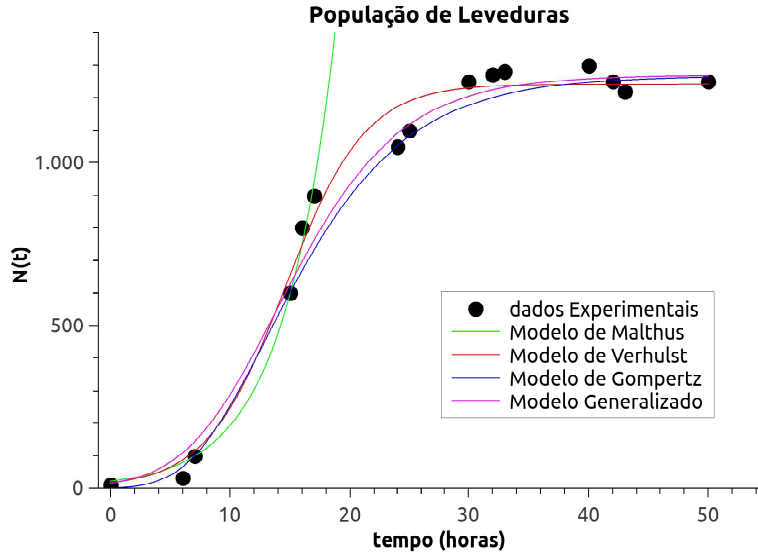


Figura 3.1: Dados empíricos (pontos) do crescimento de uma população de leveduras. As linhas contínuas representam as previsões dos modelos matemáticos. Os dados experimentais foram colhidos de (Edelstein-Keshet 1988). Ajuste com o modelo de Malthus: $k_0 = 0,227$; $N_0 = 20$. Verhulst: $k_0 = 0,302$; $N_0 = 15$; $K = 1241$. Gompertz: $k_0 = 0,1824$; $N_0 = 1$; $K = 1268,3$. Modelo Generalizado: $k_0 = 0,1820$; $N_0 = 14$; $K = 1269$; e $q = 0,394$.

$$[\text{Número de Nascimentos em } \Delta t] = b\Delta t N(t), \quad (3.3)$$

e que

$$[\text{Número de mortes em } \Delta t] = d\Delta t N(t), \quad (3.4)$$

onde os parâmetros b e d são constantes. Essa ideia é razoável pois, quanto maior o intervalo de tempo, maior será o número de nascimentos e de mortes de indivíduos. Da mesma forma, quanto maior a população, maior será também o número de nascimentos e de mortes. Estamos então introduzindo uma hipótese de linearidade, o que é bastante simplista, mas que facilitará os cálculos para o uso do modelo.

O parâmetro b , que chamaremos de *taxa de nascimento*¹ pode ser interpretado como o número médio de células filhas geradas por cada célula da população e por intervalo de tempo. Por exemplo, $b = 4/\text{hora}$ significa que cada célula da população gera 4 novas células - filhas - em um período de 1 hora. Neste modelo simples que está sendo proposto, este parâmetro será considerado constante ao longo de todas as gerações. O parâmetro d , que chamaremos de *taxa de mortalidade*², pode ser interpretado como a proporção de mortes num certo período de tempo. Ou seja,

$$d = \frac{\text{Proporção de mortes em } \Delta t}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{\text{Número de mortes em } \Delta t}{N}\right)}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Por exemplo, se em $\Delta t = 1$ hora morreram 10 células de uma população de $N = 1000$ células, então

$$d = \frac{10/1000}{1 \text{ hora}} = 0.01/\text{hora}. \quad (3.6)$$

Voltando às equações (3.1) e (3.2) temos então que

¹ b vem da palavra inglesa "birth".

² d vem da palavra inglesa "death".

$$N(t + \Delta t) = N(t) + (b - d)\Delta t N(t), \quad (3.7)$$

que é um modelo discreto para descrever a dinâmica de população. Dado uma população inicial e os parâmetros b e d , podemos calcular iterativamente os valores do tamanho da população em um certo instante t . Quando $b > d$, ou seja, a taxa de nascimento for maior que a taxa de mortalidade, então a população irá crescer. Mas se contrário, a população irá decrescer. Os valores desses parâmetros do modelo podem ser estimados de modo que o ajuste do modelo com os dados experimentais seja o melhor possível.

Vamos agora tentar converter o modelo discreto (3.7) em uma equação contínua. Isso se mostrará mais conveniente, pois permitira análises analíticas que não são possíveis na versão discreta. Para isso, vamos tomar o limite de intervalos de tempo infinitésimos, o que significa escrevermos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = k_0 N(t) \quad (3.8)$$

onde introduzimos $k_0 \equiv b - d$, que chamaremos de *taxa de crescimento da população*. Identificando a parte esquerda da equação acima como uma derivada, temos então a *equação diferencial ordinária* (EDO)

$$\frac{dN}{dt} = k_0 N. \quad (3.9)$$

Esta EDO pode ser resolvida integrando os seus dois lados, isto é

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'} = k_0 \int_0^t dt', \quad (3.10)$$

o que nos leva à solução

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \quad (3.11)$$

onde N_0 é a população inicial. Dessa forma, o modelo simples introduzido, e que nos leva à (3.9), nos dá como resultado um crescimento exponencial da população, como sugere (3.11). E é exatamente por esta característica que este modelo também é conhecido como *modelo de Malthus*, em alusão ao economista Inglês, famoso pelos seus estudos sobre populações e pela frase “*A população humana cresce geometricamente, enquanto que a quantidade de alimentos cresce aritmeticamente*” (Malthus 1798).

O problema é que o modelo malthusiano, justamente por ser demasiado simples, leva à inconsistência de que a população cresce indefinidamente, explodindo se esperarmos um tempo suficiente. Este resultado do modelo é incoerente com o que observamos pelos dados de leveduras apresentados na figura (3.1), no qual a população apresenta uma saturação. O modelo falha em descrever a população como um todo, no entanto nem tudo está perdido. O modelo falha para tempos longos, mas descreve muito bem o crescimento da população nos instantes iniciais do crescimento. Na figura (3.1) vemos que o modelo se ajusta muito bem aos dados empíricos se considerarmos o crescimento nas primeiras 20 horas. Esse resultado é bastante louvável, dado a simplicidade deste modelo.

Este fato nos permite introduzir um conceito extremamente importante em modelagem, que é a ideia de *região de validade* ou *limites de um modelo*. A contraposição entre a previsão do modelo de Malthus e os dados empíricos apresentados na figura (3.1) nos diz claramente que o modelo é bom, desde que aplicado para descrever a dinâmica inicial da população. Fora deste limite o modelo não faz mais sentido.

Restringindo a aplicação do modelo nas primeiras horas do crescimento das leveduras, i.e. a região em que o modelo parece ser coerente com os dados empíricos, então o melhor ajuste é dado com a equação

$$N(t) = 20 \cdot e^{0,227 \cdot t}. \quad (3.12)$$

Ou seja, o modelo prevê que a população inicial é de $N_0 = 20$ e que a população cresce com uma taxa de crescimento $k_0 = 0,227$ indivíduos/hora. Isto é, a cada 4 horas, aproximadamente, cada indivíduo da população gera uma nova célula filha. Ou melhor, a população dobra a cada 4 horas (aproximadamente). Em suma, o modelo de Malthus é simples, mas permite extrair algumas informações quantitativas a respeito da população de leveduras.

3.2 O Modelo de Verhulst

Essencialmente, o modelo de Malthus não dá conta de descrever a população para tempos grandes pois ele não considera a escassez de recursos naturais. Na verdade, o modelo de Malthus é demasiadamente simples e, portanto, precisamos acrescentar um pouco mais de informação nele para conseguir melhorar os resultados.

Como vimos que o modelo de Malthus se comporta bem para populações no estágio inicial do crescimento, vamos ainda confiar neste modelo, mas fazendo uma pequena alteração nele. Vamos reescreve-lo com a introdução de um termo corretivo na EDO (3.9), de forma que

$$\frac{dN}{dt} = k_0 N - \text{termo}. \quad (3.13)$$

Este “termo” deve ser zero (ou próximo de zero) quando N for suficientemente pequeno e deve ser máximo quando a população atingir um certo patamar. Vamos discutir agora a ideia introduzida inicialmente por Verhulst em (Verhulst 1845; Verhulst 1947), que considerou este termo corretivo como proporcional à N^2/K , onde K , que chamaremos de *capacidade de carregamento* seria o tamanho máximo da população que pode ser suportado pelo ambiente. Desta forma a EDO de Malthus com termo corretivo de Verhulst ganha a forma

$$\frac{dN}{dt} = k_0 N \left[1 - \left(\frac{N}{K} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Neste modelo, conhecido por *modelo de Verhulst*, quando o tamanho da população se aproxima da capacidade de carregamento ($N \rightarrow K$), temos $dN/dt = 0$, ou seja a população para de crescer.

A solução deste modelo é obtida integrando os dois lados da EDO acima, ou seja

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N' \left(1 - \frac{N'}{K} \right)} = k_0 \int_0^t dt', \quad (3.15)$$

que resulta em

$$N(t) = \frac{K}{1 - \left(1 - \frac{K}{N_0} \right) e^{-k_0 t}}. \quad (3.16)$$

Note que agora temos um modelo bastante apropriado para descrever o crescimento populacional de leveduras descrito na figura (3.1). A solução (3.16) descreve muito bem a dinâmica populacional de leveduras tanto nas primeiras horas do crescimento quanto para tempos maiores. Podemos dizer que o modelo de Verhust, embora seja muito simples, com apenas dois parâmetros (taxa de crescimento e capacidade de carregamento), captura a essência do crescimento populacional dessas leveduras. Esta boa descrição acontece mesmo desconsiderando todos os detalhes das interações entre as células que compoem esta população. Mas tudo bem, uma vez que introduzir essa complexidade adicionaria mais dificuldade em resolver o problema, e talvez, impossibilitaria o tratamento analítico e conseqüentemente a compreensão do fenômeno. Com esta versão simples, considerando apenas parâmetros fenomenológicos, foi possível descrever quantitativamente esta população, que cresce rapidamente no início e que tem a sua taxa de crescimento diminuída na medida que a população vai chegando numa saturação provocada pela escassez de recursos do ambiente.

3.3 Discretização do Modelo de Verhulst: O Mapa Logístico

Na seção anterior, para deduzirmos o modelo contínuo de Malthus (EDO (3.9)), partimos de um modelo discreto, tomando em seguida o limite de intervalos de tempo infinitesimais entre as gerações. Vamos agora fazer o caminho inverso para o modelo de Verhulst. Ou seja, como já temos o modelo contínuo, dado pela EDO (3.14), vamos agora tomar intervalos de tempo discretos entre gerações e chegar no modelo discreto.

Vamos fazer $dt \rightarrow \Delta t$ na Eq. (3.14) de modo a ficarmos com

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = k_0 N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right], \quad (3.17)$$

o que nos conduz à equação de recorrência

$$N(t + \Delta t) = (1 + k_0 \Delta t) N(t) - \frac{k_0}{K} \Delta t N^2. \quad (3.18)$$

Introduzindo $\lambda \equiv 1 + k_0 \Delta t$, que é um parâmetro relacionado com a taxa de crescimento, e fazendo algumas manipulações algébricas chegamos a

$$N(t + \Delta t) = \lambda N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{\left(\lambda \frac{K}{k_0 \Delta t} \right)} \right]. \quad (3.19)$$

Introduzindo uma constante auxiliar $C \equiv \lambda K / (k_0 \Delta t)$ e multiplicando-a à equação acima temos

$$\frac{N(t + \Delta t)}{C} = \lambda \frac{N(t)}{C} \left[1 - \frac{N(t)}{C} \right]. \quad (3.20)$$

Já que $C \propto K$, ou seja, esta constante auxiliar é uma espécie de capacidade de carregamento, vamos introduzir uma quantidade similar à densidade de indivíduos, dada por $n(t) \equiv N(t)/C$. Dessa forma, a eq. (3.20) fica

$$n(t + \Delta t) = \lambda n(t) [1 - n(t)], \quad (3.21)$$

que é a versão discreta do modelo de Verhulst, também conhecida por *mapa logístico*. Embora esta equação de recorrência (3.21) seja bastante simples, veremos a diante que ela apresenta uma surpreendente variedade de fenômenos.

O Mapa Logístico

Surge então uma pergunta: para um dado parâmetro λ e uma densidade populacional inicial n_0 , a população vai se estabilizar para um tempo grande? Veremos que, nesta versão discreta do modelo de Verhulst, dependendo das condições, a população pode se estabilizar a uma dada altura, ou pode flutuar indefinidamente de forma regular ou caótica.

Por uma população estabilizada entendemos que ela não varie de uma geração para outra, ou seja, $n(t + 1) = n(t) \equiv n^*$, onde n^* é a densidade da população no equilíbrio. Nesta condição de equilíbrio a equação (3.21) se torna uma equação de segundo grau em n^* :

$$n^* = \lambda n^* (1 - n^*) \Rightarrow \lambda n^{*2} - (\lambda - 1)n^* = 0, \quad (3.22)$$

com uma única solução diferente de zero dada por

$$n^* = 1 - \frac{1}{\lambda}. \quad (3.23)$$

Precisamos agora determinar se este ponto de equilíbrio é *instável* ou *estável*. Se ele for estável o sistema volta ao equilíbrio mesmo se sujeito a pequenas perturbações. Caso seja instável, basta uma pequena perturbação para que o equilíbrio seja perdido. Para que o mapa logístico

$n(t+1) = f(n(t))$ apresente um ponto de equilíbrio n^* estável é necessário que ele obedeça a condição

$$||f'(n^*)|| < 1, \quad (3.24)$$

onde $f'(n^*) = \left. \frac{df(n)}{dn} \right|_{n=n^*}$ (para detalhes, veja (Murray 2007)). É fácil mostrar que o mapa logístico é estável no intervalo $1 < \lambda < 3$. O gráfico (3.5) mostra os valores de n^* em função de λ . Para $\lambda < 1$ a população se anula ($n^* = 0$); para $1 < \lambda < 3$ a população converge para $n^* = 1 - 1/\lambda$ (Eq.3.23).

É interessante estudarmos o comportamento da equação logística para outros valores de λ . Como vimos, para $\lambda < 3$ a população estabiliza-se rapidamente num ponto único (ponto fixo). No entanto, aumentando λ outros comportamentos poderão ser observados. Com a realização desse estudo, veremos que, em geral, o sistema passa por uma fase inicial que depende do valor inicial de população e depois de um certo número de interações assume um comportamento definitivo. A primeira fase é chamada de *transitório* do sistema e depende das condições iniciais. Ela pode durar mais ou menos iterações dependendo do quanto a condição inicial está “próxima” do comportamento final. Já a fase final é denominada *atrator* do sistema e depende apenas do parâmetro, i.e. do habitat em que a população se encontra. Este atrator pode ser um ponto fixo, um atrator regular (periódico), ou um atrator caótico (a população flutua entre um grande número de valores possíveis).

Os gráficos apresentados abaixo mostram experimentos com a equação logística (3.21) com diferentes valores de λ . Para visualizarmos os efeitos de perturbações no tamanho da população inicial, introduzimos o parâmetro ϵ , que nos dá a diferença, em $t = 0$, entre duas densidades de populações n e n_ϵ :

$$\epsilon \equiv n(t=0) - n_\epsilon(t=0). \quad (3.25)$$

Na figura (3.2) temos a ilustração de uma dinâmica populacional com um valor de $\lambda (= 2)$ que proporciona estabilidade. Neste gráfico, mostra-se simulações com duas populações com diferentes valores iniciais e que convergem para a mesma densidade. No caso da figura (3.3), temos uma simulação com um valor de $\lambda (= 3.1)$ que dá origem a um comportamento oscilatório da população. Finalmente, na figura (3.4), temos a simulação com um valor de $\lambda (= 3.6163)$ que gera uma instabilidade na densidade populacional. Neste caso, basta uma sutil diferença na população inicial para gerar trajetórias completamente distintas.

Muitas vezes estamos interessados apenas no atrator do sistema e não no transiente. Ou seja, queremos saber o comportamento da população a longo prazo, independente do fato de começarmos com uma população pequena ou grande. Vamos agora estudar o comportamento final da população em função do parâmetro. Para isso, vamos graficar o valor de $n(t)$, para t suficientemente grande, em função do parâmetro λ . A figura (3.5) apresenta este gráfico, onde é possível observar a região de estabilidade ($1 < \lambda < 3$) e regiões com regimes caóticos. Outro fato interessante é que acontecem janelas de comportamentos periódicos no meio da região caótica. De fato estas janelas apresentam comportamentos fractais, ou seja, cada vez que damos um zoom nesta região, estas janelas vão ficando mais finas e com período mais alto, e sempre apresentado o mesmo formato.

3.4 O Modelo de Gompertz

Na seção (3.1) vimos que o modelo de Malthus falha pois conduz a um crescimento indeterminado da população. Na seção (3.2) propomos uma forma (modelo de Verhulst) para introduzir uma saturação na dinâmica da população na tentativa de corrigir este problema do modelo de Malthus. Vamos agora usar uma ideia alternativa para induzir a saturação da população, ainda usando como ponto de partida o próprio modelo de Malthus.

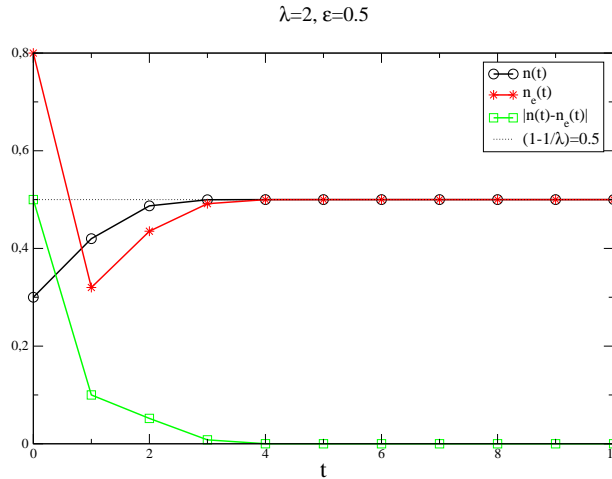


Figura 3.2: Ilustração da dinâmica populacional gerada pela equação logística para um valor de λ que implica estabilidade. Nestas condições, duas populações (n e n_ϵ) se igualam rapidamente e convergem para o ponto de equilíbrio $n^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$, mesmo com uma diferença inicial grande entre elas ($\epsilon = 0.5$). A diferença entre estas duas populações cai exponencialmente com o tempo (pontos quadrados verdes).

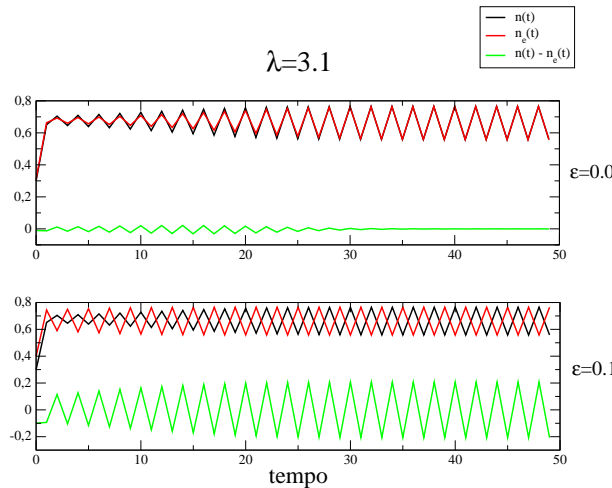


Figura 3.3: Ilustração da dinâmica populacional gerada pela equação logística para um valor de λ que implica oscilação da população em dois valores de densidades. Note que as duas populações, embora com condições iniciais distintas, ambas convergem para os mesmos valores oscilantes de densidade. Embora para ϵ suficientemente grande possa haver uma defasagem temporal entre as densidades dessas duas populações, conforme mostra a figura debaixo.

O crescimento indeterminado da população no modelo de Malthus se deve à taxa de crescimento per capita k_0 se manter constante para todos os indivíduos da população e para qualquer geração. Vamos então introduzir um pouco mais de informação nesta taxa de crescimento. Mais especificamente, vamos considerar que essa taxa de crescimento seja dependente do tempo, o que nos permite escrever o modelo (3.9) como

$$\frac{dN}{dt} = k(t)N. \tag{3.26}$$

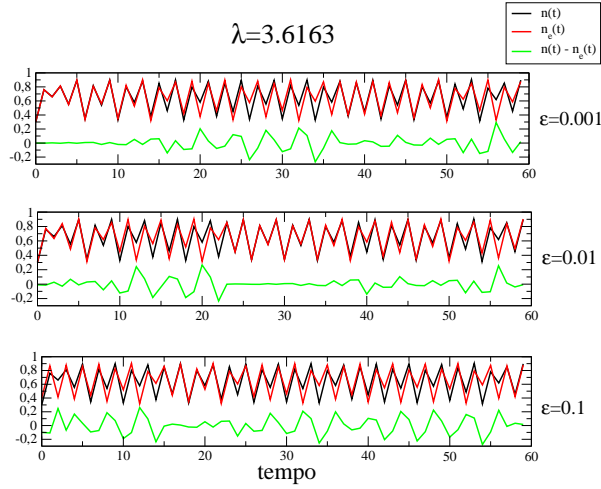


Figura 3.4: Ilustração da dinâmica populacional gerada pela equação logística para um valor de λ que implica instabilidade. Note que um pequeno valor de ϵ já é suficiente para dar destinos totalmente diferentes às duas populações n e n_e .

Para que a população pare de crescer com o passar do tempo, é interessantes pensarmos em uma situação em que $k(t)$ decresce com t . Por exemplo, podemos considerar um decaimento exponencial dessa taxa de crescimento, ou seja $k(t) = ce^{-k_0t}$, onde c é uma constante e k_0 desempenha aqui o papel de “meia vida” da taxa de crescimento, justificando a escolha inicial em (3.9). Dessa forma temos um novo modelo, dado pela EDO

$$\frac{dN}{dt} = ce^{-k_0t}N, \tag{3.27}$$

também conhecido por *modelo de Gompertz* em homenagem ao economista Inglês que no séc. XIX utilizou esse modelo para descrever mortalidade humana³.

Para encontrarmos a solução deste modelo, como de praxe, vamos integrar dos dois lados da EDO (3.27), ou seja

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'} = c \int_0^t e^{-k_0t'} dt', \tag{3.28}$$

o que nos conduz a

$$N(t) = N_0 e^{-c\left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k} e^{-k_0t}\right)} \tag{3.29}$$

Note que para $t \rightarrow \infty$ e $k_0 > 0$ a população converge para $N_0 e^{-c/k_0}$, e portanto esta quantidade é a própria capacidade de carregamento, ou seja

$$K = N_0 e^{-\frac{c}{k_0}}. \tag{3.30}$$

Isto implica que $c/k_0 = -\ln(K/N_0)$ e consequentemente podemos escrever a solução acima em termos dos parâmetros K , N_0 e k_0 . Ou seja, a solução do modelo de Gompertz também pode ser escrita como

$$N(t) = K e^{\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-k_0t}}. \tag{3.31}$$

³O seguro de vida pessoal começou a se tornar possível graças as ideias iniciais de Gompertz em 1825 que percebeu que a probabilidade de um adulto morrer no próximo ano aumenta exponencialmente com a sua idade. Este modelo ainda é usado pelas agencias de seguros.

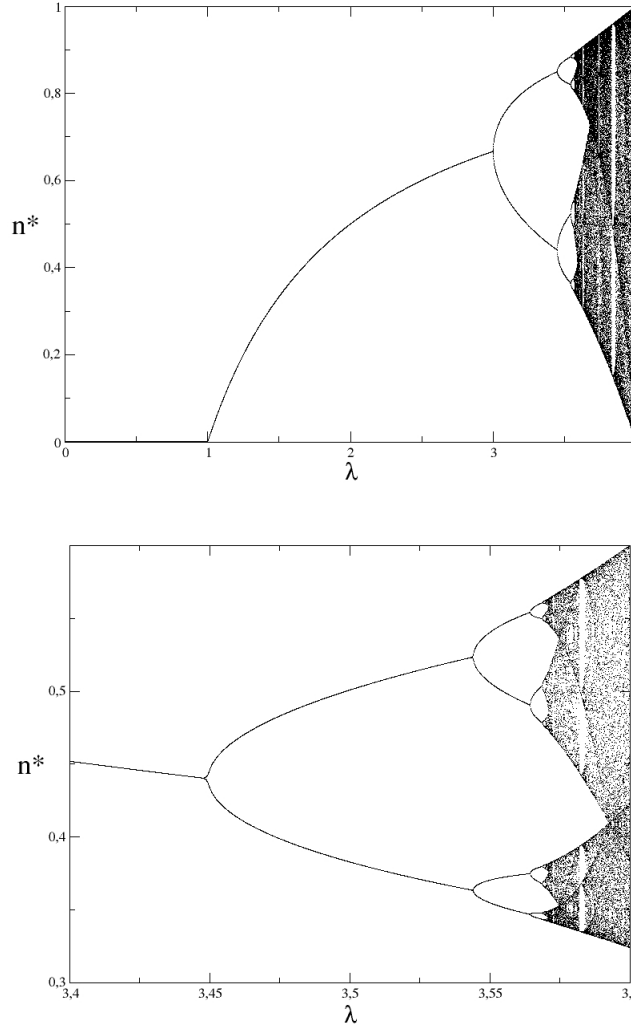


Figura 3.5: Valore assumidos por $n(t)$, para t suficientemente grande, em função do parâmetro λ . No gráfico acima, note a região de estabilidade ($1 < \lambda < 3$) e as regiões com regimes caóticos ($\lambda \gtrsim 3.5$). No gráfico abaixo, temos uma ampliação do gráfico acima para um estreito intervalo de λ .

Uma forma mais conveniente de escrever o modelo de Gompertz (3.27) é pela EDO

$$\frac{dN}{dt} = -k_0 N \ln \left(\frac{N}{K} \right), \tag{3.32}$$

o que é, na verdade, a forma mais usualmente encontrada na literatura. Note que se integrarmos essa EDO, ou seja, fazendo

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N' \ln \left(\frac{N'}{K} \right)} = -k_0 \int_0^t dt', \tag{3.33}$$

teremos a mesma solução (3.31), o que mostra que o modelo (3.27) e o modelo (3.33) são exatamente os mesmos.

Aplicando então o modelo de Gompertz para descrever o crescimento populacional de leveduras temos um resultado tão bom quanto a do modelo de Verhulst, conforme mostrado na figura (3.1).

Portanto este modelo também é interessante para modelarmos a dinâmica populacional destes micro-organismos.

3.5 O modelo Generalizado

Como vimos nas seções anteriores, tanto o modelo de Verhulst (que considera um termo de saturação para a população) quanto o modelo de Gompertz (que considera uma taxa de crescimento que decai exponencialmente com o tempo) levam a resultados bastante satisfatórios para descrever os dados experimentais do crescimento de leveduras. Mas se esses dois modelos, essencialmente diferentes em suas formulações, levam a resultados similares, qual das duas hipóteses seria verdadeira? Ou seriam ambas verdadeiras? Ou ambas falsas? Na tentativa de responder essa pergunta, gostaríamos de tentar elaborar um modelo mais completo e que tivesse pelo menos os modelos de Verhulst e de Gompertz como casos particulares.

Para isso vamos imaginar que a função logaritmo do modelo de Gompertz (3.32) possa ser interpretada como um caso particular de uma função mais geral. Uma opção seria olhar para a *função logaritmo generalizada*. No apêndice (3.7) apresentamos esta função, que é definida por

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^q - 1}{q}. \quad (3.34)$$

Ela é assim chamada pois recupera a função logaritmo usual quando tomamos o limite $q \rightarrow 0$ (para maiores detalhes veja apêndice). Note que $\ln_q(x)$ descrito a partir da equação (3.34) *não* significa “logaritmo de x na base q ”; neste caso usaríamos a notação $\log_q(x)$. Por mera conveniência, vamos reescrever o modelo de Gompertz (3.32) substituindo a função logaritmo usual pela função logaritmo generalizada, o que nos dá

$$\frac{dN}{dt} = -k_0 N \ln_q\left(\frac{N}{K}\right), \quad (3.35)$$

onde q desempenha aqui o papel de um parâmetro de generalização. Vamos chamar este modelo de *modelo generalizado* pois ele recupera não só o modelo de Gompertz quando toma-se o limite $q \rightarrow 0$, mas também o modelo de Verhulst quando $q = 1$. Além disso, se $q = 1$ (Verhulst) e $K \rightarrow \infty$, este modelo generalizado recupera também o modelo de Malthus.

A solução deste modelo pode ser obtida pela integração dos dois lados de (3.35), como de praxe, o que nos leva a

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N' \ln_q\left(\frac{N'}{K}\right)} = -k_0 \int_0^t dt' \quad (3.36)$$

e à solução

$$N(t) = \frac{K}{\left[1 - \left[1 - \left(\frac{K}{N_0}\right)^q\right] e^{-k_0 t}\right]^{\frac{1}{q}}}. \quad (3.37)$$

Note que para $q = 1$ e $q \rightarrow 0$, esta solução nos leva às soluções (3.16) e (3.31), respectivamente.

O modelo foi aplicado nos dados experimentais de leveduras, como pode ser conferido na figura (3.1). Neste caso o melhor ajuste foi feito com $q = 0,394$, o que significa que um modelo intermediário é melhor para ajustar esses dados do que os modelos de Gompertz ($q \rightarrow 0$) ou Verhulst ($q = 1$).

O modelo (3.35) foi proposto originalmente em (Richards 1959) e representa um passo importante na construção de modelos unificados. No entanto, o parâmetro q foi introduzido aqui como um argumento teórico para obter a generalização, sem apresentar qualquer interpretação física. No entanto, com uma abordagem microscópica das interações entre os indivíduos, que será apresentado na seção (3.6), vamos conseguir dar esta interpretação. Na verdade, como veremos a

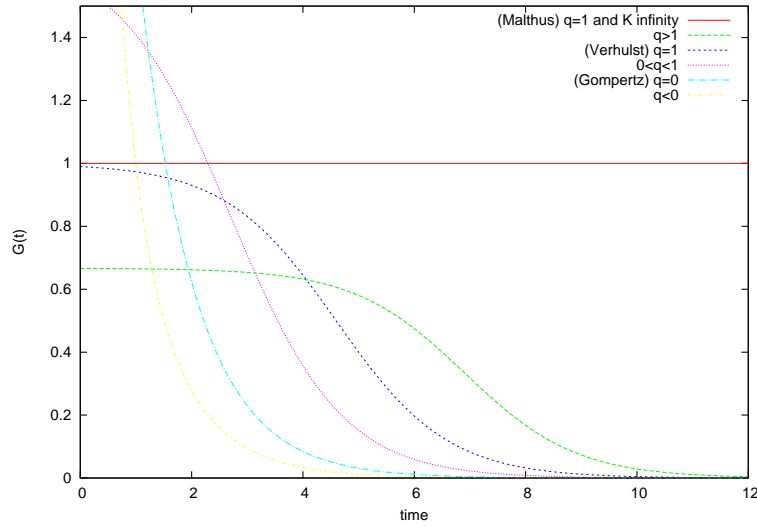


Figura 3.6: dfgdfgdfgdfga.

seguir, o parâmetro de generalização q está relacionado com o campo de interação dependente da distancia entre cada par de indivíduos que constitui a população.

Falar sobre $G(t)$

3.5.1 Modelo Generalizado e Modelo de Bertalanfy

O modelo generalizado, quando escrito de uma forma mais explicita, isto é, usando a definição (??), fica

$$\frac{dN}{dt} = - \left(\frac{k_0}{qK^q} \right) N^{q+1} + \frac{k_0}{q} N. \tag{3.38}$$

Ou, de uma forma mais compacta, podemos escrever-lo como

$$\frac{dN}{dt} = aN^\beta - bN, \tag{3.39}$$

onde introduzimos os parâmetros $a \equiv -\frac{k_0}{qK^q}$, $b \equiv \frac{k_0}{q}$, e $\beta \equiv q + 1$. O modelo (3.39) é conhecido na literatura por *modelo de Bertalanfy*.

O modelo (3.39) é bastante usado para descrever crescimento ontogênico e recentemente tem sido aplicado para descrever populações humanas (?). Dessa forma, o modelo generalizado (3.35) é o próprio modelo de Bertalanfy. O interessante é que este fato nos proporciona uma interpretação física dos parâmetros do modelo de Bertalanfy. Ou seja, comparando um modelo com o outro vemos que, o modelo de bertalanfy apresenta:

- taxa de crescimento: $k_0 = -b(\beta - 1)$;
- capacidade de carregamento: $K = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$;
- constante de generalização: $q = \beta - 1$.

Como ainda não justificamos fisicamente o parâmetro q do modelo generalizado, também não sabemos interpretar fisicamente o parâmetro β do modelo de Bertalanfy. Isso será feito com o desenvolvimento de um modelo microscópico das interações dos indivíduos.

3.6 Modelo Microscópico

Até este momento, os modelos apresentados foram construídos apenas considerando informações no nível macroscópico, ou seja informações populacionais. No entanto, para entendermos a dinâmica populacional sob um ponto de vista mais profundo é bastante interessante entendermos como se realizam as interações entre os indivíduos que constituem a população. Esse tipo de abordagem, que pode ser entendida como uma abordagem microscópica, deve nos levar a entender a dinâmica da população por primeiros princípios.

O primeiro passo em direção a esse entendimento foi obtido a partir de um modelo microscópico para a o crescimento de células apresentado por Mombach e outros em (Mombach et al 2002). Nesse modelo, foi possível observar emergência de propriedades macroscópicas a partir das interações dos microcomponentes dessa população. E ainda, conseguiu uma interpretação física para o parâmetro de generalização q . Vamos nessa seção discutir um pouco a respeito desse modelo.

Para começarmos, considere que a taxa de replicação de uma célula é regulada por dois fatores: um intrínscio à célula, e outro que depende das interações com as demais células da população. Isso significa que deve valer o esquema para uma certa célula

$$[\text{Taxa de Replicação}] = [\text{estimulo em auto-replicar-se}] + [\text{estimulo proveniente da interação com as outras células}].$$

Baseando-se no esquema acima, e denominando por R_i a taxa de replicação da i -ésima célula, o número de células filhas geradas por este indivíduo num intervalo de tempo Δt será

$$\Delta t R_i = G_i + J I_i. \quad (3.40)$$

Aqui, G_i é a capacidade intrínscica desta célula em auto-replicar-se; I_i é o campo de interação sentido por esta célula e causado pelas demais células da população; e J representa a força (ou intensidade) deste campo de interação. Se $J > 0$ temos cooperação entre as células, se $J < 0$ temos competição entre as células.

O número total de células filhas acrescentadas à população numa certa geração t será de $\Delta N(t) = \Delta t \sum_{i=1}^N R_i$, o que nos leva a uma equação de recorrência

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \sum_{i=1}^N R_i. \quad (3.41)$$

Considerando intervalos de tempos infinitesimais, i.e. $\Delta t \rightarrow 0$, a equação de recorrência acima, junto com (3.40) se transforma na EDO

$$\frac{dN}{dt} = N \langle G \rangle + J \sum_{i=1}^N I_i. \quad (3.42)$$

onde $\langle G \rangle \equiv (1/N) \sum_{i=1}^N G_i$ é o valor médio da capacidade intrínscica de replicação.

O campo de interação I_i é o resultado da interação desta célula com cada uma das outras células da população. Isso nos permite escrever $I_i = \sum_{j \neq i} I_{ij}$, onde I_{ij} é o campo de interação entre as células i e j . Vamos considerar aqui que estas interações de pares só dependem da distância entre os indivíduos. Mais especificamente, vamos considerar que o campo de interação entre as células i e j decai com a distância r_{ij} entre elas pela forma

$$I_{ij}(r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}^\gamma}, \quad (3.43)$$

onde γ é o expoente de decaimento do campo de interação. Quando $\gamma = 0$, significa que o campo de interação não depende da distância, ou seja região de interação entre duas células é infinita. Este caso é chamado de *campo médio* (veremos sobre isso mais adiante). Para $\gamma \rightarrow \infty$, a região de interação é nula, o que significa que as células não interagem. De modo a preservarmos a estrutura

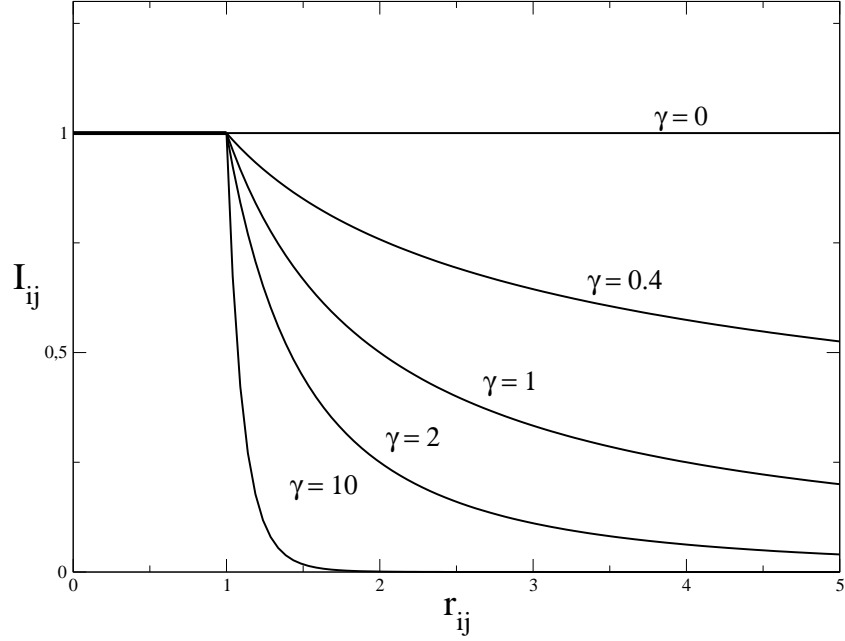


Figura 3.7: Gráfico que representa o campo de interação entre dois indivíduos (i e j) em função da distancia r_{ij} entre eles, de acordo com alguns valores do expoente de decaimento γ e com $r_0 = 1/2$. Na medida que γ aumenta, mais rapido é o decaimento deste campo com a distancia. Quando $\gamma = 0$, a região de interação é infinita, i.e. a intensidade da interação não depende da distancia (campo médio). Quando $\gamma \rightarrow \infty$ a região de interação é nula, o que significa que as células não interagem.

interna das células, vamos considerar $r_{ij} \geq 2r_0$, onde $2r_0$ é o diâmetro da célula. A figura (3.7) ilustra o decaimento deste campo de interação com a distancia para diferentes valores do expoente de decaimento.

Vamos agora fazer algumas suposições quanto a distribuição espacial dessas células. Primeiramente, vamos considerar que estas células estão distribuidas de tal forma a formar uma estrutura com hipervolume V_D de dimensão D . Para $D = 3$ o hipervolume é o volume euclidiano usual; para $D = 2$ a população se encontra distribuída sobre uma superfície e o hipervolume representa a área desta superfície; para $D = 1$ a população se encontra distribuída ao longo de um segmento e, neste caso, o hipervolume representa o comprimento deste segmento. Vamos considerar também $\rho(\mathbf{r})$ como a densidade de células num elemento de hipervolume $d^D \mathbf{r}$ posicionado em \mathbf{r} . Este *vetor posição* tem origem na própria célula i , conforme descrito na figura (3.8).

Dada estas considerações, o campo $I_i = \sum_{j \neq i} I_{ij}$ pode ser escrito como

$$I_i = \int_{V_D} dI_i = \int_{V_D} \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{r^\gamma} d^D \mathbf{r} \quad (3.44)$$

onde $dI_i = \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{r^\gamma} d^D \mathbf{r}$ é o campo de interação sentida pela célula i devido as células que se encontram no elemento de hipervolume $d^D \mathbf{r}$ localizado em \mathbf{r} (veja figura (3.8)).

Assumindo, por simplicidade, que a população seja homogeneamente distribuída no espaço, ou seja $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{cte}$, e usando coordenadas hiperesféricas pela troca

$$d^D \mathbf{r} = r^{D-1} dr d\Omega_D, \quad (3.45)$$

chegamos a

$$I_i = \rho_D \int_{2r_0}^{R_{max}} r^{-\gamma+D-1} dr \quad (3.46)$$

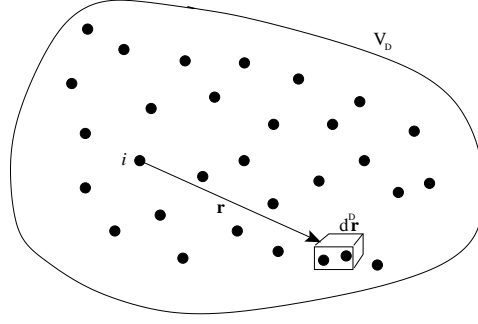


Figura 3.8: Hipervolume V_D , de dimensão D , formado pela distribuição espacial das células. Nesta figura está representado também um pequeno grupo de células dentro de um elemento de hipervolume $d^D \mathbf{r}$, localizado no vetor posição \mathbf{r} em relação a i -ésima célula.

onde $\rho_D \equiv \rho_0 \int \Omega_D$ é um parâmetro relacionado com a densidade de células e que depende da dimensão D ; e $\int \Omega_D$ é o ângulo sólido⁴. Introduzimos aqui R_{max} , que é a distancia máxima entre duas células. Resolvendo a integral (3.46) chegamos a

$$I_i = \frac{\rho_D}{D - \gamma} [R_{max}^{D-\gamma} - (2r_0)^{D-\gamma}]. \quad (3.47)$$

Por mera conveniencia, e sem qualquer perda de generalidade, vamos considerar de hora em diante que $r_0 = 1/2$, de modo que temos uma simplificação da equação acima, ficando

$$I_i = \frac{\rho_D}{D - \gamma} [R_{max}^{D-\gamma} - 1]. \quad (3.48)$$

Podemos escrever R_{max} em termos do número de células N . Para isso basta notarmos que $N = \int_{V_D} \rho(\mathbf{r}) d^D \mathbf{r}$, o que, dadas as considerações anteriores, no leva a

$$N = \rho_D \int_0^{R_{max}} r^{D-1} dr \quad (3.49)$$

o que resulta em

$$R_{max} = \left(\frac{DN}{\rho_D} \right)^{\frac{1}{D}}. \quad (3.50)$$

Introduzindo este resultado em (3.48) chegamos a

$$I_i = I(N) = \frac{\rho_D}{D(1 - \frac{\gamma}{D})} \left[\left(\frac{N}{(\rho_D/D)} \right)^{1 - \frac{\gamma}{D}} - 1 \right] \quad (3.51)$$

ou, de uma forma mais compacta, podemos escrever este resultado em termos do logaritmo generalizado (3.34), para obtermos

$$I_i = I(N) = \frac{\rho_D}{D} \ln_{1 - \frac{\gamma}{D}} \left[\frac{N}{(\rho_D/D)} \right]. \quad (3.52)$$

Note então que, embora tenhamos calculado o campo de interação da partícula i , o resultado se revela identico para todas as demais células, pois I_i independe do “índice” i , e consequentemente, não depende de propriedades particulares deste individuo, mas somente de N , o que justifica escrevermos $I_i = I(N)$.

Voltando então para a EDO (3.42) chegamos a

⁴Para $D = 1$, $\int \Omega_1 = 2$; para $D = 2$, $\int \Omega_2 = 2\pi$; e para $D = 3$, $\int \Omega_3 = 4\pi$.

$$\frac{dN}{dt} = \left[\frac{J}{(1 - \frac{\gamma}{D})} \left(\frac{\rho_D}{D} \right)^{\frac{\gamma}{B}} \right] N^{2 - \frac{\gamma}{B}} + \left[\langle G \rangle - \frac{J\rho_D}{D - \gamma} \right] N \quad (3.53)$$

que nada mais é que o modelo de Bertalanfy com

$$a = \frac{J}{(1 - \frac{\gamma}{D})} \left(\frac{\rho_D}{D} \right)^{\frac{\gamma}{B}}, \quad (3.54)$$

$$b = \frac{J\rho_D}{D - \gamma} - \langle G \rangle \quad (3.55)$$

$$\beta = 2 - \frac{\gamma}{D} \quad (3.56)$$

Temos aqui uma interpretação para a taxa de crescimento, capacidade de carregamento e o parametro de generalização q (ou β) a partir deste modelo microscopico. Na verdade a partir das relações acima, percebemos que o modelo microscopico apresenta:

- taxa de crescimento

$$k_0 = \langle G \rangle \left(1 - \frac{\gamma}{D} \right) - \frac{J\rho_D}{D}; \quad (3.57)$$

- Capacidade de carregamento

$$K = \left(\frac{\frac{\rho_D J}{D} - (1 - \frac{\gamma}{D}) \langle G \rangle}{\left(\frac{\rho_D}{D} \right)^{\frac{\gamma}{B}} J} \right)^{\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{B}}}. \quad (3.58)$$

- constante de generalização

$$q = 1 - \frac{\gamma}{D}. \quad (3.59)$$

Mas note que agora temos uma interpretação física para q , o que não tínhamos antes. Atraves deste modelo de interação dependente da distancia entre individuos percebemos que este parametro está relacionado com o decaimento da interação entre cada par de celulas. O resultado acima se mostra importante no sentido de que ele apresenta apenas grandezas macroscópicas, embora tenha sido obtido por premissas microscópicas. Em outras palavras, o comportamento global emerge das interações locais entre as células que constituem a população. O grande mérito deste modelo microscópico é que ele explica, por primeiros princípios, todos os modelos fenomenologicos introduzidos no começo deste capítulo.

Casos Limites: Modelos de Verhulst e Gompertz

Como vimos na seção anterior, o modelo generalizado (3.35) (e consequentemente o modelo de Bertalanfy (3.39)) tem como casos particulares o modelo de Gompertz e o modelo de Verhulst. No modelo microscópico, quando a dinâmica acontece com um fator de interação $\gamma = 0$, o que significa que a intensidade de interação entre as células independe da distância, temos uma dinâmica dada pelo modelo de Verhulst. De acordo com (3.59) temos, nesse caso, $q = 1$. Dessa forma, o modelo de Verhulst pode ser interpretado como uma aproximação de campo médio para a dinâmica populacional. Para esse caso limite, a partir de (??), o modelo (??) de (??) e (3.58) temos uma taxa de crescimento $k_0 = \langle G \rangle - J\rho_D/D$, e capacidade de carregamento $K = -\rho\langle G \rangle/(JD)$.

O modelo de Gompertz emerge quando $\gamma \rightarrow D$ ($q \rightarrow 0$). Tomando esse limite em (??), (??) e (3.58), a população deve crescer com taxa de crescimento $k_0 = -J\rho_D/D$, e a capacidade de carregamento $K = (\rho_D/D)e^{-\frac{D\langle G \rangle}{J\rho_D}}$.

3.7 Aplicações ao Crescimento Populacional Humano

Frequentemente escutamos que a população humana está crescendo exponencialmente. De certa forma esta informação procede, mas não tecnicamente falando. O gráfico com os dados da população humana estão apresentados na figura ?? Note que realmente a população humana cresce vertiginosamente. No entanto, tecnicamente, a função exponencial, dada pelo modelo de malthus ?? não ajusta bem para descrever estes dados empíricos. Na verdade, como já foi apontado por (?) uma boa função para descrever o crescimento populacional humano é o exponencial generalizado 6.5, como pode ser verificado nesta mesma figura.

Na verdade, uma população que cresce com um exponencial generalizado decorre do mesmo modelo generalizado que discutimos nas seções anteriores. Note que no modelo ?? se tomarmos o limite $b \rightarrow 0^+$, o que implica

$$\frac{dN}{dt} = aN^b \tag{3.60}$$

temos um modelo com solução

$$N(t) = N_0 e_q(k_q t) \tag{3.61}$$

onde

Antes de procedermos, vamos analisar de que

Apendice: Funções Logaritmo e Exponencial Generalizados

A função logaritmo $\ln(x)$ pode ser entendida, entre outras interpretações, como a área abaixo da função hiperbole $f(t) = 1/t$, dada pela integração

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \tag{3.62}$$

Podemos usar essa ideia para construir uma função logaritmo generalizada, de tal forma que a função logaritmo usual seja apenas um caso particular. Vamos então definir a função *logaritmo generalizado* como a área abaixo da hipérbole não simétrica $f_{\tilde{q}}(t) = 1/t^{1-\tilde{q}}$ no intervalo $t \in [1, x]$, de forma que

$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\tilde{q}}} = \begin{cases} \frac{x^{\tilde{q}}-1}{\tilde{q}} & \text{para } \tilde{q} \neq 0 \\ \ln(x) & \text{para } \tilde{q} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Essa função é, portanto, uma generalização, através da introdução do parâmetro \tilde{q} , da função logaritmo natural. Afinal, ela recupera a função logaritmo no limite $\tilde{q} \rightarrow 0$ ⁵, isto é

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} \ln_{\tilde{q}}(x) = \ln(x). \tag{3.63}$$

A figura (3.9) apresenta o gráfico de $\ln_{\tilde{q}}(x)$ para vários valores de q .

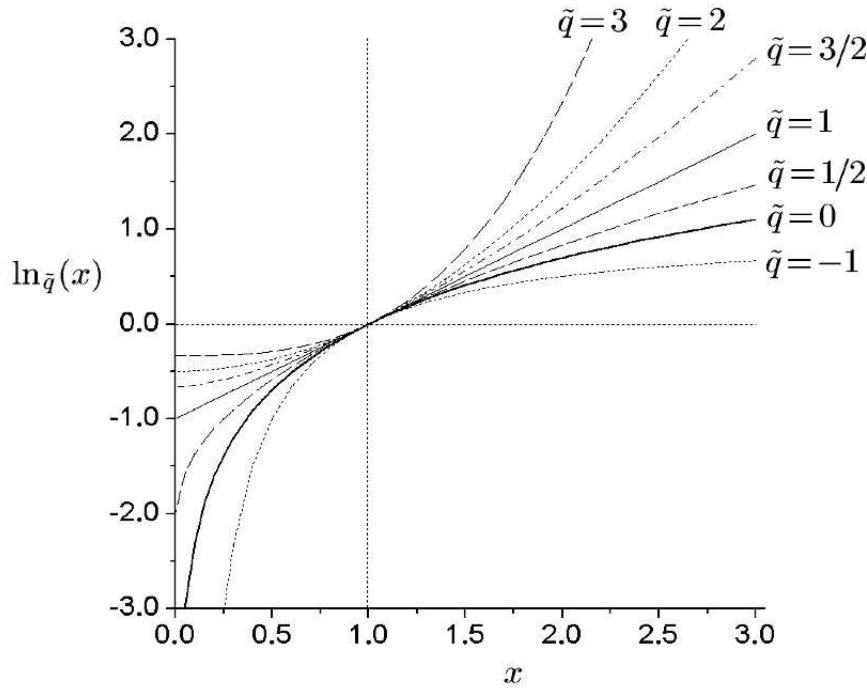


Figura 3.9: Gráfico da função logaritmo generalizada $\ln_{\tilde{q}}(x)$ em função de x para vários valores de q .

A função inversa da função logaritmo generalizada é a função *exponencial generalizada*

$$e_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} (1 + \tilde{q}' x)^{\frac{1}{\tilde{q}'}} & , \text{ se } \tilde{q}x > -1; \\ 0 & , \text{ de outra forma.} \end{cases} \tag{3.64}$$

⁵Note que $\ln_{\tilde{q}}(x)$ descrito a partir da equação (??) não significa “logaritmo de x na base \tilde{q} ”; neste caso usaríamos a notação $\log_{\tilde{q}}(x)$.

Para $\tilde{q} = 0$, recupera-se a função exponencial: $e_0(x) = e^x$.

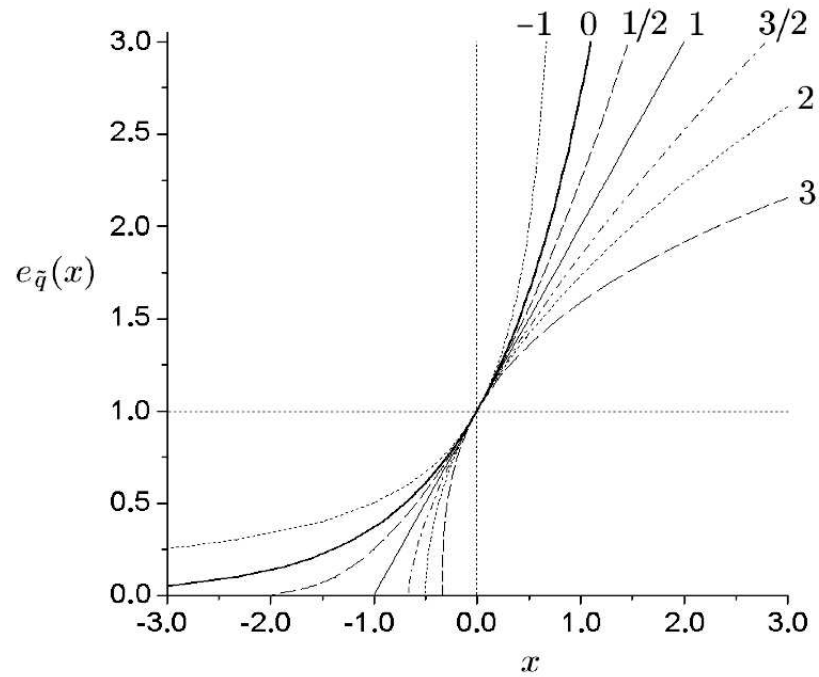


Figura 3.10: Gráfico da função exponencial generalizado $e_0(x)$ em função de x para vários valores de q .

Essas funções generalizadas têm se mostrado importantes pois permitem um fácil manuseio algébrico de expressões, bem como recuperar casos particulares (?).

Apendice: Outros Modelos Generalizados

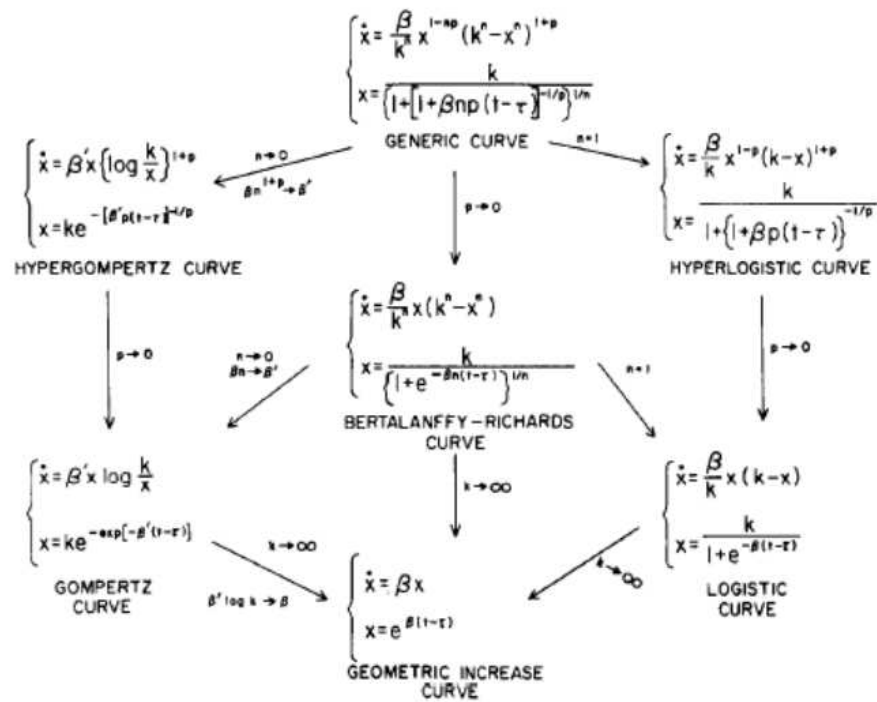


Figura 04: Modelos de crescimento e suas relações.

Figura 3.11: sdsasdasdsda .

Referências Bibliográficas

Referências do Capítulo

- [Boccaro 2004] N Boccaro. *Modelling Complex Systems*. Springer 2004.
- [Ferrara & Prado 1995] Nelson Fiedler-Ferrara; Carmen P. Cintra do Prado. *Caos: uma Introdução*. Editora Edgard Blucher Ltda (1995).
- [Jorgensen 2011] S.E. Jorgensen. *Fundamentals of Ecological Modelling, Volume 21, Fourth Edition: Applications in Environmental Management and Research (Developments in Environmental Modelling)*. Elsevier; 4 edition (February 1, 2011).
- [Edelstein-Keshet 1988] Leah Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York, NY, 1988. ISBN 0-89871-554-7.
- [Murray 2007] James Dickson Murray. *Mathematical Biology I: an introduction*. Springer; 3rd edition (December 8, 2007).
- [Malthus 1798] Malthus, T. R.. *An Essay on the Principle of Population as It Affects the Future Improvement of Society*. J. Johnson, London, 1798.
- [Strzalka et al 2008] Strzalka, Dominik; Grabowski, Franciszek. *Towards possible q-generalizations of the Malthus and Verhulst growth models*. Physica A, Volume 387, Issue 11, p. 2511-2518 (2008).
- [Verhulst 1845] Verhulst, P.F., *Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population*. Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles 18 (1845) 1-38.
- [Verhulst 1947] Verhulst, P.F.. *Deuxieme memoire sur la loi d'accroissement de la population*. Nouveaux memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles, 20 (1847) 1-32.
- [Gompertz 1825] Gompertz, R.. *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*. Philos. Trans. R. Soc. London, 115 (1825) 513-585.
- [Richards 1959] . Richards F., J. Exp. Bot., 10 (1959) 290.
- [Mombach et al 2002] J. C. M. Mombach, N. Lemke, B. E. J. Bodmann and M. A. P. Idiart. *A mean-field theory of cellular growth*. Europhys. Lett., 59 (6), pp. 923-928 (2002).

Neste capítulo vamos estudar uma característica exibida por certos sistemas complexos: as leis de potência. Leis de potencia, que será melhor definida logo a seguir, são comportamentos emergentes das interações entre as unidades de um sistema.

Um sistema exibe uma “lei de potencia” quando este apresenta algum comportamento macroscópico descrito por uma equação do tipo

$$y = ax^\beta, \tag{4.1}$$

onde a e β são constantes, enquanto y e x são variáveis (dependente e independente, respectivamente) associadas a este sistema. Em sistemas complexos, leis de potência emergem como consequência das interações entre as unidades do sistema.

Uma característica importante de um sistema descrito pela equação (4.1), é que este apresenta propriedades livres de escala, i.e. propriedades que se manifestam da mesma maneira em diferentes escalas. Nesse sentido, se ele apresenta variáveis que obedecem a forma (4.1), essas variáveis terão as mesmas propriedades tanto numa escala microscópica, quanto numa escala macroscópica. Logo a seguir vamos colocar essas informações de uma forma mais detalhada.

4.1 A Equação da Lei de Potência e Propriedades Livres de Escala

Para começarmos a estudar as leis de potência, vamos considerar inicialmente um caso particular da equação (4.1), digamos a hipérbole $y(x) = x^{-1}$ (i.e. $a = 1$ e $\beta = -1$). A figura (4.1) apresenta gráficos dessa função em três escalas distintas. Note que, independentemente da escala (se 0 a 100, 0 a 10.000, ou 0 a 100.000), todos os gráficos apresentam o mesmo aspecto. Neste sentido, se apagarmos os números dos eixos, seria impossível dizer em qual escala estamos analisando esta função. Desta forma, a função hipérbole é dita *livre de escala*.

Mas claro, esta propriedade não é exclusiva da função hipérbole, mas sim de todas as funções com a forma da equação (4.1). Outro exemplo é a função raiz quadrada $y(x) = \sqrt{x}$ (i.e. $a = 1$ e

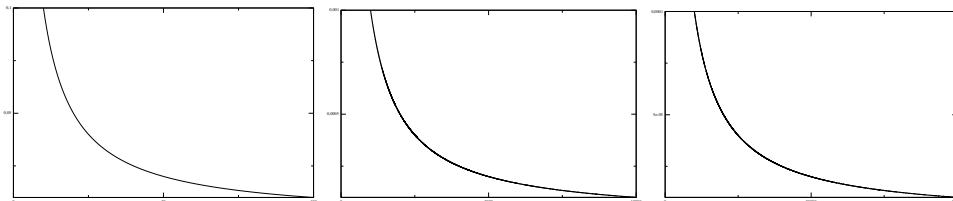


Figura 4.1: as asas asa sa ssa

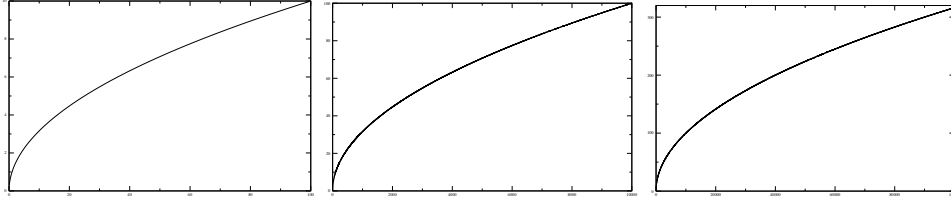


Figura 4.2: asasas asa sa ssa

Figura 4.3: asasas asa sa ssa

$\beta = 1/2$). Os gráficos desta função em três escalas distintas estão apresentadas na figura (4.2). Mais uma vez temos o mesmo aspecto do gráfico em três escalas distintas.

Em suma, podemos dizer que sistemas que apresentam comportamento descritos pela equação (4.1) apresentam propriedades livres de escala. Ou seja, apresentam propriedades semelhantes, seja numa escala microscópica, seja numa escala macroscópica. Aqui microscópico significa quando se olha para o sistema numa escala menor (por exemplo, o gráfico de 0 a 100). Enquanto que macroscópico quando se olha para o sistema numa escala maior (por exemplo, o gráfico de 0 a 100.000).

4.2 Gráfico Log-Log

Uma forma conveniente de analisar estas funções livres de escala é plotá-las não em uma escala linear, mas sim numa escala logaritma. Isso se mostra conveniente, como será evidenciado logo a seguir, facilitando a identificação de suas propriedades.

Vamos então extrair o logaritmo dos dois lados da equação (4.1), o que nos leva a

$$\log y = \beta \log x + \log a. \quad (4.2)$$

Chamando $Y \equiv \log y$, $X \equiv \log x$, e $c \equiv \log a$, temos a equação linear

$$Y = \beta X + c, \quad (4.3)$$

com coeficiente linear c e coeficiente angular β . Dessa forma, ao fazermos o gráfico de Y em função de X teremos uma reta, como pode ser visto na figura (4.3), que apresenta gráficos *log-log*. Nesta figura temos o gráfico da hipérbole ($\beta = -1$) e da raiz quadrada ($\beta = 1/2$). Como estas duas funções são casos particulares da equação (4.1), elas duas apresentam a forma de uma reta, e na verdade qualquer variação dessas equações, quando fazemos o gráfico log-log.

Este tipo de plotagem (log-log) se mostra bastante conveniente para se verificar se um sistema apresenta propriedade tipo lei de potência. Dessa forma se num gráfico log-log de duas variáveis apresentam uma linha reta, isso implica que temos uma lei de potência entre essas variáveis e portanto comportamentos livre de escala. Nas próximas seções vamos apresentar alguns exemplos de leis de potências encontrados em sistemas naturais.

4.3 Leis de Potencia em textos

Vamos inicialmente ilustrar uma lei de potência num contexto um tanto que inusitado. Tomemos o livro “Ulisses”, de James Joyce. Esse romance irlandês é um intrincado jogo de palavras literário, com diversos trocadilhos e neologismos num total de 260.430 palavras (na versão original em

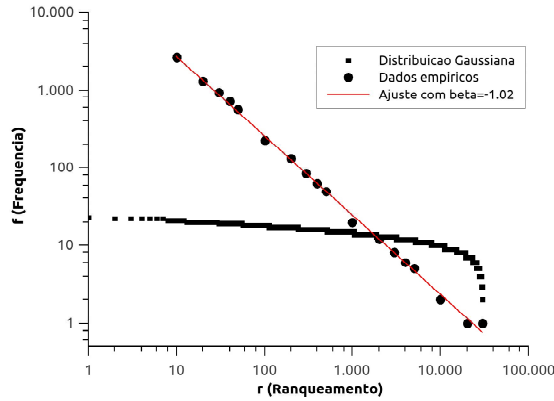


Figura 4.4: Gráfico da frequência f de aparições das palavras do livro *Ulisses*, de James Joyce, em função do seu ranqueamento r . Os dados empíricos são muito bem ajustados pela lei de potência $f \propto r^{-1,02}$, mostrado pela linha tracejada. Para fins de comparação é mostrado um ranqueamento feito a partir de uma distribuição randômica e independente de palavras. Esse caso falha consideravelmente na descrição dos dados empíricos.

inglês). Além disso, considerando que declinações de uma palavra são palavras distintas (e.g. give, gives, são distintas), a obra apresenta um enorme vocabulário de 29.899 palavras.

Um fato interessante surge quando analisamos a frequência de aparição destas palavras no livro. A figura (4.4) apresenta o gráfico log-log da frequência f de aparição de uma palavra em função do seu ranqueamento r , tomando $r = 1$ para a palavra mais frequente; $r = 2$ a segunda mais frequente; $r = 3$ a terceira mais frequente; e assim por diante até $r = 29.895$. Temos aqui uma reta evidente (no gráfico log-log) correlacionando estas duas quantidades. Podemos dizer então que f e r se relacionam por uma lei de potencia tipo $f = ar^\beta$. O valor empírico (obtido por ajuste da reta) é $\beta_{empirico} \approx 1,02$.

Essa lei de potencia observada se mostra bastante surpreendente e nos põe a desconfiar se não seria mais uma provocação feita por Joyce aos seus leitores. No entanto, quando analisamos o montante de outros livros da literatura inglesa ou mesmo de outros idiomas nos deparamos com a mesma propriedade. O que mostra que a lei de potencia observada é um padrão universal dentro da escrita de textos.

Mas quais processos estão envolvidos na escrita de textos que são responsáveis por esta lei de potencia? Para responder esta questão vamos seguir a seguinte linha de pensamento. Suponha, inicialmente, um caso extremamente idealizado, em que consideramos que as palavras são dispostas na construção das palavras de forma completamente aleatória e independente das escolhas anteriores. Quando este é o caso, temos uma situação em que a distribuição das frequência das palavras é dada por uma normal, como apresentado na figura (4.5). Neste caso temos que a maioria das palavras são usadas frequentemente. Há também uma pequena minoria de palavras que nunca são usadas, ou são usadas muito raramente. Ao construir um gráfico da frequência em função do ranqueamento para um sistema de escolha de palavras que obedece a esta distribuição normal, temos um resultado decepcionante em relação à evidencia empírica, como pode ser observado na figura (4.5). A falta de veracidade desse escolha de uma distribuição independente das palavras pode ser entendida pelo seguinte exemplo. Suponha que você vai começar a escrever um texto (ou um livro). Antes de você escrever qualquer palavra, você tem uma folha em branco diante de você. Neste momento, você pode escrever qualquer coisa, colocar qualquer palavra. A partir do momento que você escreve uma palavra, por exemplo o artigo “a”, um grupo enorme de palavras candidatas foram simplesmente eliminadas. Como este é um artigo feminino, a segunda palavra não pode ser masculino. Dessa forma, embora a primeira palavra poderia ter sido escolhida de forma relativamente aleatória (poderia ter usado qualquer palavra do montante das

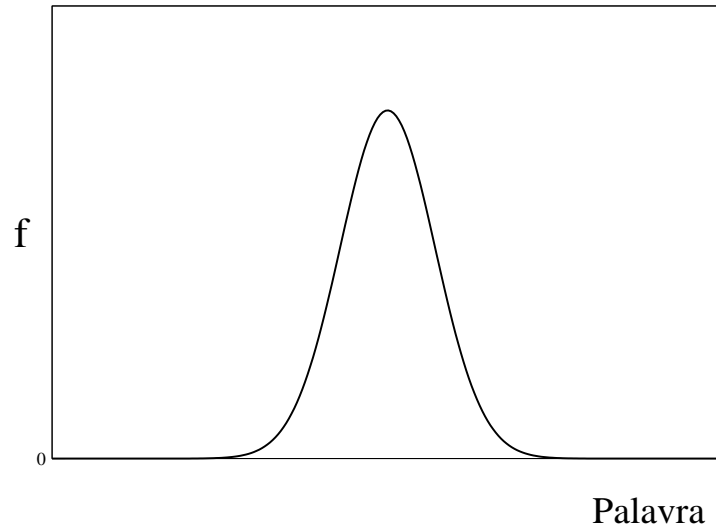


Figura 4.5: Caso idealizado em que a distribuição da frequência das palavras é uma normal (gaussiana). Este é o caso quando a escolha das palavras que irão compor as frases é feita de forma independente das escolhas anteriores.

palavras possíveis), a segunda é escolhida satisfazendo um vínculo em relação à primeira palavra (de ser masculina). Dessa forma a segunda palavra está totalmente vinculada à primeira. E assim acontece com a terceira em relação à segunda palavra, e assim por diante. Temos então que as palavras não são escolhidas de forma independente, e portanto a hipótese da distribuição normal das palavras não deve valer.

Na verdade esta lei de potencia surge como resultado dessa forte interação interação de palavras. Na verdade, vamos apresentar a seguir outros exemplos de leis de potencia que são observados apenas em sistemas que apresentam certos tipos de interação entre suas unidades.

Temos aqui um exemplo de sistema complexo, uma vez que os textos são formados por um numero grande de unidades - as palavras - que estão fortemente conectadas. Uma vez que desta conexão emerge também um comportamento macroscópico emergente, que é a própria lei de potencia entre frequência e o ranqueamento das palavras. Dessas forma em outros sistemas complexos que vamos analisar ao longo dos proximas seções, a lei de potencia será vista como uma característica macroscópica, ou seja, um fenômeno emergente de sistemas complexos.

4.4 Leis de Potência em Terremotos

Os terremotos são exemplos de fenômenos naturais caracterizados por “imprevisíveis”. Num certo sentido, essa informação procede. Não podemos prever, com exatidão, o momento e o local da ocorrência de um terremoto. No entanto, existem padrões na ocorrência dos terremotos. Por exemplo, verifica-se que grandes terremotos são extremamente raros, enquanto que pequenos terremotos são bastante frequentes. O gráfico log-log apresentado na figura (4.6) apresenta o logaritmo do numero ou frequência de terremotos (f) em função do logaritmo da energia (grau de magnitude) (E) dissipado. O gráfico evidencia uma lei de potencia entre essas quantidades. Dessa forma, os terremotos não são exatamente imprevisíveis. Eles apresentam um padrão dada pela lei $f \propto E^\beta$, onde o valor empírico do expoente (determinado a partir dos dados experimentais) é $\beta_{empirico} \approx -1,5$.

Esta lei pode, de certa forma, ajudar na predição de terremotos. Por exemplo, o grande terremoto do Japão de 2012 já era previsto. Mas claro, sabia-se que um grande terremoto estava por vir, mas ainda sim não era possível prever exatamente quando. Da mesma forma que se espera um grande terremoto em Portugal nos próximos anos, similar ao que aconteceu em Lisboa

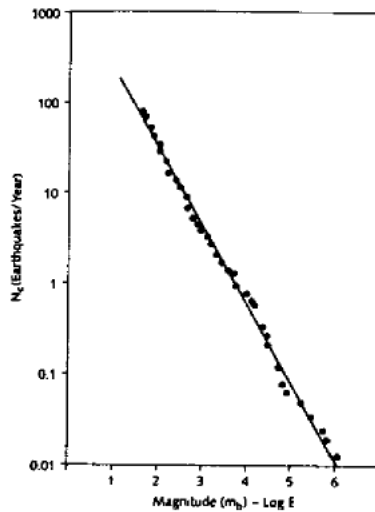


Figura 4.6: Gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo da magnitude (energia) do terremoto. A reta evidencia a lei de potência entre frequência e magnitude de terremotos, com um expoente de aproximadamente -1.5 .

deltaP x tempo

em 1755, com magnitude de 9 pontos na escala Richter e agravada por Tsunamis. Esse terremoto resultou entre 10.000 e 30.000 mortos.

Um fato interessante e que nos dá uma direção para o entendimento a respeito dos terremotos consiste no fato de que esse grande terremoto em Portugal resultou em outras réplicas por mais de 10 anos, com mais de 250 sismos de terra durante os primeiros seis meses. Esta é uma característica de exibir réplicas são comuns a todos os terremotos. Geralmente um grande terremoto vem sucedido de outros terremotos menores. Isso é uma evidência da forte interação entre partes de terra que formam as placas tectônicas. Esse fato permite, mais uma vez, enxergar o problema como um sistema complexo: forte conexão entre as componentes de terras (unidades do sistema) o que resulta num macrocomportamento (as leis de potência) emergente das interações dessas unidades.

4.5 Leis de Potência no Mercado Financeiro

Existe uma quantidade enorme de fenômenos econômicos que apresentam leis de potência. Pareto foi o primeiro economista a encontrar esse tipo de comportamento em economia. Ele percebeu que o número de pessoas $N(R)$ com uma determinada quantidade de riqueza R obedece a uma lei de potência com um expoente negativo, ou seja $N(R) \propto R^{-\beta}$. Essa dependência nos diz que há poucas pessoas ricas (com R muito grande) e muitas pessoas pobres (com R muito pequeno).

Outra quantidade econômica que obedece a uma lei de potência é a variação dos preços. Na figura abaixo encontra-se a série temporal (mensal) da variação de preços (ΔP) do algodão.

Olhando ingenuamente para o gráfico, nos parece que estas variações de preço seguem um caminho errático, independente de sua história passada. No entanto, ao se fazer um gráfico log-log da frequência $f(\Delta P)$ de vezes (ou de meses) em que esta variação excedem uma certa fração ΔP em função do próprio tamanho desta fração, então teremos uma lei de potência, como pode ser visto pela figura ???

Esse comportamento é observado de forma similar em diversos outros commodities, o que sugere

log-log

colocar figura

um comportamento universal na dinamica da variação dos preços.

Os economistas ortodoxos postulam que as flutuações no mercado de ações são independentes o que leva a uma previsão de distribuição gaussiana da variação de preços. Este é o caso do modelo de Black e Sholes (premio nobel de 1997) e a teoria CAPM (Capital Asset Pricing Model) (premio Nobel de 1990). Além do mais, a hipótese do mercado eficiente, que diz que o mercado possui um mecanismo autocorretor que remove as correlações das flutuações. Este mecanismo (teórico) dá suporte à suposição de que as flutuações dos preços não estão correlacionados. No entanto, não é o que sugerem os dados experimentais apresentados nas figuras acima. Em analogia ao que discutimos anteriormente, no caso das palavras de um texto e dos terremotos, este comportamento empirico de lei de potencia sugere uma forte correlacao entre as variações de preços. Note no grafico da figura ?? que a hipótese gaussiana (independencia nas variações dos preços), assim como no caso da escolha independente das palavras de um texto, não se aplica bem aos dados. Na verdade, de forma analoga aos contexto dos terremotos, uma grande alteração nos preços (ΔP muito grande) leva a outras variações de preço. O que leva a dependencia dessas variações e a consequente emergencia da lei de potencia.

4.6 Leis de Potência em Sistemas Biológicos

Também encontramos uma série de fenomenos biológicos que exibem leis de potencia. Para exemplificar isso, considere a série temporal apresentada na figura ???, que apresenta a porcentagem de espécies extintas em função do tempo geológico. Assim como os terremotos ou a variação dos preços, temos uma grande frequencia de pequenas extinções (i.e. extinção de poucas espécies) e uma baixa frequencia de grandes extinções (i.e. extinção de muitas espécies).

A partir deste grafico note que a extinção dos dinossauros foi um evento relativamente brando se comparado com outras extinções.

Assim como fizemos nos outros contextos apresentados nas seções anteriores, vamos fazer o grafico log-log da frequencia f de acontecimento de extinções de magnitude E . E grande significa muitas especies extintas; E pequeno poucas especies extintas. Note o comportamento de lei de potencia entre essas duas quantidades.

Esta evidencia empirica nos diz, de forma análoga ao descrito nas seções anteriores, que as especies não se extinguem aleatoriamente. Ou melhor, nos diz o óbvio: as espécies não vivem de forma independente uma das outras. Quando uma especie se extingue, uma série de outras espécies, dependente dessa primeira, também acabam se extinguindo. Extinções com poucas espécies acontecem o tempo todo. No entanto, algumas vezes, espécies extremamente conectadas, com uma rede de dependencia muito forte, se extingue, levando junto à extinção um numero grande de outras espécies.

Esses dados biológicos nos mostram mais uma vez como essas leis de potencia são comportamentos macroscopicos que acontecem como consequencia de sistemas cujas unidades (nesse caso, as especies biológicas) estão fortemente conectadas.

4.7 Leis de Potência em Fenômenos Sociais

Outro contexto bastante povoado pelas leis de potencia é o que diz respeito a interações sociais humanas. Exemplos de leis de potencia em sociologia são encontrados em conflitos, padrões culturais, entre outros.

colocar figura

COLOCAR GRÁFICO

COLOCAR GRÁFICO

Uma lei de potencia em sociologia que merece destaque é o que se refere a frequência de conflitos. O gráfico abaixo diz respeito a frequência $f(x)$ de ocorrência de insurgências de tamanho x . x pode ser medido, por exemplo, como o número de feridos em um ataque num contexto de insurgência. Temos aqui dados experimentais de insurgências de vários países distintos. Mais especificamente Afeganistão, Iraque, Colômbia e Peru. Note a lei de potencia (reta no gráfico log-log) que emerge deste contexto.

Mais uma vez temos uma situação análoga do que acontece em terremotos. Uma grade insurgência vem sempre, de acordo com as evidencias, sucedida de varias outras insurgências menores, e que eleva a correlação entre diferentes eventos. Esta ligação entre eventos grandes e pequenos, de forma análoga aos terremotos, dá origem a essa lei de potencia.

Uma característica interessante deste contexto de insurgência diz respeito ao expoente da lei de potencia. A figura abaixo mostra o valor empírico deste expoente para insurgências em diferentes locais e épocas. Note que o valor 2.5 para este expoente é bastante significativo. Isso evidencia que independentemente do local ou época do contexto, há um padrão comum a todas as insurgências, evidenciado pelo compartilhamento de um valor comum para o expoente de lei de potencia.

Vamos verificar nos próximos capítulos que embora tenhamos diferentes tipos de sistemas complexos, algumas variáveis desse sistema, como por exemplo o expoente de lei de potencia, apresenta características universais em certas classes de sistemas. No caso de fenômenos de insurgências, temos uma situação que cai nesta situação de universalidade.

4.8 Conclusões

Foram apresentados nesse capitulo uma serie de exemplos de leis de potencia em diferentes contextos. O que percebemos de comum nesses sistemas apresentados, embora distintos, é o fato de ser formado por certa quantidade de entidades fortemente correlacionadas ou interagentes. E é justamente como consequencia dessa interação que surgem as leis de potencia, sendo essa um comportamento macroscopico emergente.

vale ressaltar que na ausencia de interassão entre essas unidades teremos um comportamento randomico que levaria a uma distribuicao gaussiana das das variaveis. E como foi colocado anteriormente, essa consideracao, de variaveis sendo escolhidas aleatoriamente a partir de uma gaussiana, falaha miseravelmente em descrever os resultados experimentais. Portanto, considerar que as unidades apresentam interação é impressindivel para explicarmos o comportamento emergente desses sistemas apresentados.

Os exemplos apresentados são casos de sistemas complexos, uma vez que satizfazem os itens colocados no capitulo anterior.

Estamos lindando então com

Capítulo 5

Modelagem de Sistemas Biológicos: Lei Halométrica

Neste capítulo, para ilustrar a ideia de modelagem matemática, vamos introduzir um modelo teórico para explicar o crescimento corporal de animais. Este tipo de crescimento é conhecido por *crescimento halométrico*. Estamos interessados aqui em entender o processo de crescimento de um animal, desde o seu nascimento até a sua fase adulta e se haveriam leis universais que regem todo tipo de organismo. Primeiramente vamos apresentar um modelo baseado na dissipação de calor do animal para o meio. Esse modelo, apesar de ser fisicamente plausível, leva a resultados que são incompatíveis com evidências experimentais. Ou seja, esse modelo vai ilustrar o destino da grande maioria dos modelos: nascer condenado ao fracasso. Logo em seguida vamos introduzir um outro modelo, desenvolvido por Geoffrey West e seus colaboradores (do Santa Fé Institute) que parte de duas ideias bastante sugestivas. A primeira, é a de que a rede de fornecimento de nutrientes para as células de um organismo, i.e. o sistema circulatório, obedece a um padrão fractal. A segunda é que a natureza, como um todo, obedece a um processo de minimização do gasto de energia via seleção natural. Vamos mostrar que esse modelo apresenta evidências empíricas a seu favor.

5.1 Modelo de Dissipação de Calor

Os animais menores apresentam metabolismos mais rápidos que os maiores. Isso fica evidente quando comparamos o ritmo cardíaco de um hamster em relação ao nosso ritmo cardíaco: o roedor apresenta uma frequência de batimentos cardíacos bem mais alta. A frequência cardíaca, como veremos em maiores detalhes a seguir, está intimamente relacionada com a taxa metabólica do organismo.

A taxa metabólica é a taxa com que o organismo transforma a energia proveniente dos nutrientes em outra forma de energia, a qual será usada nas funções vitais. Além disso, de acordo com as leis da termodinâmica, processos como esse, que converte energia de uma forma para uma outra, sempre deve liberar calor. Um organismo deve liberar esse calor na mesma taxa em que ele processa a energia metabólica. Nesse sentido, calor pode ser entendido como o substrato dessa transformação energética. Inclusive, uma das formas de se medir a taxa metabólica de um organismo endotérmico é medindo a própria taxa de liberação de calor desse organismo. Portanto, a taxa metabólica de um organismo pode ser inferida pela sua produção de calor.

O rato e o elefante

Para começarmos a entender as consequências desse processo de produção de calor pela transformação de energia, vamos considerar dois animais de tamanhos bem diferentes, por exemplo o rato e o elefante. Enquanto um rato apresenta uma massa em torno de 2g, o elefante apresenta uma massa da ordem de 2.000.000g (duas toneladas). Ou seja, duas espécies com uma diferença de 10^6 ordens de magnitude da massa.

Poderíamos intuir, ingenuamente, que o elefante gastaria 10^6 vezes mais energia que um rato. Até aqui tudo bem, mas o problema é que a consequência desse raciocínio é que, como a taxa

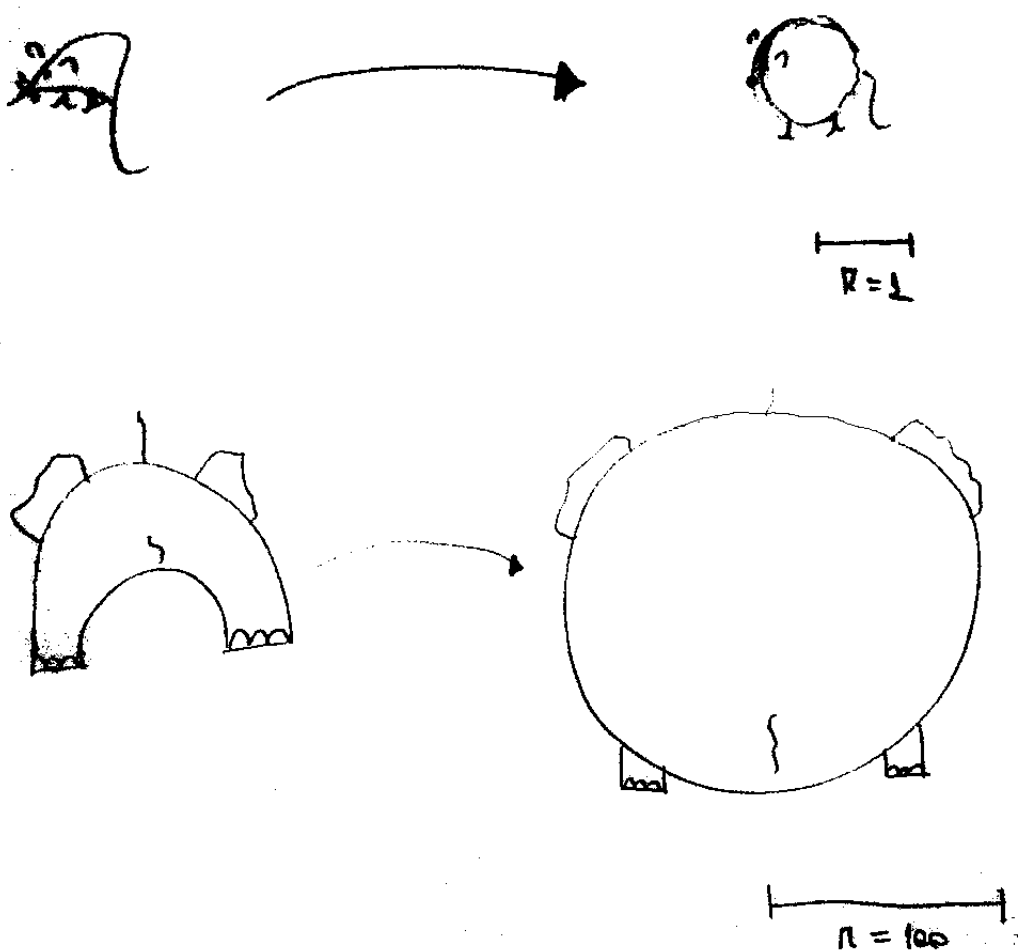


Figura 5.1: Aproximação grosseira do rato e do elefante como esferas. Esta aproximação vai nos permitir calcular facilmente o volume ($4/3\pi r^3$) e a área da superfície ($4\pi r^2$) destes “modelos”.

metabólica está relacionada com a produção de calor, então o elefante também deveria gerar 10^6 vezes mais calor que o rato. Para que o elefante não morra carbonizado é preciso então que ele consiga eliminar todo o excesso de calor. De fato, o elefante apresenta uma grande superfície de contato com o mundo externo (bem maior que a do rato) que o permite dissipar o calor produzido. A pergunta que temos que responder então é, seria o tamanho dessa superfície suficiente para dissipar o calor gerado na produção de energia metabólica?

Para tentar responder a essa questão, vamos considerar um modelo bem simples para a superfície de contato desses animais. Vamos considerar (grosseiramente) que tanto o elefante quanto o rato são perfeitamente esféricos, como o esquema da figura (5.1).

Com essa aproximação fica bem mais fácil determinar o volume V e a área de contato com o meio externo A destes animais a partir desses “modelos”, sem perdas de generalidades. Essas quantidades se relacionam com uma medida linear, que seja o raio r , pela forma

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \sim r^3 \quad (5.1)$$

	Rato	Elefante
r	1	100
A	~ 1	~ 10.000
V	~ 1	$\sim 1.000.000$
M	~ 1	$\sim V$

Tabela 5.1: Tabela com valores relativos e ratos e elefantes.

e

$$A = 4\pi r^2 \sim r^2. \quad (5.2)$$

Essas quantidades são importantes para determinarmos outras quantidades interessantes do animal. Por exemplo, a partir do volume teremos uma estimativa da massa. Afinal, a massa M do animal deve ser proporcional ao volume, o que implica

$$M \sim r^3. \quad (5.3)$$

Vamos considerar também que o raio da esfera do rato tenha 1 unidade de medida, ou seja $r = 1$. Nesse sentido, para que o volume do elefante seja 10^6 vezes maior que o do rato, o raio do elefante deve ser da ordem de $r = 100$. É claro, esses valores são especulativos e estamos interessados apenas na ordem de grandeza desses números. A ausência de detalhes e de precisão não deve comprometer a análise qualitativa que estamos interessados. Com essas informações podemos montar a tabela (5.1) com os valores relativos a ratos e elefantes.

A massa do animal deve ser proporcional ao volume, e dessa forma a massa do elefante, assim como o seu volume, deve ser 10^6 vezes maior que a massa do rato. No entanto, a área da superfície esférica do elefante é “apenas” 10^4 vezes maior que a área da superfície esférica do rato. Com estes dados podemos concluir que a área da superfície “cresce” muito mais lentamente do que o volume. Isso implica que animais maiores possuem superfícies relativamente menores em relação à massa. Note que a partir das equações (5.1), (5.2) e (5.3) chegamos a

$$A \sim m^{\frac{2}{3}}, \quad (5.4)$$

o que significa que a área da superfície se relaciona com a massa do animal por uma forma *sub-linear*, isto é, o expoente da lei de potência é menor que 1. Isso significa que a área da superfície de contato é maior para animais maiores, mas é relativamente menor, em comparação com a massa, se comparado com a superfície de contato de animais menores.

Esse resultado leva a concluir que o modelo da dissipação de calor leva a um absurdo. O elefante gera 10^6 vezes mais calor que o rato, mas irradia esse calor numa superfície de contato de apenas 10^4 vezes maior que a do rato. Dessa forma, se a hipótese de dissipação de calor estivesse correta, o elefante seria totalmente carbonizado por ter uma superfície de contato muito menor do que o necessário para dissipar toda a quantidade de calor produzida.

Na verdade, o raciocínio colocado nessa seção não vale justamente por que estamos considerando que a taxa metabólica dos animais é diretamente proporcional à massa corporal, o que não é verdade. Veremos isso com mais detalhes na próxima seção.

5.2 O modelo de Rubner

No final do Séc. 19, Max Rubner postulou que os organismos vivos, por seleção natural, evoluíram para um estado em que a massa corpórea deveria seguir uma lei de escala com a superfície, e assim poder irradiar o calor em excesso que se gera na produção de energia metabólica.

Para entender a ideia de Rubner, considere o seguinte gráfico esquemático (5.2), que segue o princípio da conservação de energia e a segunda lei da termodinâmica. A *energia* (E) proveniente

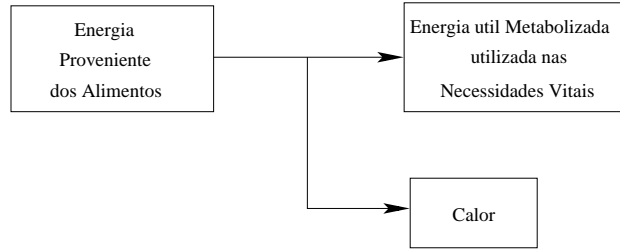


Figura 5.2: Esquema da transformação energética nos organismos.

dos alimentos ou de qualquer outra fonte, é transformada, no processo metabólico, em: *energia útil* (B), ou seja, a energia que será utilizada nas necessidades vitais do organismo; *calor* (Q), que deve ser dissipado de alguma forma pelo organismo. Pelo princípio da conservação da energia, vale $E = B + Q$.

Rubner considerou, por hipótese, que estas três quantidades (E , B e Q) escalam com a mesma forma com a massa, ou seja

$$E \sim m^\beta, \quad (5.5)$$

$$B \sim m^\beta, \quad (5.6)$$

e

$$Q \sim m^\beta, \quad (5.7)$$

onde β é o expoente de escala. No modelo que consideramos na seção anterior, tínhamos como hipótese que a energia metabólica era proporcional a massa do organismo, ou seja $B \sim M$. Ou melhor, usando a ideia colocada nesta seção, que $\beta = 1$.

No entanto, para que não tenhamos o problema de carbonizar os animais maiores, o calor deve ser devidamente dissipado. Vamos considerar que o calor Q é composto por duas partes: o calor dissipado Q_{diss} e o calor retido Q_{ret} pelo organismo, valendo a relação de conservação $Q = Q_{diss} + Q_{ret}$. O calor dissipado deve depender da superfície de contato do organismo, ou seja, $Q_{diss} \sim A$. Vamos olhar para a razão Q_{diss}/Q que servirá de parâmetro para medir a eficiência do organismo em dissipar calor. Essa razão apresenta como casos particulares:

$$\frac{Q_{diss}}{Q} = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \text{todo calor produzido é dissipado;} \\ 0 & \Rightarrow \text{todo calor produzido é retido (superaquecimento).} \end{cases}$$

Como $A \sim M^{\frac{2}{3}}$ e, por hipótese, $Q \sim M^\beta$, então

$$\frac{Q_{diss}}{Q} = M^{\frac{2}{3}-\beta}. \quad (5.8)$$

No modelo proposto na seção anterior, em que $\beta = 1$, temos que $\frac{Q_{diss}}{Q} \sim M^{-\frac{1}{3}}$, o que significa que o calor dissipado vai a zero para M grande (veja gráfico (5.3)). Isso provocaria o superaquecimento nos animais maiores, conforme já foi abordado. No entanto, como propôs Rubner, se $\beta = \frac{2}{3}$ então $\frac{Q_{diss}}{Q} \sim m^0 = 1$. Ou seja, esta razão não depende mais da massa. Dessa forma o indivíduo não deve sofrer de superaquecimento se tiver uma massa muito grande.

Essa teoria de Rubner, conhecida por *hipótese da superfície*, parece ser bastante coerente e foi aceita por 50 anos. O único problema (mas fatal!) dessa teoria é que o expoente halométrico previsto por ela ($\beta = 2/3$) não parece obedecer aos dados experimentais, como verificou Max Kleiber em 1930. Segundo os dados analisados por Kleiber o valor experimental do expoente halométrico é de

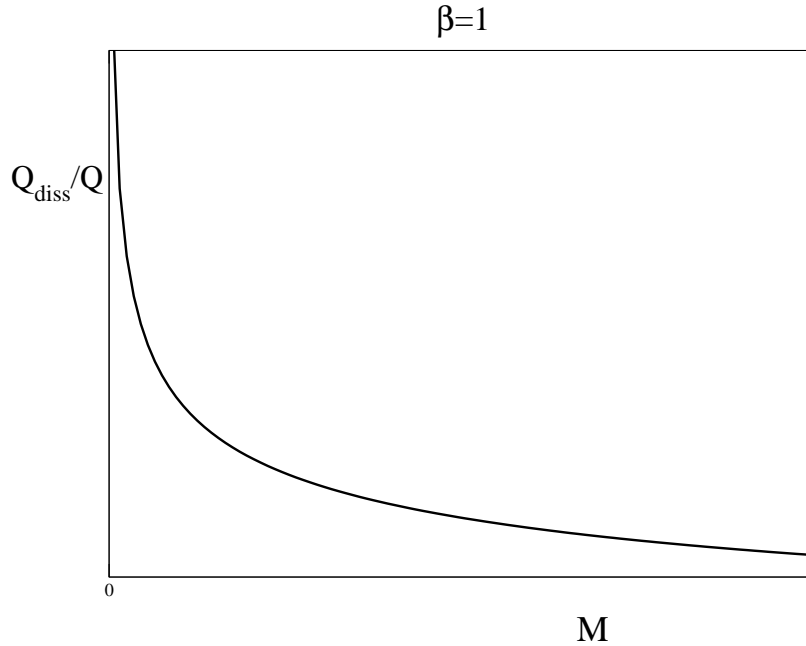


Figura 5.3: Gráfico da razão Q_{diss}/Q em função da massa para $\beta = 1$. O calor dissipado vai a zero para M grande, o que provocaria um superaquecimento nos animais maiores.

$$\beta_{exp} \approx 0.74 \approx 3/4, \quad (5.9)$$

diferindo da previsão dada pela hipótese da superfície. Vamos olhar com mais detalhes a esses dados experimentais na seção a seguir.

5.3 Lei halométrica da taxa metabólica e da massa corpórea

A taxa metabólica de um organismo consiste no valor médio da energia usada por este organismo, num dado período de tempo, para realizar suas necessidades vitais. Esta energia usada pelas células do organismo é obtida a partir dos alimentos, água, ar, luz, etc.. A figura abaixo apresenta um gráfico, numa escala log-log, de valor experimentais da *taxa metabólica corpórea* B , que é a quantidade de energia gerada por um animal ou organismo num certo intervalo de tempo, em função da massa deste mesmo animal. Note uma lei de potência memorável, que abrange pelo menos 18 ordens de grandeza, que vai dos seres unicelulares (10^{-12} gramas) até os mamíferos (10^{-6} gramas). Esses dados nos mostram que não importa toda a complexidade particular das espécies, da evolução biológica, etc., todos os animais obedecem a mesma regra, que relaciona a taxa metabólica e sua massa. Note que, apesar de que o coeficiente linear da reta (na escala log-log) seja diferentes para classes diferentes de organismos, a inclinação da reta, ou seja, o expoente β da lei de potencia, é sempre o mesmo, independente da escala. Os resultados experimentais e estudos estatísticos preveem o coeficiente angular empírico β_{exp} da lei halométrica entre energia metabólica e massa corporal como

$$\beta_{exp} = \frac{3}{4}. \quad (5.10)$$

É interessante observarmos que $\beta_{exp} < 1$, o que leva a um comportamento sub-linear entre taxa metabólica e massa corporal.

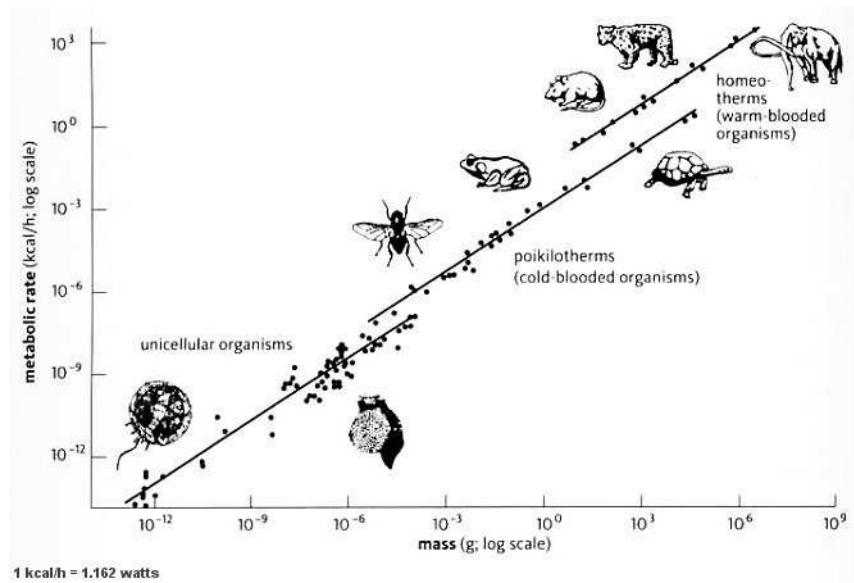


Figura 5.4: Taxa metabólica em função da massa corporal, abrangendo desde seres unicelulares (10⁻¹²gramas) até os mamíferos (10⁻⁶gramas). Observa-se uma lei de potência (válida por 18 ordens de grandeza) do tipo $B \sim M^\beta$, onde $\beta \approx 3/4$. Apesar de que o coeficiente linear da reta (na escala log-log) seja diferentes para classes diferentes de organismos, a inclinação da reta, ou seja, o expoente β da lei de potência, é sempre o mesmo, independente da escala.

Podemos então dizer que a energia metabólica escala com a massa corporal do organismo pela lei de potência $B \propto M^{3/4}$. Este valor empírico foi sugerido pela primeira vez por Kleiber (1932) e foi justificado pelo modelo teórico de West e colaboradores, o que será o tópico da próxima seção.

Os dados experimentais sugerem que os animais são mais eficientes - em termos de aproveitamento de energia - do que prevê a geometria. Isso fica evidente quando olhamos para o gráfico da figura (5.5), que apresenta a taxa metabólica em função da massa para valores distintos de β . Dado um certo valor de massa, haverá sempre maior produção de energia quando $\beta = 3/4$ do que quando $\beta = 2/3$ (curva da primeira está sempre acima da segunda, como pode ser visualizado pela figura).

Existem outras leis de potência relacionadas com a massa do organismo. Podemos verificar que essas leis se relacionam sempre com a massa a partir de um expoente múltiplo de 1/4. Algumas quantidades biológicas, como veremos a seguir, seguem uma lei de potência do tipo

$$x \propto M^b \tag{5.11}$$

onde x é uma certa quantidade biológica, M a massa do organismo e b o expoente da lei de potência, geralmente, como verificaremos, múltiplo de 1/4.

PROCURAR OS DADOS EXPERIMENTAIS (ACHO QUE ESTÃO NAS NOTAS DE AULA DO WEST!!!!)

Concluindo, a teoria de Rubner, embora ser perfeitamente coerente em termos de suas considerações, nos leva a um resultado incompatível com os dados experimentais. E Isso é suficiente para desacreditarmos nessa teoria. Precisamos então de uma outra consideração, uma outra teoria que melhor descreva as evidências empíricas. Na seção seguinte será introduzido uma teoria alternativa, que parte da ideia de redes de distribuição fractal para as células que constituem o organismo. Essa teoria foi desenvolvida por Geoffrey West e seus colaboradores.

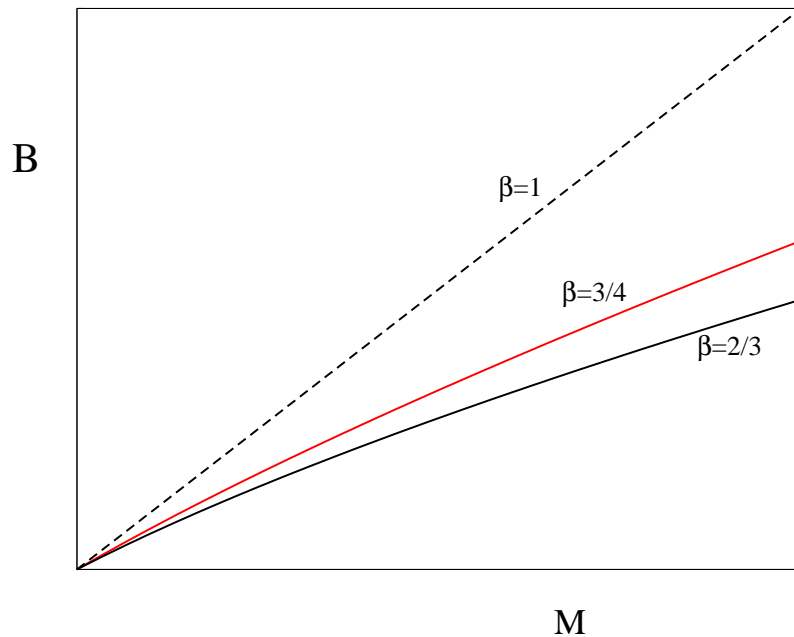


Figura 5.5: Gráfico da taxa metabólica em função da massa corporal pela lei de potência $B \sim M^\beta$ para $\beta = 3/4$ e $\beta = 2/3$. A curva de primeira $\beta = 3/4$ está sempre acima da segunda $\beta = 2/3$ (prevista pela geometria). Isto significa que os animais são mais eficientes - em termos de aproveitamento de energia - do que prevê a geometria.

5.4 Modelo de Rede de Distribuição Fractal

Geoffrey West e seus colaboradores propuserão um modelo baseado na distribuição sanguínea para explicar o expoente $\beta_{exp} = 3/4$. A teoria que eles propuseram parte de três considerações (ou hipóteses) básicas:

1. Rede fractal de distribuição de nutrientes para as células;
2. unidades terminais (e.g. células e capilares) não variam com o tamanho dos organismos;
3. seleção natural e minimização da energia.

Antes de prosseguirmos, vamos analisar com mais cuidado essas hipóteses.

Rede Fractal de distribuição

A rede de distribuição de nutrientes, ou seja, o sistema circulatório, apresenta padrão de ramificação fractal. Isso pode ser observado pela figura (5.6), que descreve o sistema circulatório humano e seu padrão fractal. O sistema circulatório preenche todo o volume do organismo, levando nutrientes a cada uma de suas células.

Unidades Terminais Invariantes

Esta hipótese considera que as grandezas relacionadas com a última ramificação da rede de distribuição (sistema circulatório), ou seja, os capilares, são invariantes em relação à massa corpórea do indivíduo. Essas grandezas invariantes são, por exemplo, tamanho e massa de uma célula, comprimento, área e volume dos capilares. Dessa forma, essas unidades terminais funcionam como “tijolos” fundamentais na construção do organismo. Eles não variam durante o crescimento do organismo, nem são reinventados de espécie para espécie.

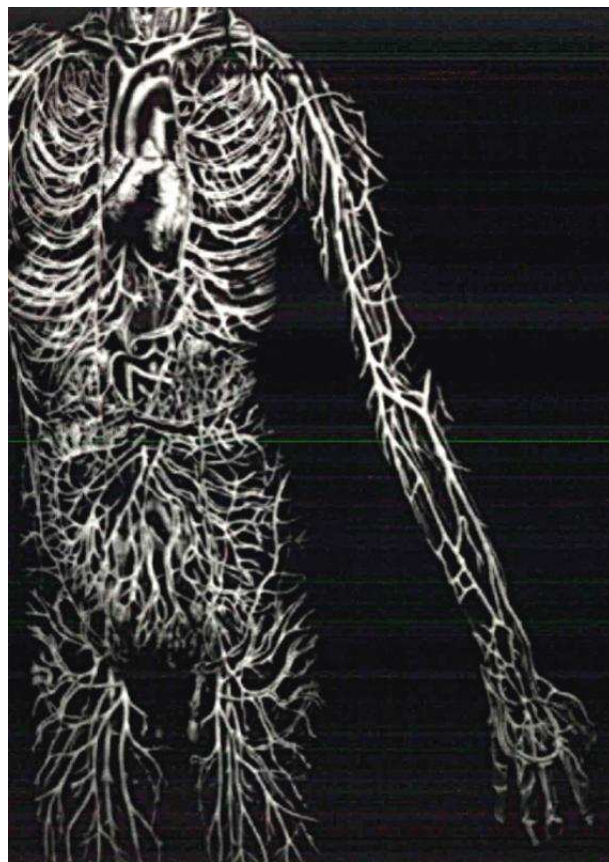


Figura 5.6: Sistema circulatório do ser humano e seu padrão fractal.

PROCURAR RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA CORROBORAR ESTA HIPÓTESE

Seleção Natural e Minimização do consumo de Energia

A seleção natural deve privilegiar uma rede de distribuição que minimiza o desperdício de energia. Uma rede pouco eficiente no transporte de nutrientes deve ser eliminada por seleção natural.

5.4.1 Algumas considerações

Antes de analisar as consequências dessas três hipóteses apresentadas, vamos colocar algumas considerações ou suposições. São elas:

- **Suposição 1:** a taxa metabólica é proporcional ao volume total de sangue que passa pela aorta;
- **Suposição 2:** Volume total de sangue no organismo deve ser proporcional à massa desse organismo.

A suposição 1 parte da ideia que o sangue transporta a energia (em forma de nutrientes) para as células. Dessa forma, a energia transportada pelo sangue e que vai ser levada às células deve passar pela aorta. Como todos os nutrientes e oxigênio necessários para os processos metabólicos são carregados pelo sangue, essa suposição decorre naturalmente.

A suposição 2 vem de uma evidência empírica (ver tabela (??)), além de decorrer também da ideia de que se o volume do sangue é proporcional ao volume do organismo, e este escala com a massa, então a massa do organismo deve ser proporcional ao seu volume de sangue.

5.4.2 A rede de distribuição

A rede de distribuição de nutrientes (sistema circulatório) apresenta uma forma fractal de ramificação, aproximadamente como descrito na figura (5.7). De uma forma bastante rudimentar, vamos supor que essas ramificações possam ser representadas pelo modelo descrito na figura (5.8), onde k é um índice que representa o nível da ramificação. Note que $k = 0$ é o nível da aorta, enquanto que $k = K$ é o nível dos capilares, o que implica que a rede é formada por $K + 1$ níveis de ramificação. Cada um dos vasos sanguíneos de um determinado nível se ramifica em n vasos menores. Por exemplo, na figura (5.8) temos $n = 2$. Ou seja, o número de vasos de um nível é, neste caso particular, duas vezes maior que o número de vasos do nível anterior. Por conveniência, n será considerado o mesmo em todos os níveis da rede. O nível k possui N_k vasos. Esse número pode ser determinado a partir do nível anterior pela fórmula de recorrência $N_{k+1} = nN_k$, o que implica, se $N_0 = 1$, que

$$N_k = n^k. \quad (5.12)$$

Dessa forma, o número de capilares N_c desta rede, ou seja, o número de vasos no K -ésimo nível, será

$$N_c \equiv N_K = n^K. \quad (5.13)$$

Vamos modelar também a forma de um vaso sanguíneo típico dessa rede. Para isso, suponha que os vasos tenham uma forma cilíndrica como o da figura (5.9). Esta figura representa um vaso sanguíneo do k -ésimo nível, onde l_k é o comprimento do vaso, r_k o seu raio, e u_k é a velocidade média do sangue (fluxo) dentro desse vaso. A distância total de circulação do sangue l pode ser determinada pela somatória $l = \sum_{k=0}^K l_k$.

Assim como o número de vasos pode ser escrito por uma equação de recorrência, vamos supor que o comprimento e o raio desses vasos também possam. Neste sentido temos

$$l_{k+1} = \gamma l_k, \quad (5.14)$$



Figura 5.7: Forma fractal de ramificação da rede de distribuição de nutrientes (sistema circulatório).

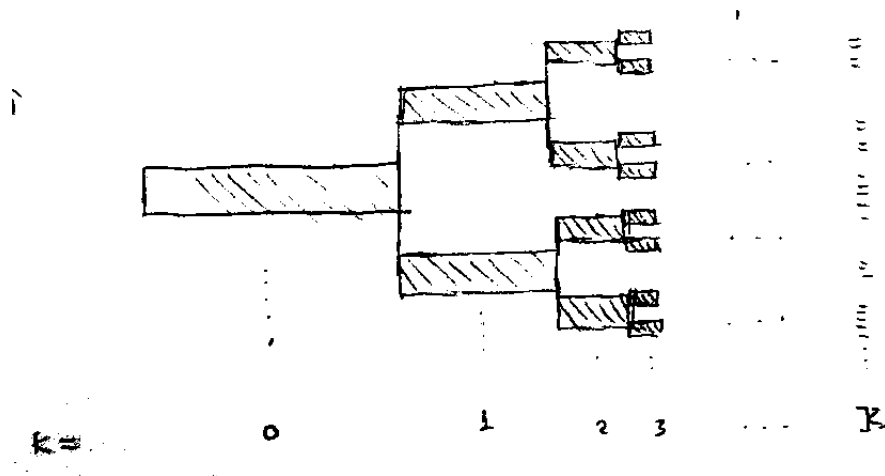


Figura 5.8: Modelo bastante simples da forma fractal de ramificação do sistema circulatório.

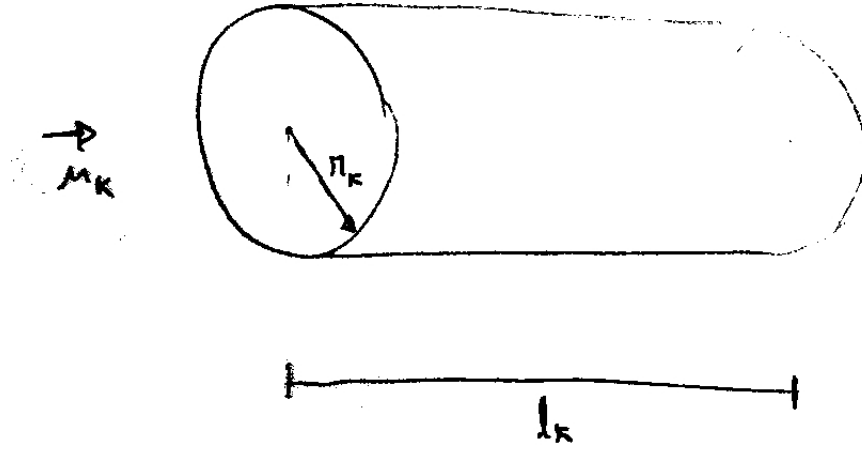


Figura 5.9: Representação de um vaso sanguíneo do k -ésimo nível por um cilindro.

e

$$r_{k+1} = \eta r_k \quad (5.15)$$

onde γ e η são os parâmetros que relacionam os níveis subsequentes. Note que γ e η são menores que 1, pois os vasos de um dado nível são sempre menores que os vasos do nível anterior ($l_{k+1} < l_k$ e $r_{k+1} < r_k$). No entanto $n > 1$, pois o número de vasos de um nível será sempre maior que o do nível anterior ($N_{k+1} > N_k$).

Considere agora Q_k como sendo o volume de sangue dentro de um tubo de nível k . Dessa forma, $\dot{Q}_k = \Delta Q_k / \Delta t$ representa o fluxo de sangue fluindo dentro deste mesmo tubo em um intervalo de tempo Δt . Este fluxo também pode ser escrito como

$$\dot{Q}_k = \frac{\text{volume de sangue}}{\Delta t} = \frac{(\pi r_k^2) \cdot (u_k \Delta t)}{\Delta t}. \quad (5.16)$$

O primeiro termo em parenteses da parte direita dessa equação é a área da seção transversal desse tubo. O segundo termo em parenteses é o comprimento l_k desse mesmo tubo. A equação acima conduz a

$$\dot{Q}_k = \pi r_k^2 u_k. \quad (5.17)$$

Como o volume do fluido é conservado ($Q_0 = N_c Q_c$), deve valer a relação

$$\dot{Q}_0 = N_c \dot{Q}_k, \quad (5.18)$$

o que pode ser escrito em termos de quantidades do nível capilar, ficando

$$\dot{Q}_0 = N_c \dot{Q}_c = N_c \pi r_c^2 u_c, \quad (5.19)$$

onde \dot{Q}_c , N_c , l_c , r_c e u_c são relativos aos capilares e portanto, invariantes de escala (pela hipótese 2). Observações experimentais em mamíferos sugerem que \dot{Q}_c é o mesmo para todas as espécies. Concluimos a partir da Eq. (5.19) que

$$\dot{Q}_0 \propto N_c. \quad (5.20)$$

Ou seja, a hipótese 2 implica que o fluxo de sangue na rede de distribuição é linearmente proporcional ao número de capilares do organismo.

x (sistema circulatório)	b (previsto pela teoria)	b (observado)
Raio da Aorta (r_0)	$3/8 = 0.375$	0.36
Pressão da Aorta	0	0.032
velocidade de sangue na Aorta (u_0)	0	0.07
volume de sangue total (V_b)	1	1.00
tempo de circulação	$1/4 = 0.25$	0.25
distância de circulação ($\sum_{k=0}^K l_k$)	$1/4 = 0.25$	não disponível
volume de injeção cardíaca	1	1.03
frequência cardíaca	$-1/4 = -0.25$	-0.25
saída cardíaca	$3/4 = 0.75$	0.74
número de capilares (N_c)	$3/4 = 0.75$	não disponível
densidade de capilares	$-1/12 = -0.083$	-0.095
afinidade de oxigênio no sangue	$-1/12 = -0.083$	-0.089
raio de suplemento da célula	$1/12 = 0.083$	não disponível
raio do cilindro de Krogh	$1/8 = 0.125$	não disponível
resistência periférica	$-3/4 = -0.75$	-0.76
número de Womersley	$1/4 = 0.25$	0.25
taxa metabólica	$3/4 = 0.75$	0.74

Tabela 5.2: Tabela para sistema circulatório.

5.4.3 Análise a respeito do Número de Capilares

A taxa metabólica dos organismos está diretamente relacionada com o fluxo sanguíneo (dada a suposição 1), isto é

$$B \propto \dot{Q}_0. \quad (5.21)$$

Comparando com a Eq. (5.20) e pela lei halométrica ($B \propto M^{3/4}$) temos

$$N_c \propto M^{3/4}. \quad (5.22)$$

Ou seja, de acordo com as hipótese e considerações dessa teoria, decorre que o número de capilares também obedece a uma lei halométrica com expoente $3/4$. No entanto, essa previsão ainda não pode ser verificada experimentalmente. Sendo válida esta teoria proposta, então está errada a ideia intuitiva de que o número de capilares é linearmente proporcional ao número de células (e consequentemente à massa) do organismo.

Podemos concluir a partir destes resultados que o número de células alimentadas por um único capilar deve aumentar de acordo com uma lei de potencia com a massa. Para entender isso, note que se $N_c \propto M^{3/4}$, enquanto que o numero total de células, digamos N , é diretamente proporcional à massa, i.e. $N \propto M$, então o número de células alimentadas por um único capilar será

$$\frac{N}{N_c} \propto \frac{M}{M^{3/4}} = M^{1/4}. \quad (5.23)$$

Essa relação pode ser visualizada pela figura (5.10). Este é um exemplo de eficiência aumentando com a massa do organismo, pois quanto maior é o animal, mais células serão alimentadas por um único capilar. Isso pode ser verificado numericamente pela tabela fictícia (6.5) em que se mostra o numero de células alimentadas por capilar de acordo com a massa em diversas ordens de grandeza que seguem a relação (5.23). Vemos por essa tabela que um organismo com 10 unidades de massa, um capilar alimenta apenas 2 células. No entanto, um organismo com 10.000 unidades de massa, um único capilar alimenta cerca de 10 células. O organismo maior é mais eficiente do que um organismo menor.

COLOCAR TABELA

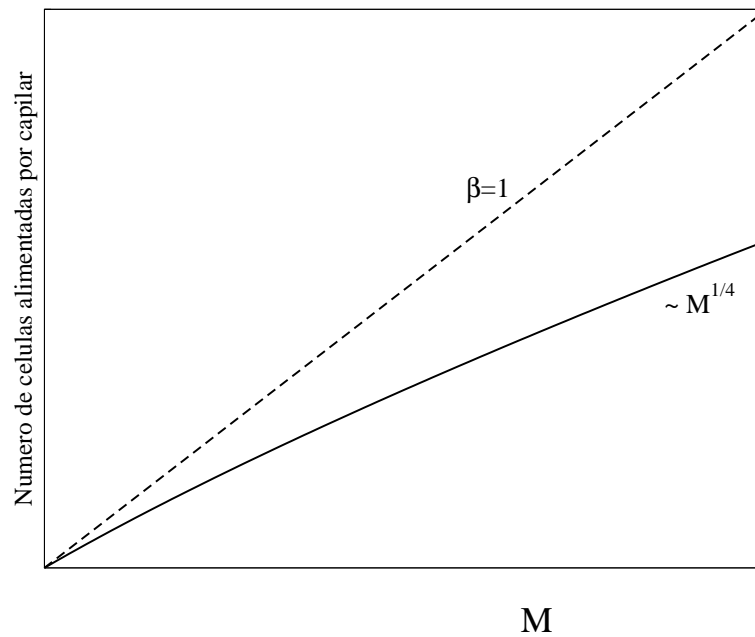


Figura 5.10: Número de células alimentadas por um único capilar em função da massa. Temos aqui um decaimento com expoente 1/4. Quanto maior o animal, mais células serão alimentadas por um único capilar. Este é um exemplo de eficiência aumentando com a massa do organismo.

x (sistema respiratório)	b (previsto pela teoria)	b (observado)
volume do pulmão	1	1.05
frequência respiratória	$-1/4 = -0.25$	-0.26
fluxo de volume para pulmão	$3/4 = 0.75$	0.80
pressão interpleural	0	0.004
diâmetro da traqueia	$3/8 = 0.375$	0.39
velocidade do ar na traquéia	0	0.02
volume tidal	1	1.041
energia dissipada	$3/4 = 0.75$	0.78
número de alveolus	$3/4 = 0.75$	não disponível
raio dos alveolus	$1/12 = 0.083$	0.13
área superficial dos alveolus	$1/6 = 0.083$?????	não disponível
área superficial do pulmão	$11/12 = 0.92$	0.95
capacidade difusa do oxigênio	1	0.99
resistência total das vias aéreas	$-3/4 = -0.75$	-0.70
taxa de consumo de oxigênio	$3/4 = 0.75$	0.76

Tabela 5.3: Tabela para sistema respiratório.

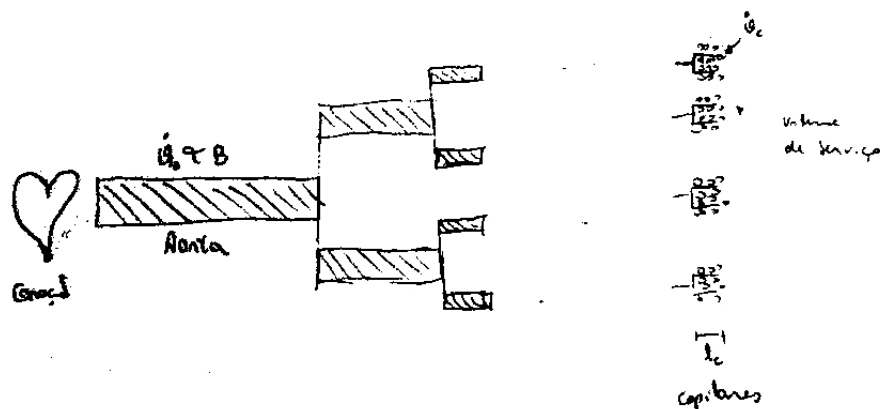


Figura 5.11: sadsads

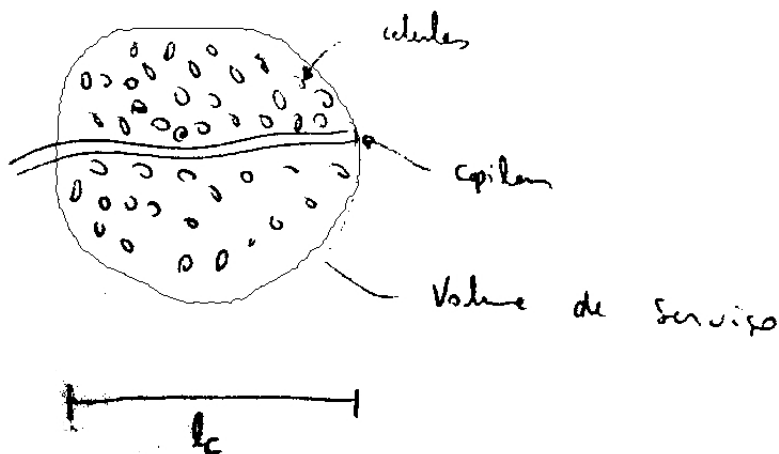


Figura 5.12: sadsads

5.4.4 Volume de Serviço de um capilar

A distribuição de sangue pelos vasos e a disposição das células nos capilares podem ser esquematizadas (de forma estilizada) como o apresentado pelas figuras (5.11) e (5.12). Todas as células do organismo devem ser supridas pelos capilares. Assim, a rede se ramifica de forma que um grupo de células seja suprida por um determinado capilar. Vamos chamar o volume no qual cada capilar atua por *volume de serviço*. Dessa forma, esse volume pode ser escrito, por conveniência, como o volume da esfera de raio l_c que envolve o capilar, ou seja, $4/3\pi(l_c/2)^3$.

5.5 Volume Total de Sangue no Organismo

Vamos nesta seção tentar escrever o volume total de sangue V_b no organismo em termos dos parâmetros do modelo introduzido. Na verdade, vamos mostrar que

$$V_b = (\gamma\eta^2)^{-K}. \tag{5.24}$$

Para mostrar essa relação, considere V_k como o volume de sangue dentro de um único vaso sanguíneo do nível k o que implica $V_b = \sum_{k=0}^K N_k V_k$. Como $V_k = \pi r_k^2 l_k$ e $N_k = n^k$ (para $N_0 = 1$), temos

$$V_b = \pi \sum_{k=0}^K n^k r_k^2 l_k. \quad (5.25)$$

A razão η entre raios de níveis subsequentes pode ser escrita como $\eta = r_c/r_{K-1}$, o que implica $r_{K-1} = r_c/\eta$, $r_{K-2} = r_c/\eta^2$ e assim sucessivamente. Podemos então escrever a relação de recorrência

$$r_k = \eta^{-(K-k)} l_c. \quad (5.26)$$

De forma análoga, temos para o comprimento do vaso no nível k a forma

$$l_k = \gamma^{-(K-k)} l_c. \quad (5.27)$$

Esta forma de escrever r_k e l_k é interessante pois os escrevem em termos de parâmetros invariantes de escala (r_c e l_c , respectivamente). Voltando à Eq. (5.33) temos

$$V_b = V_c (\eta^{-2K} \gamma^{-K}) \sum_{k=0}^K n^k \eta^{2k} \gamma^k \quad (5.28)$$

onde $V_c \equiv \pi r_c^2 l_c$ é o volume de um capilar e, portanto, invariante de escala. Podemos então escrever

$$V_b \propto (\gamma \eta^2)^{-K} \sum_{k=0}^K (n \eta^2 \gamma)^k. \quad (5.29)$$

Aqui substituímos “=” por “ \propto ” pois abrimos mãos das informações dos parâmetros invariantes de escala (constantes).

A somatória da Eq. acima é uma P.G. de termo inicial $a_0 = 1$ e razão $q = n \eta^2 \gamma$. Sabendo que a soma de uma P.G. finita é $a_0(1 - q^K + 1)/(1 - q)$, então

$$V_b \propto (\gamma \eta^2)^{-K} \left[\frac{1 - (n \eta^2 \gamma)^{K+1}}{1 - n \eta^2 \gamma} \right]. \quad (5.30)$$

Como n , η e γ são constantes (por definição) e independentes de escala, o termo do denominador na equação acima pode ser omitido, ou seja, podemos escrever simplesmente

$$V_b \propto (\gamma \eta^2)^{-K} [1 - (n \eta^2 \gamma)^{K+1}]. \quad (5.31)$$

Identificando $N_c = n^K$ temos $n^{K+1} = n^K n = N_c n$, o que leva a

$$V_b \propto (\gamma \eta^2)^{-K} - N_c n \eta^2 \gamma. \quad (5.32)$$

Note que o segundo termo à direita da equação acima possui apenas quantidades constantes ou invariantes de escala e portanto podemos escrever

$$V_b \propto (\gamma \eta^2)^{-K} \quad (5.33)$$

demonstrando o que propomos no começo desta seção.

Podemos calcular também o volume de sangue em termos do volume de sangue na aorta. Para isso vamos usar a propriedade

$$r_k = \eta^k r_0, \quad (5.34)$$

$$l_k = \gamma^k l_0, \quad (5.35)$$

e

$$V_0 = \pi r_0^2, \quad (5.36)$$

que nos leva a

$$V_b = \sum_{k=0}^K N_k (\pi r_k^2) l_k = V_0 \sum_{k=0}^K (n\eta^2 \gamma)^k. \quad (5.37)$$

Resolvendo esta P.G., de forma análoga ao feito anteriormente, chegamos a

$$V_b = V_0 \left[\frac{1 - (n\eta^2 \gamma)^{K+1}}{1 - n\eta^2 \gamma} \right]. \quad (5.38)$$

que é o volume total de sangue no organismo em termos do volume de sangue na aorta.

5.6 Lei de escala entre Taxa Metabólica e Massa Corporal

Agora estamos prontos para chegar na lei halométrica entre taxa metabólica e a massa corporal. Como fato experimental temos a lei de potência $B \sim M^\beta$ entre essas duas quantidades. Além disso, temos também que o valor experimental para este expoente é $\beta_{experimental} \approx 3/4$.

Gostaríamos então de determinar o valor teórico de β previsto a partir das três hipóteses que formam esta teoria (veja seção (5.4)). Vimos que $B \sim N_c = n^K$ e que, pela suposição 2, temos $V_b \sim M$. Isso implica que $n^K \sim M^\beta \sim V_b^\beta$. Portanto, pelo resultado (5.33), temos

$$n^K \sim (\gamma\eta^2)^{-\beta K}. \quad (5.39)$$

Extraindo o logaritmo dos dois lados dessa relação chegamos a

$$\beta = -\frac{\ln n}{\ln(\gamma\eta^2)}. \quad (5.40)$$

Esse resultado nos diz que para determinarmos β basta sabermos os valores das constantes n , γ e η . Ou seja, o expoente da lei halométrica depende apenas das constantes das redes fractais que formam o sistema circulatório.

5.6.1 Conservação do volume e da área

Vamos supor, por simplificação, que a ramificação da rede conserva o volume ocupado e a área transversal de um nível de vasos para outro, conforme figura (??)

FALAR QUE A SELEÇÃO NATURAL DEVE PRIVILEGIAR ESTE CENÁRIO, POIS HÁ UMA DIMINUIÇÃO DE PERDAS ENERGETICAS QUANDO ESTE É O CASO. FALAR SOBRE ONDAS DE PROPAGAÇÃO ETC....

COLOCAR FIGURA DA CONSERVAÇÃO DA AREA E DO VOLUME

Se há conservação do volume, então vale

$$l_k^3 N_k = l_{k+1}^3 N_{k+1}. \quad (5.41)$$

Inserindo $\gamma = l_{k+1}/l_k$ e $n = N_{k+1}/N_k$ na equação (5.41) fica

$$\gamma = n^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.42)$$

Se há conservação da área, então vale $A_k = 2A_{k+1}$ e portanto

$$\pi r_k^2 = n\pi r_{k+1}^2, \quad (5.43)$$

e conseqüentemente

$$\eta^2 = \frac{1}{n}. \quad (5.44)$$

Introduzindo os resultados (5.44 e (5.42) na equação (5.40) concluímos então que $\beta = 3/4$, em concordância com os resultados experimentais.

5.7 Conclusão

asasasasasa s asa sa sas

Vamos nesse capítulo construir um modelo para o crescimento animal (massa em função do tempo) baseado em duas propriedades física e biológica. A primeira propriedade, diz respeito ao princípio de conservação da energia. A segunda, diz respeito à propriedade de que a taxa metabólica de um organismo escala com a sua massa por uma lei de potência de expoente $\beta = 3/4$ (resultado experimental).

Para construirmos uma equação da dinâmica da massa do organismo em função do tempo, consideremos inicialmente que a energia total metabolizada por um organismo pode ser usada ou para manter as células já existentes ou para criar células novas (crescimento). Dessa forma, pelo princípio da conservação da energia temos

$$\text{Energia total Metabolizada} = \text{Manutenção} + \text{crescimento.} \quad (6.1)$$

Uma vez que a energia utilizada para manutenção pode ser interpretada como a energia consumida por cada célula vezes o número de células e que a energia gasta no crescimento pode ser entendida como a energia para se criar uma nova célula vezes o número de células criadas, então a equação acima pode ser reescrita como

Introduzindo algumas variáveis, tais como:

- *taxa metabólica* B , que é a energia total usada pelo organismo em um dado intervalo de tempo δt para realizar as suas necessidades vitais;
- *taxa metabólica celular* B_c , que a taxa metabólica de uma única célula do organismo, ou seja, a energia total utilizada por uma única célula num intervalo de tempo δt . Se o organismo possui N células, então $B = NB_c$;
- *massa celular* m_c , que é a massa de uma única célula que constitui o organismo.
- *massa do organismo* m , que é a massa total do organismo, ou seja $m = Nm_c$;
- *energia de criação* E_c , que a energia gasta para se criar uma nova célula do organismo.

Utilizando essas definições junto ao raciocínio da equação??? podemos contruir a EDO

$$B = NB_c + E_c \frac{d}{dt} N. \quad (6.2)$$

Usando agora a relação de escala $B = B_0 M^\beta$, onde $\beta = \frac{3}{4}$, e o fato de que $N = m/m_c$, podemos reescrever esta equação diferencial acima em termos da massa do organismo, o que nos leva a

$$\frac{d}{dt} m = am^\beta - bm, \quad (6.3)$$

onde introduzimos

$$a \equiv \left(\frac{B_0 m_c}{E_c} \right) \quad (6.4)$$

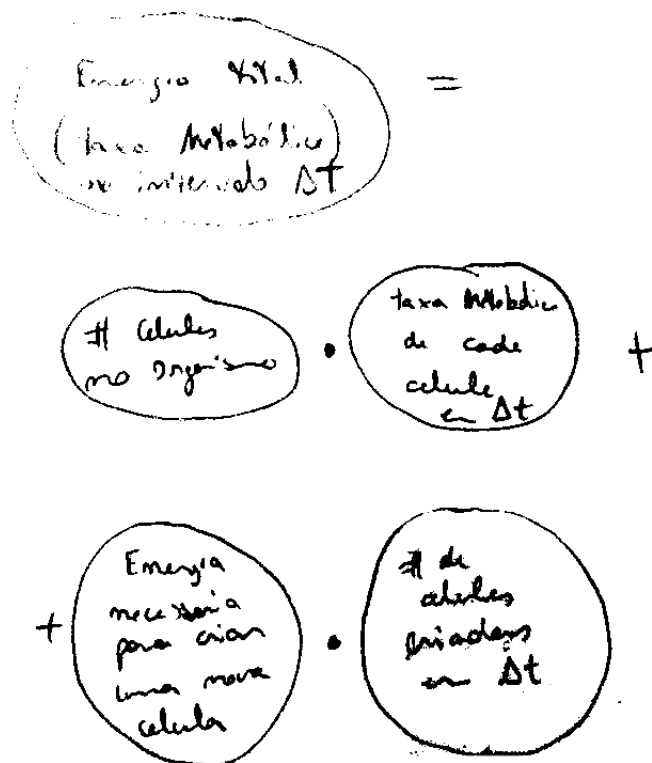


Figura 6.1: COLOCAR FIGURA!!!!

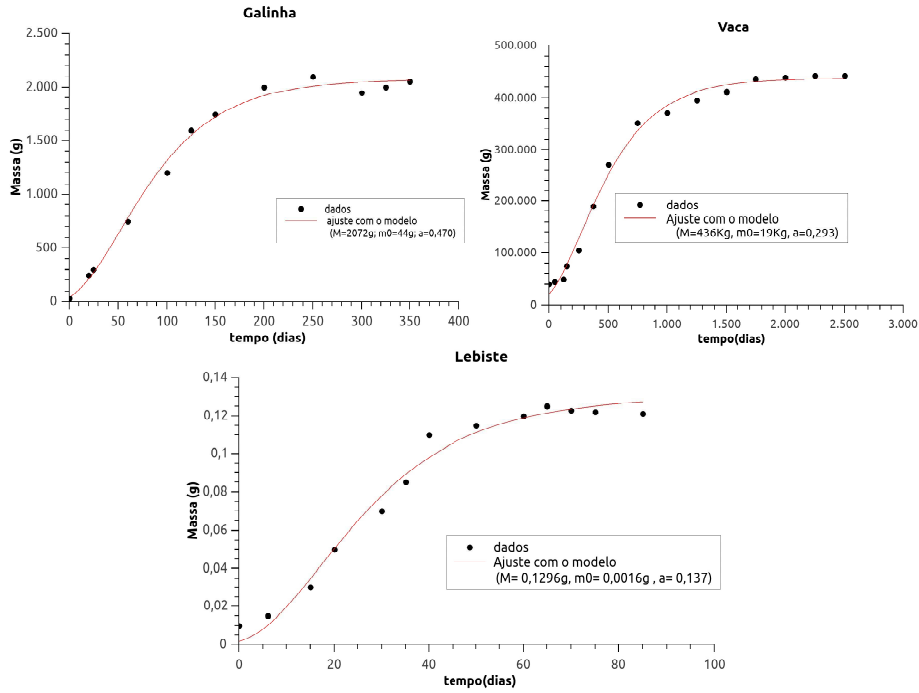


Figura 6.2: Graficos experimentais e ajuste com a Eq. ?? para animais de várias ordens de grandeza. O ajuste fit do modelo aos dados empiricos é bastante coerente.

e

$$b \equiv \frac{B_c}{E_c}. \tag{6.5}$$

A Eq. (6.3) tem como solução

$$m(t) = \left[\frac{a}{b} + (m_0^{1-\beta} - \frac{a}{b})e^{b(\beta-1)t} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}, \tag{6.6}$$

onde m_0 é a massa inicial do organismo.

Os graficos apresentados na figura abaixo mostram o bom casamento entre a solucao acima e dados experimentais de crescimento animal de varias especies de diferentes escalas de tamanhos.

Como $\beta = 3/4 < 1$, o argumento do exponencial em (6.6) é negativo, e portanto o termo exponencial vai para zero em $t \gg 1$. A massa do organismo deve então convergir para

$$m(t \gg 1) \equiv M = \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{6.7}$$

ou seja

$$M = \left(\frac{B_0 m_c}{B_c} \right)^4, \tag{6.8}$$

onde M é a massa de maturidade do organismo. Note que se a energia metabolica escalasse na mesma forma que a massa, ou seja se $\beta = 1$, então a solução ??? ficaria $m(t) \sin e^{(a-b)t}$. Ou seja, se assim fosse, o organismo continuaria a crescer (exponencialmente) indefinidamente.

Experimentos mostram que m_c é um invariante de escala, ou seja seu valor idepende da especie. Isso acontece pois esta quantidade depende apenas de propriedades celulares. O para B_0 tambem é uma constante. Dessa forma, a massa de maturidade do organismo depende apenas da energia

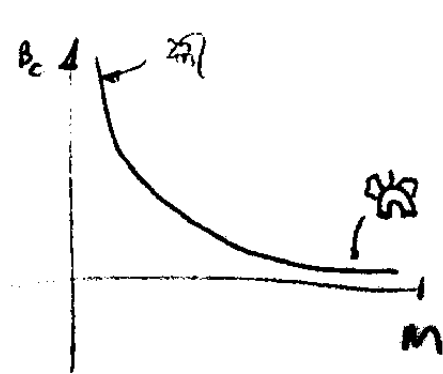


Figura 6.3: COLOCAR FIGURA!!!!

metabolica de suas celulas, i.e. B_c . Ou melhor, é a B_c quem dita o tamanho final da espécie. Note que

$$B_c = \frac{B}{M} = B_0 \frac{M^\beta}{M} \tag{6.9}$$

e portanto

$$B_c = B_0 M^{-\frac{1}{4}}, \tag{6.10}$$

ou seja, a taxa metabolica per capita decresce com a massa do organismo, como pode ser visualizada na figura abaixo. Dessa forma, animais menores (e.g. o rato) gastam muito mais energia por celula que animais maiores (e.g. elefante). Dessa forma, é mais eficiente, energeticamente, ser grande!

6.0.1 Discução sobre os parametros a e b

Os parametros a e b , dados pelas relações ?? e ??, respectivamente, possuem propriedades bastante distintas. Por exemplo, o parametro $b = B_c/E_c$ depende diretamente de B_c . Como essa quantidade varia de acordo com a especie, então o parametro b também deve variar com a especie.

No entanto o parametro a só depende de quantidades invariantes de escala e, portanto, este também será um invariante. De acordo com os dados experimentais, temos $B_0 = 1,9 \cdot 10^{-2}$ watts; $m_c \approx 3 \cdot 10^{-9}$ g; e $E_c \approx 2,1 \cdot 10^{-5}$ J. Isso nos leva a

$$a \approx 0,234 \frac{\text{g}^{\frac{1}{4}}}{\text{dia}} \tag{6.11}$$

o que está em ótima concordância com os dados experimentais, conforme descrito na tabela abaixo.

Animal	a ($\frac{\text{g}^{\frac{1}{4}}}{\text{dia}}$)
coelho	0,35
rato	0,23
vaca	0,27
mamiferos em geral	0,3

6.1 Lei universal de Crescimento

A solução geral do modelo, dado pela Eq. ??, pode ser manipulada algebricamente, de modo a ficar

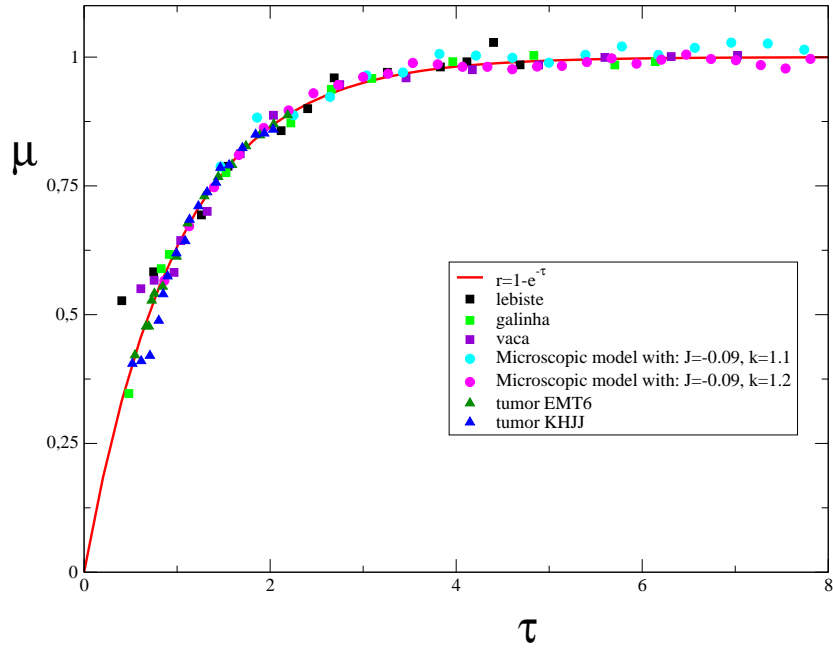


Figura 6.4: COLOCAR FIGURA!!!!

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{1-\beta} = 1 - \left[1 - \left(\frac{m_0}{M}\right)^{1-\beta}\right] e^{-\frac{\alpha(1-\beta)t}{M^{1-\beta}}}. \tag{6.12}$$

Usando $\beta = 3/4$, a equação acima ficar

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 - e^{-\tau} \tag{6.13}$$

onde

$$\tau \equiv -\log \left[1 - \left(\frac{m_0}{M}\right)^{\frac{1}{4}}\right] + \frac{at}{4M^{\frac{1}{4}}} \tag{6.14}$$

é uma especie de tempo rescalado. O grafico da expressão ?? feita com os dados experimentais de várias espécies revela-se ser um comportamento universal, dado o perfeito colapso dos dados. Além disso, pode-se mostrar usando as definições introduzidas ao longo desse capitulo que a Eq. ?? nada mais é que a razão entre a energia usada pela manutenção do organismo e a energia metabolizada. Ou seja

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\text{Energia de Manutenção}}{\text{Energia Metabolica Total}} \tag{6.15}$$

6.2 tumor

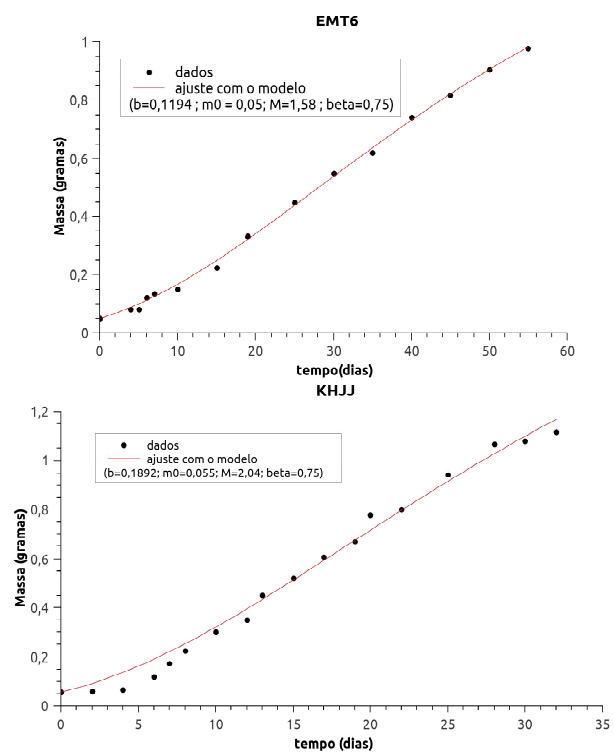


Figura 6.5: COLOCAR FIGURA!!!!

Capítulo 7

Sociofísica: Modelando Sistemas Sociais

7.1 O Modelo de Axelrod para Difusão Cultural

Quando as pessoas interagem, elas tendem a ficar mais parecidas em suas crenças, atitudes e comportamentos;

As pessoas estão interagindo constantemente, mas então porque as diferenças persistem?

O Modelo de Axelrod para Difusão Cultural :

Princípio 1 (Interação): Interação acontece mais frequentemente entre pessoas similares. Ex.: “Pagodeiro atrai Pagodeiro”;

Princípio 2 (Influência social): Quando dois indivíduos interagem, mais similares eles ficam. Mas eles se tornam mais dissimilares aos outros.

conclusão do modelo: Combinação entre i) Interação e ii) Influência Social produz e sustenta a diversidade cultural

7.2 Usando Modelo de Axelrod para descrição de mídias de massa

Questões sobre Mídia de Massa

1) O que mais te influencia? (Por exemplo, Apple ou Samsung?) - Amigos; ou - TV, Jornais e Internet.

2) Você é influenciável por mensagens de Mídia?

3) O que você quer ser mais eficiente em produzir homogeneidade cultural? - Mídia de massa local (e.g., Jornal de lavras); - Mídia de massa global (e.g. Rede Globo).

Proposta:

Identificação de mecanismos e formas de mídia de massa;

Como estes mecanismos controlam processos de dinâmica cultural entre agentes?

Conclusão do modelo: O Poder de ser Sutil e Local!

7.3 Dinâmica de Opiniões

7.4 O Jogo dos Nomes

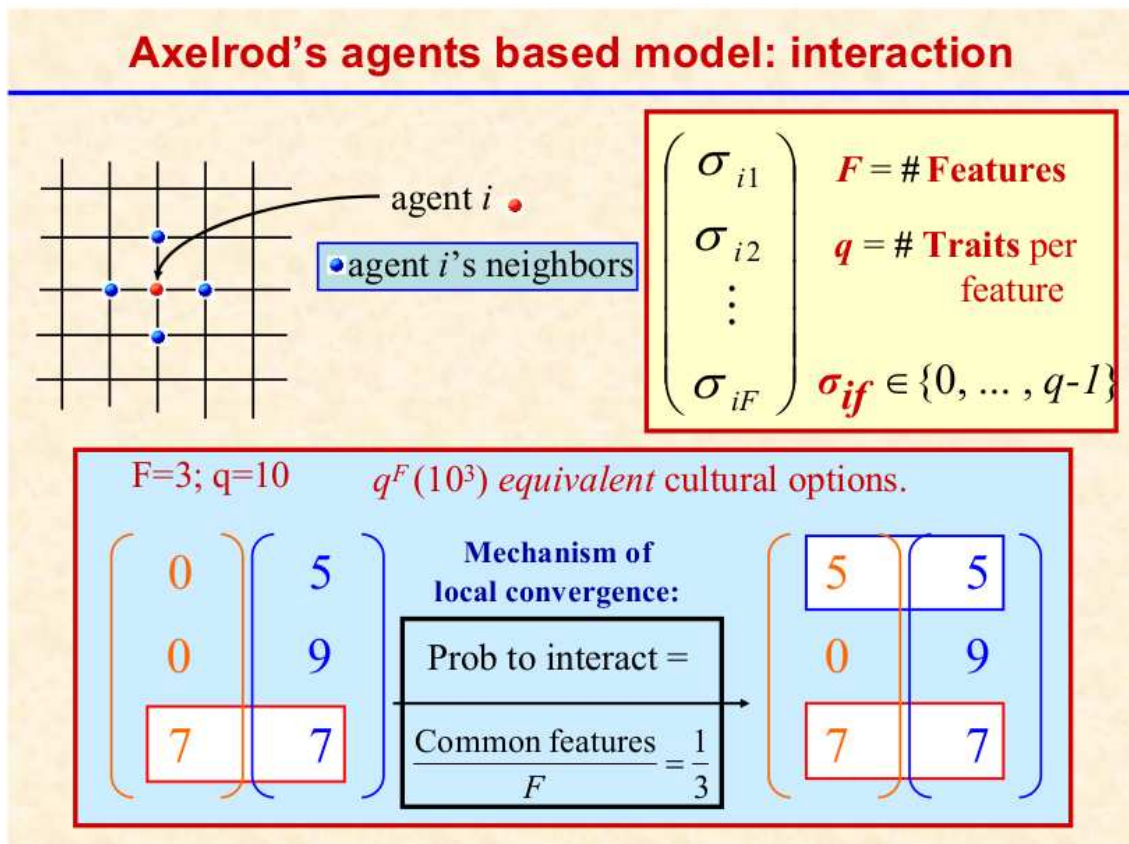
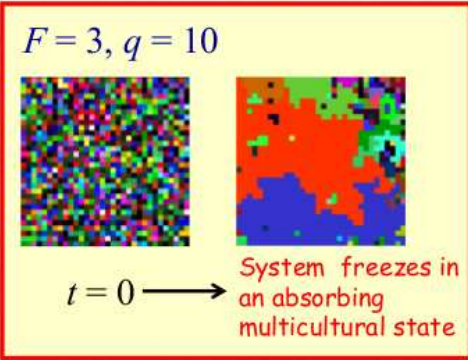


Figura 7.1: sdsdsd dsdsd.

Axelrod's Dynamics

$F = 3, q = 10$



$t = 0 \longrightarrow$ System freezes in an absorbing multicultural state

http://www.imedeia.uib.es/PhysDept/research_topics/socio/culture.html

- The model illustrates how **local convergence** can generate **global polarization**.
- Number of domains taken as a measure of cultural diversity
- Uniform state always prevails without similarity rule (*Kennedy 1998*)

Figura 7.2: sdsdsd dsdsd.

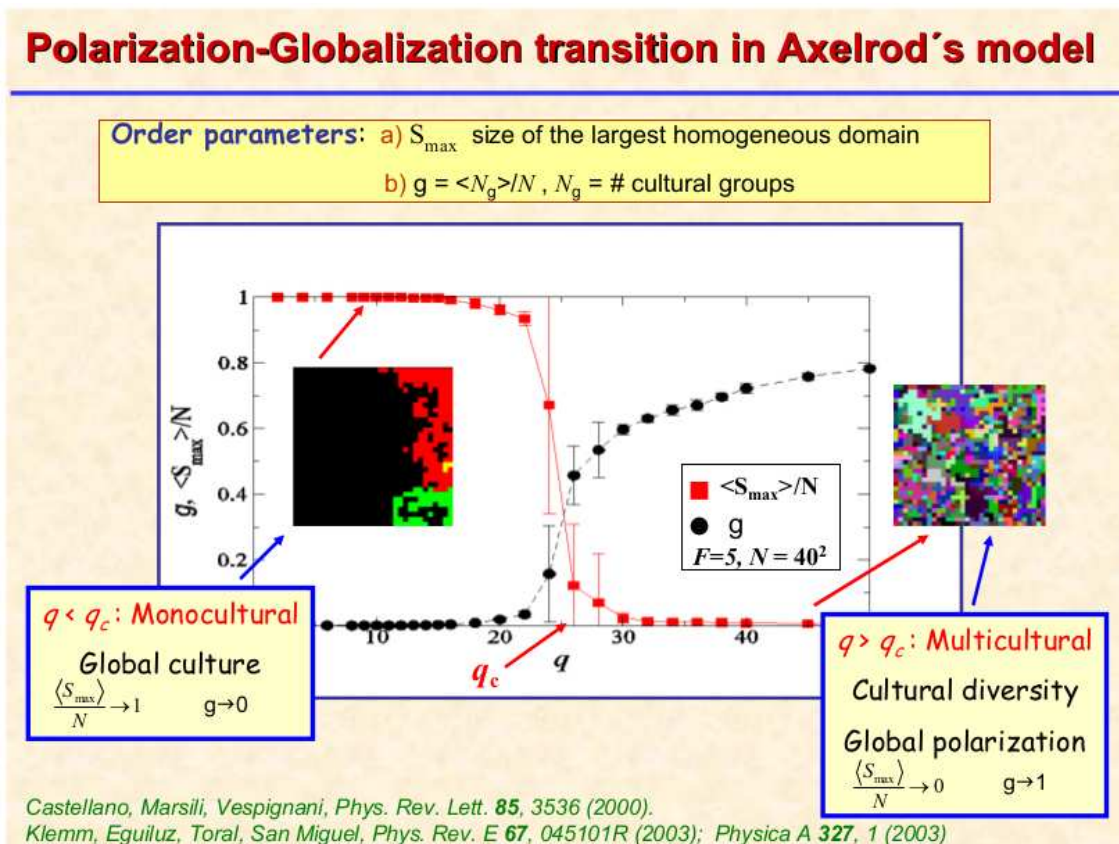


Figura 7.3: sdsdsd dsdsd.

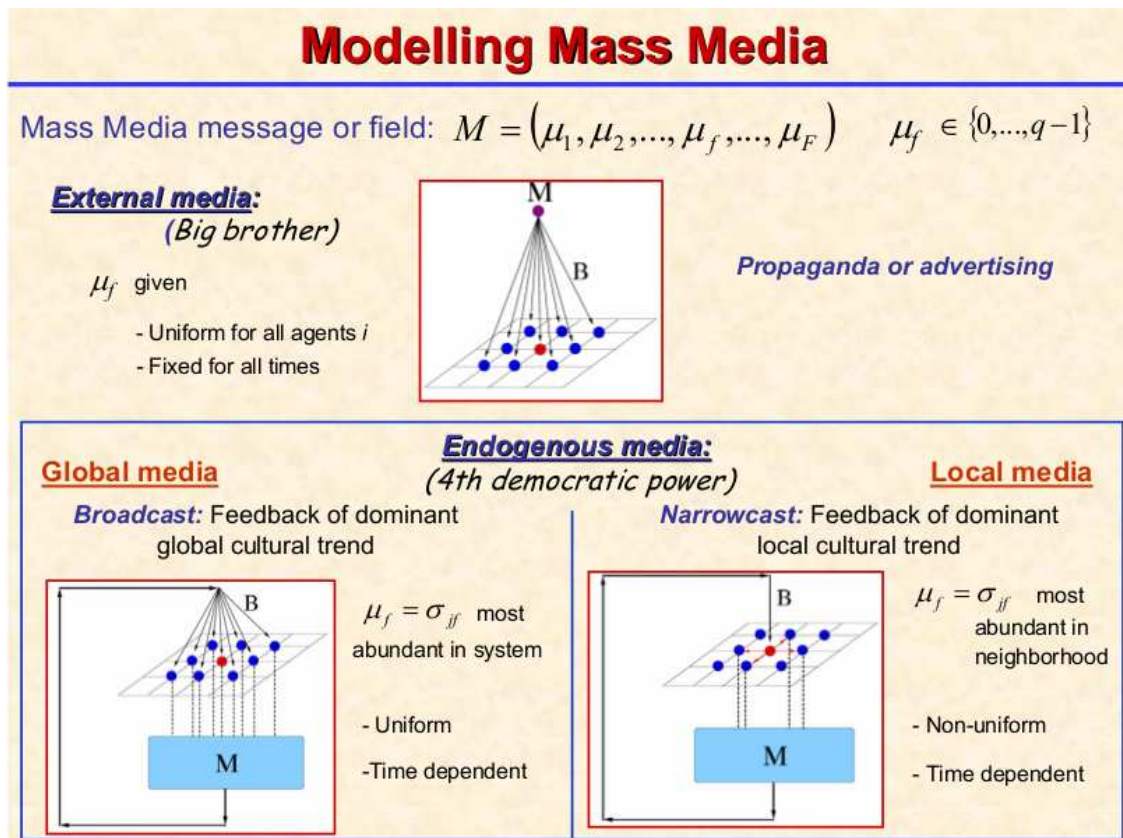


Figura 7.4: sdsdsd dsdsd.

Dynamics of interaction with mass media field

Agent i : $C_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{if}, \dots, \sigma_{iF}) \longleftrightarrow$ Mass media: $M = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_f, \dots, \mu_F)$

Parameter $B \in [0, 1]$: probability that M acts on element i in one time step: "*strength*" of mass media

$1 - B$: probability to interact with j selected at random among nearest neighbors of i . $\Rightarrow M$ acts as a 5th effective neighbor of i .

1) If M acts on agent i , the probability of interaction p_{iM} is proportional to the cultural overlap between i and M

2) Agent-Mass Media interaction results in agent i adopting a cultural feature of M

Figura 7.5: sdsdsd dsdsd.

Asymptotic states for external mass media

$M \rightarrow$ ■

B=0

B=0.005

B=0.1

B=0.9

Figura 7.6: sdsdsd dsdsd.

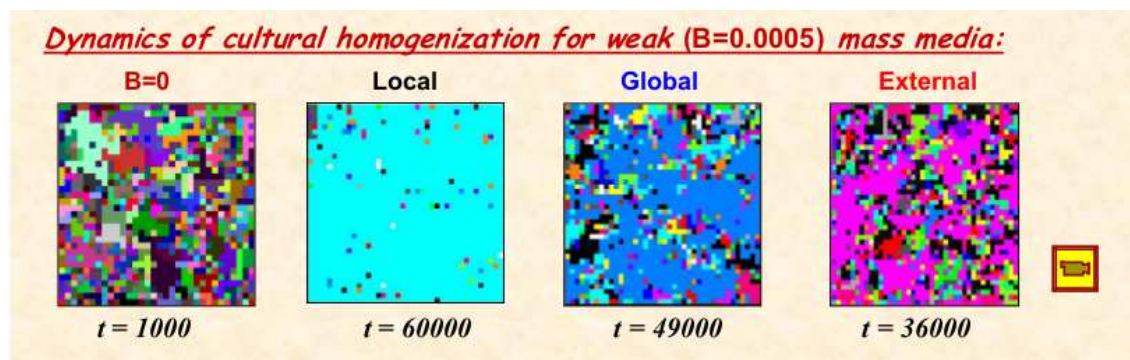


Figura 7.7: sdsdsd dsdsd.

Referências Bibliográficas