4^o Lista de Exercícios de Física Estatística

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

May 20, 2013

1. Obtenha uma expressão para o volume de uma hiperesfera de raio R num espaço de d dimensões.

2. Utilize o resultado do exercício anterior para calcular o volume do espaço de fase acessível a um gás clássico de N partículas monoatômicos, dentro de um recipiente de volume V, com energia entre E e $E+\delta E$ (com $\delta E << E$). Qual a forma da função entropia $S = S(E, V, N)$ desse sistema? Há algum tipo de problema nesse cálculo?

3. Considere um oscilador harmônico unidimensional com energia entre E e $E + \delta E$. O hamiltoniano clássico desse sistema é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

   onde m é a massa e $k > 0$ é a constante de mola. Mostre que o espaço de fase acessível ao sistema é dado por

$$\Omega(E, \delta E) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\delta E \tag{2}$$

4. Considere N bolinhas e V caixinhas, com $N \leq V$. Para cada um dos itens abaixo, determine o número de configurações possíveis:

   (a) Bolinhas iguais (Indistinguíveis) e cada caixinha suporta qualquer número de bolinhas;

   (b) Bolinhas são enumeradas (Distinguíveis) e cada caixinha suporta apenas uma única bolinha;

   (c) Bolinhas iguais (Indistinguíveis) e cada caixinha suporta apenas uma única bolinha;

5. Considere um gás de rede de N partículas distribuídas em V células (com $N \leq V$). Suponha que cada célula possa estar vazia ou então ser ocupada por uma partícula. Mostre que o número de estados microscópicos desse sistema é dado por

$$\Omega(V, N) = \frac{V!}{N!(V-N)!}. \tag{3}$$

   Obtenha uma expressão para a entropia por partícula, $s = s(v)$, onde $v = V/N$. A partir dessa equação fundamental, obtenha uma expressão para a equação de estado p/T. Escreva uma expansão de p/T em termos da densidade $\rho = 1/v$. Mostre que o primeiro termo dessa expansão fornece a lei de Boyle (dos gases ideais). Esboce um gráfico de μ/T, onde μ é o potencial químico, contra a densidade ρ. Qual é o comportamento do potencial químico nos limites $\rho \to 0$ e $\rho \to 1$?

6. Mostra que, para um sistema composto por N spins "1/2" e portanto cada spin pode assumir dois estados quânticos, o número de configurações possíveis desse sistema será

$$\Omega = \frac{N!}{N_1! N_2!}. \tag{4}$$

Aqui, N_1 e N_2 representam a quantidade de spins em cada um dos dois estados quânticos possíveis.

7. O número total de estados microscópicos acessíveis a um gás de Boltzmann, com energia E e N partículas, pode ser escrito na forma

$$\Omega(E, N) = \sum_{N_1, N_2, \cdots} \frac{N!}{N_1! N_2! \cdots}, \tag{5}$$

com as restrições

$$\sum_j N_j = N \tag{6}$$

e

$$\sum_j \epsilon_j N_j = E. \tag{7}$$

A menos de uma constante aditiva, mostre que a entropia por partícula é dada por

$$s = -k_B \sum_j \left(\frac{\tilde{N}_j}{N} \right) \ln \left(\frac{\tilde{N}_j}{N} \right) \tag{8}$$

onde $\{\tilde{N}_j\}$ é o conjunto dos números de ocupação no equilíbrio. No limite contínuo do gás de Boltzmann, mostre que a entropia depende da temperatura de acordo com um termo da forma $-k_B T \ln T$.