Suplemento – Roteiro 2

GEX 132 Laboratório de Física I

**Título**: Gráficos em Papel Milimetrado

**Objetivos**:

Gráficos são utilizados com o intuito de representar a dependência entre duas ou mais grandezas (físicas, geométricas, etc).

As principais vantagens de uma representação gráfica são:

1) Apresentação de resultados numa forma compacta e suscinta;
2) Facilidade para comparação de grandezas;
3) Indicação explícita da dependência funcional: permite visualizar a existência de eventuais pontos de máximos, mínimos ou de inflexão; muitas vezes é possível também determinar a relação matemática de dependência entre duas grandezas;
4) Facilidade para a interpolação e extrapolação de dados.

**Introdução**:

**Diagramas Cartesianos**

A dependência funcional entre duas variáveis físicas sempre pode ser representada em um diagrama cartesiano plano, ou seja, utilizando dois eixos perpendiculares, por exemplo, para os eixos $x$ e $y$, cada qual representando uma das duas variáveis envolvidas.

As escalas utilizadas em tais diagramas cartesianos podem ser de dois tipos:

**1) Escala Linear**

Nas escalar lineares, as unidades de comprimento utilizadas em cada eixo do diagrama cartesiano, são proporcionais a cada grandeza física em questão.

**1.a) Proporção de representação numa escala linear**

A proporção de representação ( $p$ ) numa escala linear é a razão entre a variação máxima da grandeza física medida e o comprimento do papel disponível:

$$p=\frac{\Delta G}{\Delta L}=\frac{\textit{variação máxima da grandeza}}{\textit{comprimento do papel}}.$$

É fácil perceber que o valor obtido para $p$ pode ser um número fracionário. Sempre que possível, convém adotar, $p=(1,2, ou\ 5)\times 10^{n}$ sendo $n\in\mathbb{Z}$ .

Exemplos:

Para $p=1.35$ , convém usar $p=2=2\times 10^{0}$

$p=0.38$ , convém usar $p=0.5=5\times 10^{-1}$

$p=14=1.4\times 10^{1}$ , convém usar $p=2\times 10^{1}$

$p=728.3=0.7283\times 10^{3}$ , convém usar $p=1\times 10^{3}$

**1.b) Exemplo prático**

Uma esfera executa um movimento retílineo uniforme. As posições ocupadas pela esfera em função do tempo são informadas na tabela abaixo:

| $S(cm)$ | 3.2 | 6.3 | 7.9 | 12.2 | 14.8 | 18.1 | 22.4 | 23.7 | 28.4 | 30.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t(s)$ | 0.81 | 2.20 | 2.74 | 3.85 | 5.12 | 6.23 | 7.26 | 7.94 | 9.27 | 9.81 |

com erros dos instrumentos de medidas dados por $\Delta S_{inst}=0.1\,cm$ e $\Delta t_{inst}=0.01\,s$ .

A área de papel milimetrado a ser usada para o gráfico deste exemplo apresenta as dimensões de $120\,mm\times80\,mm$ . Sempre que possível, utilizamos o papel gráfico de maneira que a razão do comprimento do eixo $y$ e do eixo $x$ , $y/x$ , seja menor que $1$ . Logo, o cálculo da proporção de representação do tempo $t$ no eixo das abscissas $x$ e da posição $S$ no eixo das ordenadas $y$ será:

$$p_x=\frac{(9.81-0.81)\,s}{12\,cm}=\frac{9\,s}{12\,cm}=0.75\,s/cm \quad \text{, e escolher} \quad p_x=1\,s/cm=1\times10^0\,s/cm \quad ,$$
$$p_y=\frac{(30.2-3.2)\,cm}{8\,cm}=\frac{27\,cm}{8\,cm}=3.375\,cm/cm \quad \text{, e escolher} \quad p_y=5\,cm/cm=5\times10^0\,cm/cm \quad .$$

Portanto, cada centímetro no eixo correspondente ao tempo equivale a 1 segundo e cada centímetro no eixo correspondente à posição equivale a 5 centímetros.

### 2) Escala Funcional

Nas escalas funcionais, as unidades de comprimento utilizadas em cada eixo do diagrama cartesiano, são proporcionais a uma certa função da grandeza física em questão. Um exemplo de escala funcional é a escala logarítmica, na qual os comprimentos utilizados são proporcionais ao logaritmo de cada grandeza representada.

**Construção de diagramas cartesianos**:

Um gráfico nada mais é que uma figura, e é adequado escolher seu tamanho de modo que se ajustem na folha de papel do seu texto (seu caderno de laboratório, relatório, etc), ocupando uma área não maior que a metade da folha. Este é um critério meramente baseado no fato de que dificilmente um leitor focaliza uma área maior que essa a uma distância normal de leitura.

Após escolher a proporção de representação para cada grandeza física, é necessário distribuir os pontos experimentais no papel gráfico, correspondentes a cada par ordenado $(x,y)$ , por exemplo $(t,S)$ do exemplo prático discutido acima.

O tamanho de cada ponto experimental no gráfico deve ser suficiente para permitir uma fácil visualização do ponto. Nunca se deve indicar os valores individuais de um dado ponto no gráfico, somente múltiplos inteiros do valor adotado para a proporção de representação de cada eixo é que devem ser informados.

É também objetivo desse material suplementar fazer com que os alunos percam, definitivamente, o hábito de unir "dois a dois" os pontos de um gráfico, produzindo informações sem nenhum significado para as grandezas físicas envolvidas.

Assim sendo, traçar uma curva significa escolher uma curva que melhor ajusta todo o conjunto de pontos. Convém escolher essa curva de maneira que passe pelo maior número possível de pontos no gráfico, mas também de forma que o número de pontos que ficarem acima da curva traçada seja aproximadamente igual ao número de pontos abaixo da curva. É importante enfatizar que o primeiro e o último pontos de um gráfico não são, de forma alguma, mais especiais que os demais e, portanto, a escolha da curva a ser traçada não deve ser unicamente baseada na suposição errônea de que tais pontos devem pertecer à curva a ser traçada.

Na **Figura 1**, é apresentado um exemplo de construção de gráfico em papel milimetrado. Os dados são aqueles referente ao exemplo prático **1.b** discutido acima, utilizando as proporções de representação para cada eixo cartesiano, adotadas no exemplo.

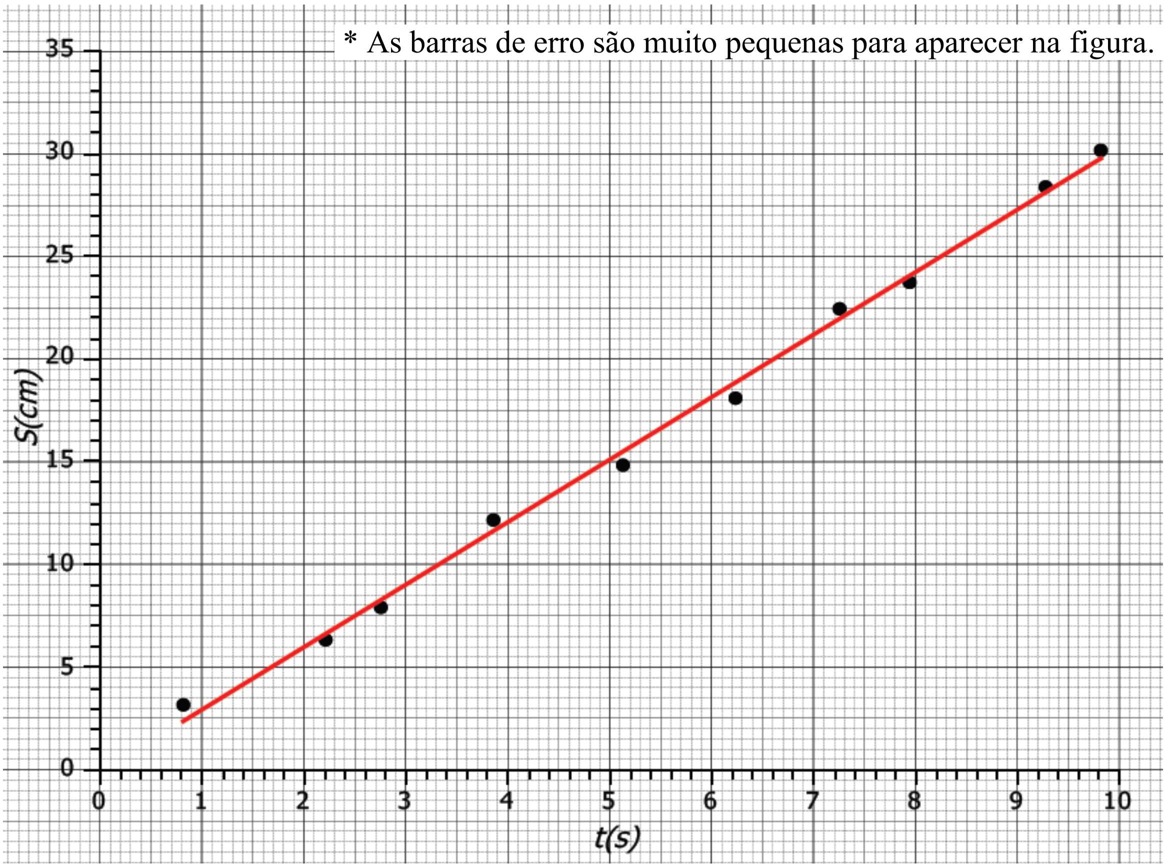


**Figura 1:** Exemplo de gráfico em papel milimetrado.

Sempre que possível, convém denotar no gráfico o ponto e os erros totais associados a cada ponto, $(\bar{S} \pm \Delta S_{total}, \bar{t} \pm \Delta t_{total})$ . Essa informação é denotada em cada ponto do gráfico, na forma de barras de erro. Dessa forma, ao invés de uma medida estar asssociada a apenas um ponto no gráfico, ela estará representada por uma área retangular, a qual, com aproximadamente 68% de probabilidade, representa a localização do ponto dentro do erro total associado a cada grandeza que define o ponto no gráfico. A área ao redor de cada ponto será, portanto, limitada pelo erro total de cada uma das grandezas representadas pelo ponto.

No exemplo prático **1.b** desse suplemento, uma única medida foi efetuada para cada ponto do gráfico. Logo, numa primeira aproximação, o erro estatístico associado a cada grandeza é zero e a média é a própria medida. O erro total é portanto dado apenas pelo erro instrumental. Em casos como nesse exemplo, nos quais os erros são muito pequenos para serem visíveis na escala escolhida no papel gráfico, deve-se anotar ao lado do gráfico: "As barras de erro são muito pequenas para aparecer na figura".

Para efeito de ilustração, as barras de erro num dos pontos do gráfico da **Figura 1** são mostradas **Figura 2**, numa proporção de representação em que são bem visíveis.

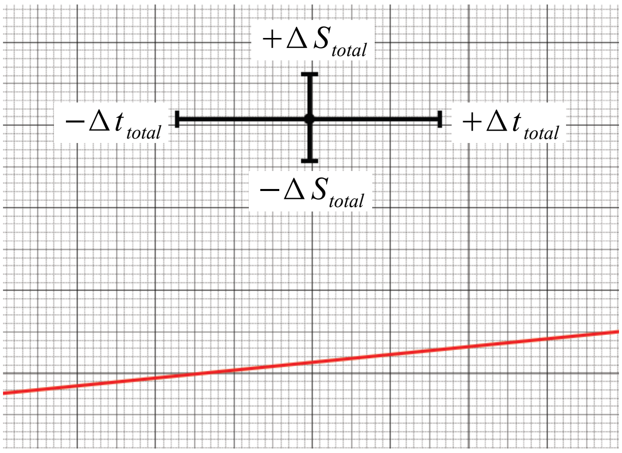

**Figura 2:** Um ponto do gráfico da **Figura 1**, com proporção de representação em escala linear que permite a visualização das barras de erro associadas ao ponto. O tamanho de cada barra é dado pelo erro total de cada grandeza.

**Equação de uma reta média**:

Em física experimental é muito frequente que a relação entre duas grandezas físicas obtidas num gráfico apresente uma relação linear entre as grandezas. Nesses casos o ajuste da curva é feito traçando uma reta que melhor representa o conjunto de pontos experimentais, denominada reta média. Nesses casos em que a curva de ajuste resulta numa reta, a relação de dependência entre as grandezas associadas aos eixos cartesianos é do tipo:

$$y = ax + b \quad ,$$

onde $a$ é o coeficiente angular e $b$ é o coeficiente linear da reta média. O coeficiente linear é obtido diretamente do gráfico, no ponto em que a reta média cruza o eixo das ordenadas, ou seja, é o valor da grandeza associada ao eixo $y$ quando o valor da grandeza associada ao eixo $x$ é zero.

O coeficiente angular da reta média é obtido escolhendo arbitrariamente dois pontos que pertencem à reta média. É importante enfatizar que, a rigor, pontos experimentais não podem ser considerados como pontos da reta média para o cálculo do coeficiente angular, pois existem erros associados a tais pontos e, em geral, não pertencem exatamente à reta média traçada.

O coeficiente angular de uma reta não deve ser confundido com a tangente trigonométrica $\tan\alpha$ do ângulo $\alpha$ que a reta forma com o eixo das abscissas. Escolhendo dois pontos da reta média $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ , a definição do coeficiente angular da reta é:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_y \Delta Y}{p_x \Delta X} \quad ,$$

onde $p_x$ e $p_y$ são as proporções de representação de cada grandeza nos eixos cartesianos, e são os comprimentos (medidos, e.g., usando o próprio papel milimetrado) indicados na **Figura 3**.

A relação entre o ângulo $\alpha$ (conforme **Figura 3**) e o coeficiente angular da reta é dada por:

$$a = \frac{p_y}{p_x} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{p_y}{p_x} \tan\alpha$$

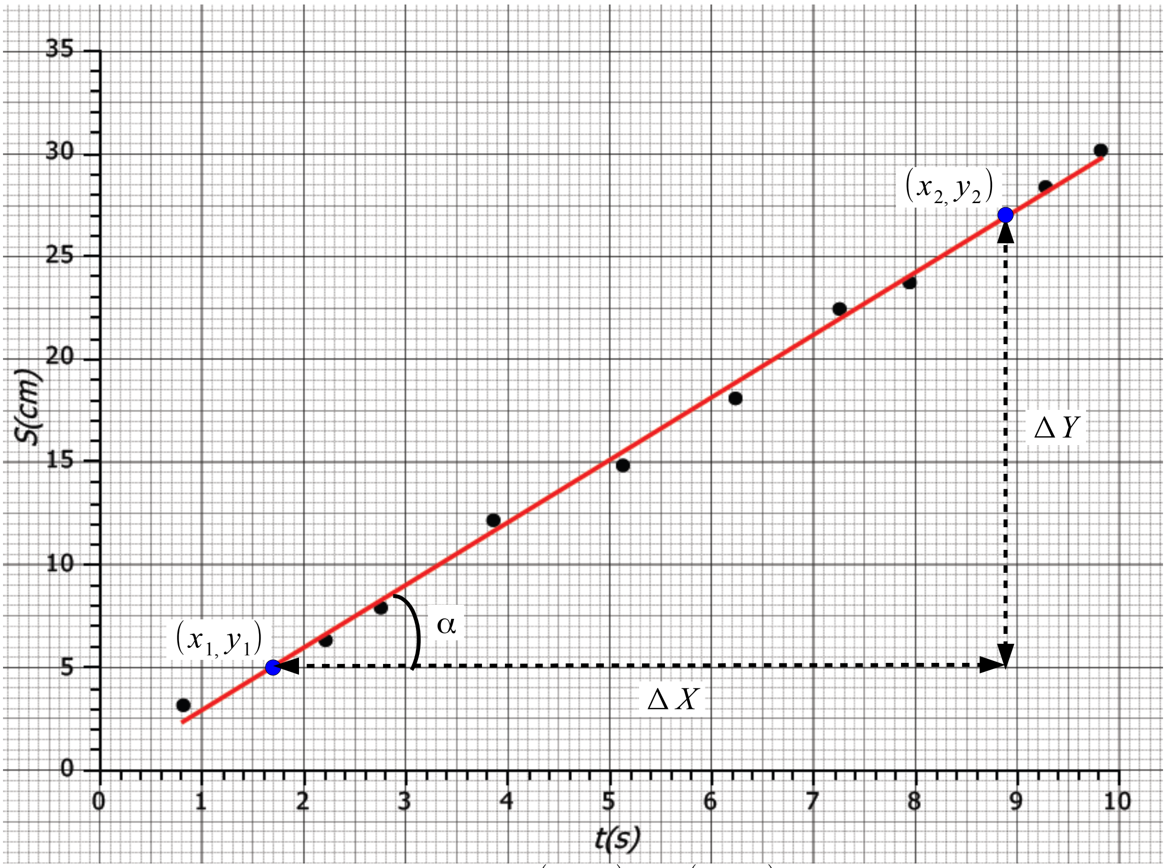


**Figura 3:** Indicação dos pontos (em azul) $(x_{1,}y_1)$ e $(x_{2,}y_2)$ escolhidos para o cálculo do coeficiente angular da reta média $a$ , e dos parâmetros para o cálculo da tangente $\tan\alpha$ .

É importante atentar para o fato de que o coeficiente angular da reta média somente será, numericamente, igual à tangente trigonométrica em situações em que a proporção de representação dos eixos cartesianos forem iguais, ou seja $p_y/p_x=1$ .

Logo, para o exemplo prático **1.b**, e usando a **Figura 3**, ao fazer uma extrapolação da reta média em direção ao eixo vertical, é possível obter visualmente o valor do coeficiente linear da reta média que, nesse exemplo, é $b=0$ . Ao usar os pontos indicados na **Figura** 3, o coeficiente angular da reta média vale:

$$a=\frac{(27.5-5.0)\,cm}{(8.9-1.7)\,s}=\frac{22.5\,cm}{7.2\,s}\approx 3.1\,cm/s \quad ,$$

o qual é também a velocidade da esfera deste exemplo. O cálculo do erro para medidas obtidas indiretamente será abordado mais adiante neste curso. Calculando a $\tan\alpha$ , com $\Delta X=7.2\,cm$ e $\Delta Y=4.4\,cm$ e $p_y/p_x=5$ , o resultado para a velocidade da esfera é aproximadamente o mesmo. No entanto, nesta situação, o erro associado à medida de $\Delta X$ e $\Delta Y$ , ou seja, a menor escala do papel, pode ser adotado, em primeira aproximação, como erro cometido na medida indireta da velocidade da esfera e, portanto, $\bar{v}\pm\Delta v=(3.1\pm0.1)\,cm/s$ .


**Bibliografia**:

[1] Laboratório de Mecânica da Partícula, UNIP, A. F. Lauricella, et. al., ed. Kaizen (2007).
[2] Guia para Física Experimental, Caderno de Laboratório, Gráficos e Erros, Instituto de Física, Unicamp, C. H. de Brito Cruz, et. al., ver. 1.1 ( 1997). www.ifi.unicamp.br/~brito/graferr.pdf