8^o Lista de Exercícios de Física Estatística

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

July 6, 2013

1. Mostre que a entropia no ensemble grande canônico pode ser escrita na forma

$$S = -k_B \sum_{\nu} P_\nu \ln P_\nu, \tag{1}$$

com a probabilidade P_ν dada pela equação

$$P_\nu = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta E_\nu + \beta\mu N_\nu}. \tag{2}$$

2. Mostre que, no ensemble grande canônico, os valores esperados da energia e do número de partículas são dados, respectivamente, por

$$\langle E_\nu \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi + \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi, \tag{3}$$

$$\langle N_\nu \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi \tag{4}$$

3. Considere um gás ideal monoatômico clássico no ensemble grande canônico. Esse gás é constituído por partículas de massa m; está dentro de uma região de volume V; e em contato com um reservatório de calor e de partículas, que define a temperatura T e o potencial químico μ. Determine o valor esperado da energia e o valor esperado do número de partículas.

4. Mostre que o desvio quadrático médio do número de partículas no ensemble grande canônico pode ser expresso pela formula

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N_\nu^2 \rangle - \langle N_\nu \rangle^2 = z \frac{\partial}{\partial z} \left[z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi(\beta, z) \right]. \tag{5}$$

Obtenha uma expressão para o desvio relativo

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle}}{\langle N_\nu \rangle} \tag{6}$$

no caso de um gás ideal clássico monoatômico.

5. Considere um gás clássico ultra-relativístico, definido pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} c |\vec{p}_i|, \tag{7}$$

onde a constante c é positiva, dentro de uma região de volume V, em contato com um reservatório de calor e de partículas, que define a temperatura T e o potencial químico μ. Mostre que a grande função de partição desse sistema é dada por

$$\Xi = e^{zV\frac{8\pi}{(h\beta c)^3}}. \tag{8}$$

Determine o grande potencial termodinâmico.

6. Mostre que um gás formado de bósons ou um gás de férmios apresentam:

   a) Grande Função de partição

$$\ln \Xi_{FD,BE} = \pm \sum_{\nu} \ln \left[1 \pm e^{-\beta(\epsilon_\mu - \mu)}\right]; \tag{9}$$

   b) número esperado de partículas no estado quântico ν

$$\langle n_\nu \rangle_{FD,BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\nu - \mu)} \pm 1} \tag{10}$$

7. Para o caso de bósons, faça um gráfico de $\langle n_\nu \rangle$ em função da energia ϵ_ν. O que acontece para $\mu \to 0^-$?

8. Para o caso de férmions, faça um gráfico de $\langle n_\nu \rangle$ em função da energia ϵ_ν, quando $T >> 0$. Faça também para $T \to 0$?

9. Mostre que no limite clássico $\langle n_\nu \rangle = e^{-\beta(\epsilon_\nu - \mu)}$.

10. Mostre que a entropia de uma gás ideal quântico pode ser escrita na forma

$$S = -k_B \sum_j \left[f_j \ln f_j \pm (1 \mp f_j) \ln(1 \mp f_j)\right], \tag{11}$$

   onde o sinal superior (inferior) se refere a férmions (bósons) e

$$f_j = \langle n_j \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} \pm 1} \tag{12}$$

   é a distribuição de Fermi-Dirac (Bose-Einstein). Mostre que este resultado também é válido no limite clássico.

11. Mostre que no limite clássico, um gás quântico (férmions ou bósons) obedece à distribuição de Maxwell-Boltzman

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{-\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}. \tag{13}$$

   Usando essa distribuição, determine o valor esperado da velocidade e o valor esperado da energia cinética.

12. Mostre que, no ensemble grande canônico, o valor esperado da energia é dado por

$$\langle E_\nu \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi + \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi. \tag{14}$$