Projeto 6: Modelo de West et all

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

July 1, 2013

Conside o modelo de crescimento populacional dado por

$$\frac{d}{dt}N(t) = aN^{\beta} - bN. \tag{1}$$

Esse modelo será referido aqui por modelo de West et all, pois foi aplicado por esses pesquisadores no estudo de crescimento de indivíduos [1, 2]. Na equação (1), $N(t)$ é a população no intante t, enquanto que a, b e β são os parâmetros do modelo.

Mostre que o modelo tem solução

$$N(t) = \left[\frac{a}{b} + \left(N_0^{1-\beta} - \frac{a}{b}\right) e^{b(\beta-1)t}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{2}$$

1 Análise do caso particular $\beta < 1$ e $b > 0$

1. Mostre que para o caso particular $\beta < 1$ e $b > 0$, a população converge para um valor (capacidade de carregamento) dado por

$$K = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{3}$$

2. Introduza o resultado (3) no modelo (1) e mostre que, nesse caso particular, o modelo de West et all leva ao modelo *theta-logistico*[3]

$$\frac{d}{dt}N = rN\left[1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right] \tag{4}$$

onde $r \equiv -b$ e $\theta \equiv \beta - 1$.

3. Mostre também que a solução (2) fica, neste caso particular , como

$$N(t) = \left[K^{1-\beta} + \left(N_0^{1-\beta} - K^{1-\beta}\right) e^{b(\beta-1)t}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{5}$$

Dessa forma, com o conhecimento da capacidade de carregamento K, a solução fica independente do parâmetro a.

4. Usando alguns valores arbitrários de K, b e β na solucao (5) (restrito a $\beta < 1$ e $b > 0$), faça graficos da evolução da população $N(t)$ com o tempo. Note que inicialmente a população cresce rapidamente ou lentamente, de acordo com b e β, e depois converge para K.

5. Considere agora as definições $q \equiv \beta - 1$ e $r_q \equiv r.q$. Substitua essas definições e o resultado (3) em (1) e mostre que o modelo de West et all pode ser escrito em termos do modelo generalizado tipo Richards (veja projetos anteriores), dado por

$$\frac{d}{dt}N = -r_q N \ln_q\left(\frac{N}{K}\right) \tag{6}$$

2 Análise do caso Particular $b > 0$ e $\beta > 1$

1. Mostre que, no caso particular $b > 0$ e $\beta > 1$, a solução (2) prevê uma divergencia da população.

2. Faça graficos da evolução temporal da população usando valores de $b > 0$ e $\beta > 1$. Nesses gráficos, evidencie a divergencia da população.

3 Análise do caso particular $b \to 0$: Modelo de Von Foester

Quando $b \to 0$, o modelo de West et all (1) recupera o modelo de Von Foester (veja projeto 4):

$$\frac{d}{dt}N = rN^{1-q}, \tag{7}$$

onde $r = a$ e $\beta = 1 - q$.

Mostre que, fazendo o limite $b \to 0$ na solucao (2), chega-se à solução do modelo de Von Foester

$$N(t) = N_0 e_q \left(\frac{r}{N_0^q} t \right), \tag{8}$$

References

[1] Geoffrey B. West, James H. Brown and Brian J. Enquist. *A general model for ontogenetic growth*. NATURE, VOL 413, 11 OCTOBER 2001.

[2] Van M. Savage, West et all. *Scaling of number, size, and metabolic rate of cells with body size in mammals*. PNAS, 4718-4723, March 13, 2007 vol. 104 no. 11.

[3] Richard M. Sibly et al. *On the Regulation of Populations of Mammals, Birds, Fish, and Insects*. DOI: 10.1126/science.1110760 Science 309, 607 (2005).

[4] Alexandre Souto Martinez (PDF). Modelos Matemáticos, Probabilísticos e Computacionais.

[5] Fabiano Ribeiro, Brenno Caetano Troca Cabellab , Alexandre Souto Martinez (PDF). A Verhulst-Like Two-Species Population Dynamics Model

[6] Brenno Caetano Troca Cabella, and Alexandre Souto Martinez, Fabiano Ribeiro (PDF). Data Collapse, Scaling Functions and New Analytical Solutions of Generalized One-Species Population Dynamics Models