Projeto 7: Crescimento Animal

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

July 23, 2013

Considere B_c a quantidade de energia gasta por uma única célula durante um intervalo de tempo dt. Considere também E_c como a energia necessária para se criar uma única célula. A energia total metabolizada por um animal num intervalo de tempo deve ser a soma entre: a energia total para manter as células já existentes (manutenção), e a energia total gasta para se criar células novas (crescimento). Ou seja:

Energia total metabolizada = Energia gasta em manutenção + energia gasta no crescimento.

Dessa forma, deve valer a relação

$$B = NB_c + E_c \frac{dN}{dt}, \tag{1}$$

onde B é a energia metabólica; N o número total de células do animal; e dN o número de células criadas no intervalo de tempo dt.

1. Considere:
   - massa do animal pode ser escrita como $M = Nm_c$;
   - m_c é o valor médio da massa celular;
   - vale a propriedade halométrica $B = B_0 M^{\beta}$, com $\beta = 3/4$ (Lei de Kleiber) e B_0 uma constante universal.

   Mostre que

   $$\frac{dM}{dt} = aM^{\beta} - bM, \tag{2}$$

   onde

   $$a \equiv \frac{B_0 m_c}{E_c} \tag{3}$$

   $$b \equiv \frac{B_c}{E_c}. \tag{4}$$

2. Mostre que a equação diferencial (2) tem solução

   $$M(t) = \left[\frac{a}{b} + \left(M_0^{\frac{1}{4}} - \frac{a}{b}\right) e^{-\frac{bt}{4}}\right]^4 \tag{5}$$

   onde $M_0 \equiv M(t=0)$ é a massa do animal no momento do nascimento.

3. Mostre que na maturidade ($t \gg 1$) o animal converge para uma massa

   $$M_{sat} \equiv M(t \gg 1) = \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{B_0 m_c}{B_c}\right)^4 \tag{6}$$

4. Na webpage do curso, encontra-se disponível os dados experimentais de 4 espécies de animais: lebiste, porquinho da india, galinha e vaca. Os arquivos com os dados são: lebiste.dat, porcoindia.dat, galinha.dat e vaca.dat. Esses contém dados dispostos em duas colunas: na coluna 1 temos o tempo (em dias), e na coluna 2 temos a respectiva massa (em gramas). Faça um gráfico para cada especie, confrontando dados experimentais e o fitting dado pela equação (5). Obs. Faça um gráfico para cada espécie. Quais os valores obtidos (via fitting) para os parâmetros a, b, M_0 e M_{sat} para cada espécie?

5. Os parâmetros m_c e E_c são *Invariantes*, ou seja, assumem os mesmos valores independentemente do tamanho da especie (escalam com M^0). Porém, o parâmetro B_c não é invariante, ou seja , obedece uma escala halométrica com a massa. Mostre que B_c obedece $B_c \sim M^{-\frac{1}{4}}$. O que isso significa em termos de otimização energética e a massa corporal?

6. Note que o parâmetro a só depende de parâmetros invariantes. Dessa forma, a é uma invariante também ($a \sim M^0$). Assumindo alguns valores da literatura:

   $B_0 = 1,9.10^{-2}$ watts,

   $m_c = 3.10^{-9}$g,

   $E_c = 2,1.10^{-5}$J,

   determine o valor de a. Compare com os valores obtidos de a na questão (4) para cada uma das especies analisadas.

7. Mostre que a solução (5) também pode ser escrita pela forma

$$r = 1 - e^{-\tau}, \tag{7}$$

   onde

$$r \equiv \left(\frac{M}{M_{sat}}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{8}$$

   e

$$\tau \equiv -\log\left[1 - \left(\frac{M_0}{M_{sat}}\right)^{\frac{1}{4}}\right] + \frac{at}{4M_{sat}^{\frac{1}{4}}} \tag{9}$$

   é o tempo reescrito numa escala apropriada.

8. Mostre que r nada mais é que a razão entre a energia alocada para manutenção ($N.B_c$) e a energia total B. Ou seja,

$$r = \left(\frac{M}{M_{sat}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{NB_c}{B} \tag{10}$$

9. Preencha a seguinte tabela para cada uma das quatro espécies de animais cujos dados estão nos arquivos citados na questão (4). Note que as primeiras duas colunas das tabelas serão preenchidas com os dados experimentais contidos nos arquivos (uma tabela dessa para cada espécie). A terceira coluna será preenchida usando os valores obtidos no fitting: use M da coluna 1 e M_{sat} obtido do fitting da questão (4). A quarta coluna será preenchida usando os valores de M da coluna 1, os valores de t da coluna 2 e os valores de a, b, M_0 e M_{sat} obtidos do fitting da questão (4).

M	t	$r = \left(\frac{M}{M_{sat}}\right)^{\frac{1}{4}}$	τ
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Table 1: Tabela a ser preenchida com os dados experimentais dos arquivos disponíveis na webpage e com os parâmetros obtidos do fitting da questão (4). Note que teremos uma tabela para cada espécie. Total de quatro tabelas.

10. (a) Plote a terceira coluna da tabela acima em função da quanta coluna. Repita o mesmo procedimento para as quatro especies de animais cujos dados estão disponíveis. Faça todos os plots num mesmo gráfico, i.e. você vai ter, num único gráfico, quatro conjuntos de dados, uma para cada especie. Plote ainda, nesse mesmo gráfico, a função $r = 1 - e^{-\tau}$ para verificar se a função (7) prescreve a tendência dos pontos.
    (b) Verifique o colapso dos dados experimentais. Compare seus resultados com o da referencia [1];
    (c) Note que este gráfico representa a quantidade de energia alocada para o a manutenção em função do tempo relativo. Para tempos pequenos, a energia utilizada para manutenção é minima, mas para tempos longos a energia utilizada para manutenção é máxima (≈ 1).
    (d) Discuta sobre a diferencia em termos morfológicos dessas especies (diferentes escalas de massa) e o colapso desses dados numa mesma curva.

References

[1] Geoffrey B. West, James H. Brown and Brian J. Enquist. *A general model for ontogenetic growth.* NATURE, VOL 413, 11 OCTOBER 2001.

[2] Van M. Savage, West et all. *Scaling of number, size, and metabolic rate of cells with body size in mammals.* PNAS, 4718-4723, March 13, 2007 vol. 104 no. 11.

[3] Richard M. Sibly et al. *On the Regulation of Populations of Mammals, Birds, Fish, and Insects.* DOI: 10.1126/science.1110760 Science 309, 607 (2005).

[4] Alexandre Souto Martinez (PDF). Modelos Matemáticos, Probabilísticos e Computacionais.

[5] Fabiano Ribeiro, Brenno Caetano Troca Cabellab , Alexandre Souto Martinez (PDF). A Verhulst-Like Two-Species Population Dynamics Model

[6] Brenno Caetano Troca Cabella, and Alexandre Souto Martinez, Fabiano Ribeiro (PDF). Data Collapse, Scaling Functions and New Analytical Solutions of Generalized One-Species Population Dynamics Models