7^o Lista de Exercícios de Física Estatística

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

July 2, 2013

1. Considere N partículas não-interagentes com spin $\frac{1}{2}$ sujeitas a um campo magnético externo de intensidade B e em contato com um reservatório térmico de temperatura T. Dessa forma, cada partícula pode assumir dois estados $\sigma_i = \pm 1$, associados às energias $\epsilon_1 = \mu B$ e $\epsilon_2 = -\mu B$, onde μ é o momento magnético das partículas.

   (a) Construa a Hamiltoniana desse sistema;

   (b) Determine a função canônica de partição desse sistema;

   (c) Qual a probabilidade de encontrar uma partícula no estado $\sigma_i = +1$?

   (d) Determine a energia por partícula (u).

   (e) Construa um gráfico de u em função do campo B.

2. Considere o sistema descrito no exercício anterior com $\mu = 0.927 \times 10^{-20}$ ergs/gaus (Magnetron de Bohr), e $B = 30.000$ gaus. Abaixo de qual temperatura polarizaremos 75% das partículas?

3. A energia de um sistema de N íons magnéticos localizados, à temperatura T, na presença de um campo B, pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H} = D \sum_{i=1}^{N} S_i^2 - \mu_0 B \sum_{i=1}^{N} S_i \tag{1}$$

   onde os parâmetros D, μ_0 e B são positivos e $S_i = +1, 0, -1$ para qualquer sítio i de uma certa rede cristalina. Obtenha expressões para a energia interna, a entropia e a magnetização por sítio. Para campo nulo ($B = 0$), esboce gráficos da energia interna, da entropia e do calor específico contra a temperatura. Indique claramente o comportamento dessas grandezas nos limites $T \to 0$ e $T \to \infty$. Calcule o valor esperado do "momento de quadrupolo",

$$Q = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^{N} S_i^2 \right\rangle, \tag{2}$$

   em função do campo e da temperatura.

4. Considere um sistema magnético unidimensional de N spins localizados, à temperatura T, definido pela energia

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1,3,5,\cdots,N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu_0 B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \tag{3}$$

   onde os parametros J, μ_0 e B são positivos e $\sigma_i = \pm 1$ para qualquer sítio i. Suponha que N seja um número par e observe que a primeira soma é sobre os valores ímpares de i.

   a) Obtenha a função de partição canônica e calcule a energia interna por spin, $u = u(T, B)$. Esboce um gráfico de $u(T, B = 0)$ contra a temperatura T. Obtenha uma expressão para a entropia por spin, $s = s(T, B)$. Esboce um gráfico de $s(T, B = 0)$ contra T.

b) Obtenha uma expressão para a magnetização por partícula,

$$m = m(T, B) = \frac{1}{N} \left\langle \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right\rangle \tag{4}$$

e para a susceptibilidade magnética,

$$\chi = \chi(T, B) = \left.\frac{\partial m}{\partial B}\right)_T . \tag{5}$$

Esboce um gráfico de $\chi(T, B = 0)$ contra a temperatura.

5. Considere um sistema de N partículas clássicas e não interagentes. Os estados de partícula única têm energia $\epsilon_n = n\epsilon$ e são n vezes desgenerados ($\epsilon > 0; n = 1, 2, 3, \cdots$). Calcule a função de partição canônica deste sistema. Obtenha expressões para a energia interna e a entropia em função da temperatura. Quais os valores da entropia e do calor especifico no limite de altas temperaturas?

6. Um conjunto de N osciladores clássicos em uma dimensão é definido pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 \right) . \tag{6}$$

Utilizando o formalismo do ensemble canônico no espaço de fase clássico, obtenha expressão para a função de partição, a energia por oscilador, a entropia por oscilador, e o calor específico. Compare com o limite clássico dos resultados quânticos. Calcule uma expressão para o desvio quadrático da energia em função da temperatura.

7. Considere N partículas não-interagentes com spin $\frac{1}{2}$ sujeitas a um campo magnético externo de intensidade B e em contato com um reservatório térmico de temperatura T. Dessa forma, cada partícula pode assumir dois estados $\sigma_i = \pm 1$, associados às energias $\epsilon_1 = \mu B$ e $\epsilon_2 = -\mu B$, onde μ é o momento magnético das partículas.

   (a) Construa a Hamiltoniana desse sistema;
   (b) Determine a função canônica de partição desse sistema;
   (c) Qual a probabilidade de encontrar uma partícula no estado $\sigma_i = +1$?
   (d) Determine a energia por partícula (u).
   (e) Construa um gráfico de u em função do campo B.

8. Considere o sistema descrito no exercício anterior com $\mu = 0.927 \times 10^{-20}$ ergs/gaus (Magnetron de Bohr), e $B = 30.000$ gaus. Abaixo de qual temperatura polarizaremos 75% das partículas?

9. Um sistema de N osciladores quânticos localizados e independentes está em contato com um reservatório térmico à temperatura T. Os níveis de energia de cada oscilador são dados por

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) , \tag{7}$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

   (a) Obtenha a função de partição desse sistema;
   (b) Obtenha uma expressão para a energia interna u (energia por oscilador) em função da temperatura T. Esboce um gráfico de u contra T. Qual a expressão de u no limite clássico ($\hbar\omega_0 \ll k_B T$)? E no limite de baixas temperaturas?

(c) Obtenha uma expressão para a entropia por oscilador em função da temperatura.

(d) Encontre uma expressão para o calor específico. Esboce um gráfico do calor especifico contra a temperatura. Qual o valor do calor específico no limite clássico? E no limite de baixas temperaturas?

10. Considere N osciladores localizados em contato com um reservatório térmico com temperatura T. A hamiltoniana desse sistema é

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right] , \tag{8}$$

onde $\{p_i\}$ são variáveis de momento; $\{q_i\}$ variáveis de posição; e k uma constante relacionada com a frequência de oscilação.

(a) Usando o *teorema da equipartição da energia*, diga qual o valor esperado da energia $\langle E \rangle$ desse sistema;

(b) Agora, determine $\langle E \rangle$ usando o formalismo do ensemble canônico. Compare o resultado com o valor obtido no item anterior.