Introdução à Teoria de Probabilidades

→ **Problema da Moeda:**

→ Para o lançamento de uma moeda não podemos fazer nenhuma previsão sobre o resultado, se cara ou coroa.

→ Mas se fizermos um numero grande de arremessos podemos dizer que a proporção de caras oscila em torno de um certo valor "p"
($p \approx \frac{1}{2}$ para moeda ñ viciada)

→ Pensamos nessa proporção limite "p" como a "probabilidade" de que a moeda caia em cara.

→ Teo Prob. surgiu no contexto de jogos de azar

→ **Problema de Galileu**

Arremesso de tres dados mostram que os numeros 10 e 11 aparecem mais frequentemente do que 9 e 12

Resposta: Alguns numeros são obtidos mais frequentemente que outros

10 e 11: apresentam 27 formas diferentes de serem obtidos

9 e 12: apresentam 25

∴ 9 e 12 são sorteados com menos frequencia que 10 e 11

Introdução à Teoria

→ Frequência Relativa $= \dfrac{\text{Nº de vezes que o Evento ocorreu}}{\text{Nº total de repetições do experimento}}$

→ **Espaço Amostral**: "Ω"

Conjunto de todos os resultados possíveis do experimento

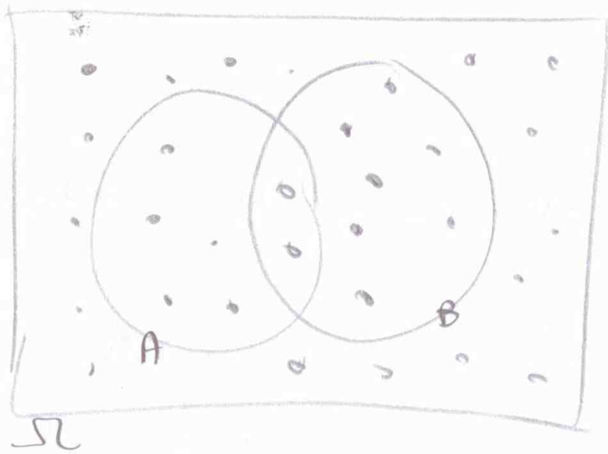
→ **Ponto Amostral**: "ω"

É um dos resultados possíveis do experimento

→ **Probabilidade** $P(\omega)$

Probabilidade de ocorrer o ponto amostral ω

Esquema de um espaço Amostral:



A e B: subconjuntos de Ω

$P(A)$: Probabilidade de cada ponto amostral que $\in A$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \qquad P(B) = \sum_{\omega \in B} P(\omega)$$

ou $P(A) = \dfrac{\#\text{ pontos que} \in A}{\#\text{ total de pontos}}$

Exemplo:

Arremessam duas vezes uma moeda

$$\begin{cases} w_1 = CC \\ w_2 = CR \\ w_3 = RC \\ w_4 = RR \end{cases}$$

$P(w_i) = \frac{1}{4}$ p/ $\forall \ i = 1, \ldots, 4$

Espaço Amostral:

$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

Suponha

A: observação de duas faces iguais

$\therefore \ A = \{w_1, w_4\}$

$$P(A) = P(w_1 \text{ ou } w_2)$$
$$= P(w_1) + P(w_2)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

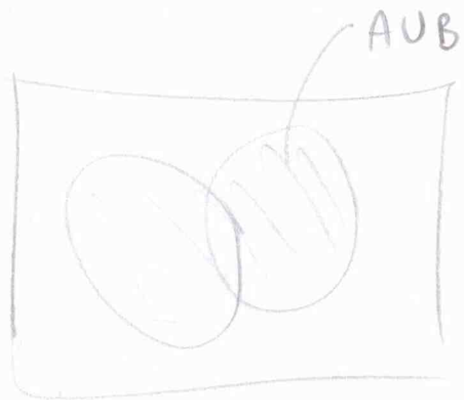
$$\boxed{P(A) = \frac{1}{2}}$$

obs: "ou" = "+"

→ Considerações

$A \cup B$: evento caracterizado por um ponto amostral que está ou em A ou em B

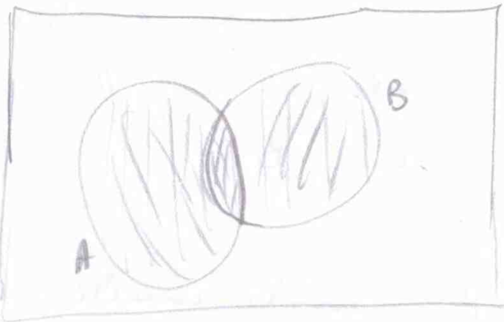
$A \cap B$: evento caracterizado por um ponto que está simultaneamente em A e B



$P(A \cup B) = P(A \text{ "ou" } B)$

$P(A \cap B) = P(A \text{ "e" } B)$

→ Regra da Adição



$$\boxed{P(A \cup B) = P(\text{"A" ou "B"}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

→ Para o caso de eventos independentes 
(A e B mutualmente exclusivos)

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

↳ caso particular

Obs.: Poderia pensar como

$$P(A \cup B) = \sum_{w_i \in (A \cup B)} P(w_i)$$

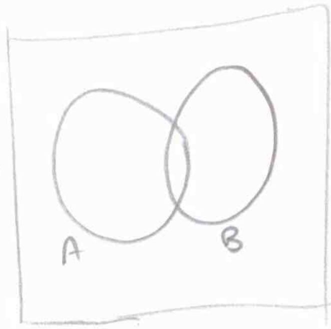
$$= \underbrace{\sum_{w_i \in A} P(w_i)}_{P(A)} + \underbrace{\sum_{w_i \in B} P(w_i)}_{P(B)} - \underbrace{\sum_{w_i \in A \cap B} P(w_i)}_{P(A \cap B)}$$

$$\therefore \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

→ Regra do Produto e Probabilidade Condicional

t: sorteio

t=1



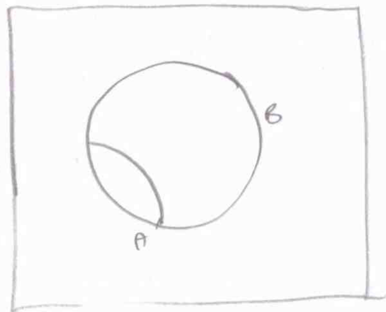
Ω_1

$$\Omega_1 = (A \cup B) + (A \cup B)^c$$

$$P(A) = \sum_{i \in A} P(w_i)$$

Suponha que no sorteio $t=1$ tenha ocorrido $w_i \in B$; suponha que esse fato influencie o sorteio $t=2$ no sentido de só ser possível com eventos $\in B$

t=2



Ω_2

$$\Omega_2 = B$$

$$P(A|B) = \sum_{w_i \in A \cap B} P(w_i)$$

$$P(A|B) = \frac{\#\text{eventos de } A \cap B}{\#\text{eventos de } B} = \frac{\frac{\#\text{eventos de } A \cap B}{\#\text{total de eventos}}}{\frac{\#\text{eventos de } B}{\#\text{total de eventos}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade Condicional:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

analogamente $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Regra do Produto

$$P(A \cap B) = P(A \text{ e } B)$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

→ Exemplo:

Problema do arremesso de duas moedas

$w_1 = CC$ $\qquad P(w_1) = 1/4$

$w_2 = CR$ $\qquad P(w_2) = 1/4$

$w_3 = RC$ $\qquad P(w_3) = 1/4$

$w_4 = RR$ $\qquad P(w_4) = 1/4$

→ Suponha que no arremesso da 1ª moeda tenha dado "C"

$\therefore$ $P(w_1|C) = \frac{1}{2}$

$P(w_2|C) = \frac{1}{2}$

$P(w_3|C) = 0$

$P(w_4|C) = 0$

→ Caso particular em que os eventos são independentes:

$$P(A|B) = P(A)$$

independe de B

$$\therefore \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Quando A e B são independentes

→ Note que

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \text{ "ou" } B) \Rightarrow \text{Soma}: P(A) + P(B) \\ P(A \text{ "e" } B) \Rightarrow \text{Produto}: P(A) \cdot P(B) \end{array}}$$

Exemplo: lançamento de um dado

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$\vdots$

$x_6 = 6$

$P(X = x_i) = \frac{1}{6}$ p/ $\forall x_i$

lançamento de moeda

$\begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = R \end{cases}$

$P(X = x_1) = \frac{1}{2}$

①

→ Variaveis Aleatórias Discretas

$\bar{X}$: representação de uma variável aleatória (v.a.)

x : valor específico que a v.a. $\bar{X}$ pode assumir

$P(\bar{X} = x)$: Probabilidade de que a v.a. assuma o valor específico "x"

$(x, P(\bar{X} = x))$: função de probabilidades da v.a. $\bar{X}$

→ Suponha que $\bar{X}$ possa assumir n valores :

$x_1, x_2, \dots, x_n$

& podemos associar o par $(x, P(\bar{X}=x))$ para cada um dos "n" valores temos uma "Distribuição

$\{(x_i, P(\bar{X}=x_i))\}_{i=1,\dots n}$: distribuição de probabilidades

→ Exemplo : Urna com :

- 3 Bolas Vermelhas
- 2 Bolas Brancas

→ Façamos "2" extrações sem reposição.

Suponha :

$\bar{X}$: # de vermelhas nas duas extrações

∴ $\bar{X}$ assume "3" valores

$\bar{X} = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\}$

2

→ Probabilidade de cada valor específico de $\bar{X}$:

$$P(\bar{X}=0) = \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Prob. de Ñ dar Verm.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Prob. de Ñ dar Verm. depois de ter saído uma Branca}} = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{X}=1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{10}$$

$$P(\bar{X}=2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Observação:

$$P(\bar{X}=0) + P(\bar{X}=1) + P(\bar{X}=2) =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = 1$$

→ Propriedades de $P(\bar{X}=x)$

• Normalização:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} P(\bar{X}=x_i) = 1}$$

• Valor médio da v.a. $\bar{X}$:

$$\boxed{\langle \bar{X} \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \, P(\bar{X}=x_i)}$$

Também conhecido por valor esperado.

Propriedades do valor médio

① $\langle f(\bar{X}) + g(\bar{X}) \rangle =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) + g(x_i) \right) \cdot P(\bar{X}=x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\, P(\bar{X}=x_i) + \sum_{i=1}^{m} g(x_i)\, P(\bar{X}=x_i)$$

$$= \langle f(\bar{X}) \rangle + \langle g(\bar{X}) \rangle$$

$$\therefore \boxed{\langle f(x) + g(x) \rangle = \langle f(x) \rangle + \langle g(x) \rangle}$$

(2) $$\boxed{\langle c \cdot f(x) \rangle = c \cdot \langle f(x) \rangle}$$

- Desvio da Média

$$\Delta x \equiv x - \langle x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \Delta x \rangle = \langle x - \langle x \rangle \rangle$$

$$= \langle x \rangle - \langle x \rangle$$

$$\therefore \boxed{\langle \Delta x \rangle = 0}$$

desvio da Média tem pouca utilidade

- Desvio Quadrático

$$(\Delta x)^2 = (x - \langle x \rangle)^2$$

- Dispersão, 2º Momento ou Variância:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2$$

$$\boxed{\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\equiv Var[x]$$

$$\therefore \boxed{Var[x] = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

(4)

→ Exemplos de distribuições de v.a. discretas

→ Distribuição Uniforme

v.a. X tem a mesma probabilidade de assumir qualquer um dos "n" valores possíveis

$$\therefore \boxed{P(X = x_i) = C}$$

constante que independe de "i"

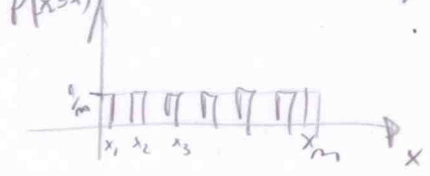
Pela Propriedade da Normalização

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} C = 1$$

$$\Leftrightarrow n \cdot C = 1$$

$$C = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \boxed{P(X = x_i) = \frac{1}{n}}$$



Exemplo: Dado

$$P(X = x_i) = \frac{1}{6}$$

$$X = \{x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6\}$$

Valor médio:

$$\Rightarrow \langle X \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

→ Distribuição de Bernoulli

Suponha que a v.a. X só possa assumir 2 valores:

$$X = \{x_1 = 1, x_2 = 0\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 1 & \text{p/ sucesso} \\ x_2 = 0 & \text{p/ fracasso} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = q \end{array}\right\}$$ → Exemplo: Probabilidade de sair coroa na moeda

$$\left\{\begin{array}{l} p: \text{probabilidade de sucesso} \\ q: \text{probabilidade de fracasso} \end{array}\right.$$

→ Propriedade da Normalização

$$\sum_{i=1}^{2} P(X = x_i) = p + q = 1 \Rightarrow \boxed{p = 1 - q}$$

Valor Médio

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i \, P(X = x_i)$$

$$= 0 \cdot q + 1 \cdot p$$

$$\therefore \boxed{\langle X \rangle = p}$$

Variancia:

$$\mathrm{Var}[X] = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \, P(X = x_i)$$

$$= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p$$

$$\langle X^2 \rangle = p$$

$$\therefore \mathrm{Var}[X] = p - p^2$$

$$= p\underbrace{(1-p)}_{q}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}[X] = p \cdot q}$$

→ Distribuição Binomial

Imagine que repetimos o ensaio de Bernoulli por "N" vezes.

de modo que um resultado não interfere no outro (independência).

→ Por exemplo, arremessar $N = 5$ vezes uma mesma moeda.

Um resultado possível:

$$(0, 1, 1, 0, 1)$$

Suponha

X: # total de sucessos após "N" repetições do ensaio de Bernoulli

$X = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$

No exemplo acima $X = 3$

→ O resultado deste exemplo tem a mesma probabilidade de ocorrer que o outro exemplo

(1, 1, 1, 0, 0)

(se há independência) ??

⑥

· Na verdade ambos possuem a probabilidade

$p^3 \cdot q^2$ de ocorrer.

Pois estamos interessados no numero de sucesso e não de sua ordem.

→ Podemos generalizar:

Para $X = K$ sucessos

a probabilidade de ocorrer uma configuração que resulte em K sucessos será:

$$p^K \cdot q^{N-K}$$

→ Mas temos Ω configurações que resultam em K sucessos

→ Note Ω é uma combinação de N tomados K a K

$$\therefore \; \Omega = \frac{N!}{(N-K)!\,K!} = \binom{N}{K}$$

$$\therefore \; \boxed{P(X=K) = \binom{N}{K} p^K \cdot q^{N-K}}$$

→ distribuição Binomial

→ Propriedades:

• Ela já está normalizada

obs. Formula do Binômio

$$\sum_{K=0}^{N} \frac{N!}{(N-K)!\,K!} p^K q^{N-K} = (p+q)^N = 1$$

Mas pela definição de ensaio de Bernoulli

$$p + q = 1$$

$$\therefore \; \boxed{\sum_{K=0}^{N} P(X=K) = 1}$$

Valor Médio:

$$\langle x \rangle = \sum_{K=0}^{N} K \frac{N!}{(N-K)!\,K!} p^K \cdot q^{N-K}$$

obs.: $\frac{\partial}{\partial p} p^K = K \cdot p^{K-1} = \frac{K}{p} p^K$

$$\langle x \rangle = \sum_{K=0}^{N} p \left(\frac{K p^K}{p} \right) \binom{N}{K} q^{N-K}$$

$$= \sum_{K=0}^{N} p \frac{\partial}{\partial p} p^K \binom{N}{K} q^{N-K}$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial p} \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K q^{N-K}$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N$$

$$= p \cdot N \underbrace{(p+q)}_{1}^{N-1}$$

$$\therefore \boxed{\langle x \rangle = N \cdot p}$$

Calculo de $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{K=0}^{N} K^2 \frac{N!}{(N-K)!\,K!} p^K q^{N-K}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} p^K = K p^{K-1} = \frac{K}{p} p^K$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} p^K = K(K-1) \cdot p^{K-2}$$

$$= K^2 \frac{p^K}{p^2} - K \frac{p^K}{p^2}$$

$$K^2 p^K = p^2 \frac{\partial^2 p^K}{\partial p^2} + \cancel{p^2} K \frac{p^K}{\cancel{p^2}}$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{K=0}^{N} p^2 \frac{\partial^2 p^K}{\partial p^2} \binom{N}{K} q^{N-K} + \sum_{K=0}^{N} K p^K \binom{N}{K} q^{N-K}$$

$$\langle x^2 \rangle = p^2 \frac{\partial^2}{\partial p} \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K \cdot q^{N-K} + \langle x \rangle$$

$$= p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left[(p+q)^N \right] + \underbrace{\langle x \rangle}_{= p \cdot N}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = N \cdot (p+q)^{N-1}$$

$p+q=1$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} (\ldots) = N \cdot (N-1)(p+q)^{N-2} = N(N-1)$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = p^2 \cdot N(N-1) + pN}$$

⑧

Variancia : $Var[\bar{x}] = ??$

$$Var[\bar{x}] = \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2$$

$$= p^2 N(N-1) + p\cdot N - (pN)^2$$

$$= \cancel{p^2 N^2} - p^2 N + pN - \cancel{p^2 N^2}$$

$$= Np\cdot \underbrace{(1-p)}_{=q}$$

$$\therefore \boxed{Var[\bar{x}] = N\cdot p\, q}$$

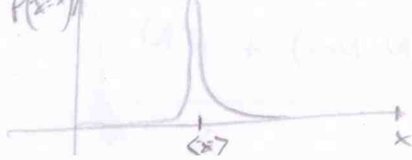
→ Desvio padrão :

$$\sigma \equiv \sqrt{Var[\bar{x}]}$$

$$\sigma = \sqrt{Npq}$$

→ Desvio Relativo $\equiv \dfrac{\sigma}{\langle \bar{x} \rangle}$

$$\frac{\sigma}{\langle \bar{x} \rangle} = \frac{\sqrt{Np\cdot q}}{N\cdot p} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$



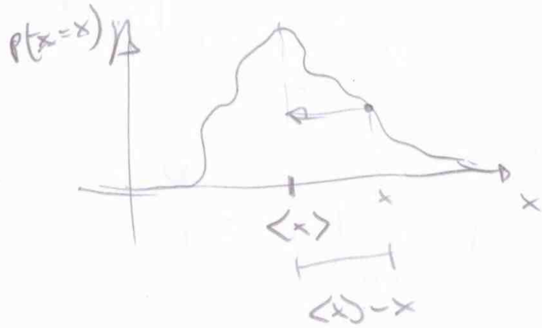
→ Obs : Como o desvio relativo é $\sim \dfrac{1}{\sqrt{N}}$, temos que a distribuição binomial se torna muito fina centrada em torno do valor médio $\langle x \rangle$, p/ $N \to \infty$

→ Obs

$$P(\bar{x}=0) = \frac{\cancel{N!}}{\cancel{N!}\, 0!} \cdot \overset{1}{\cancel{p^0}} \cdot q^N$$

p/ $N \to \infty$ $P(\bar{x}=0) \to 0$ pois $q<1$

$P(\bar{x}=N) = 0$ (analogamente)



$Var[\bar{x}] = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ e $\sigma = \sqrt{Var}$

então "σ" está relacionado com a largura da distribuição P.D.

Problema 2 de Meré:

→ Ao menos 2 "6" em 24 arremessos de 2 dados

X : # de duplas "6,6"

$X = 0, 1, 2, \ldots, 24$

$P(X \geq 1) = ??$

Probabilidade de dupla de ter "6 6" dados

$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

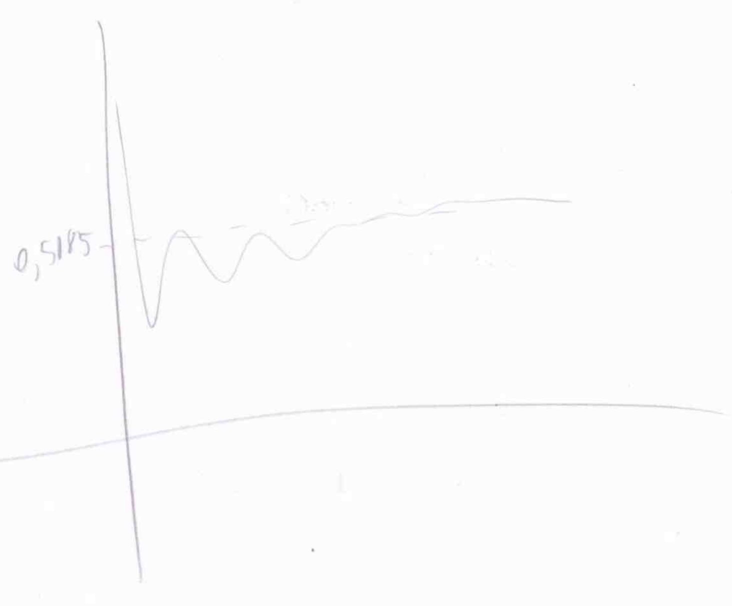
$\underbrace{P(X=0)}_{\text{Prob. perder}} + \underbrace{P(X \geq 1)}_{\text{Prob. ganhar}} = 1$

$q = 1 - p = \frac{36}{36} - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

$P(X=x) = \frac{N!}{(N-x)!\,x!} p^x q^{N-x}$ $N = 24$

$P(X=0) = \frac{24!}{24!} \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

$P(X=0) = 0{,}508596$



Problema 1 de Meré

ao menos 1 "6" em 4 arremessos

X : # de "6"

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$$P(X \geq 1) = ??$$

$$\underbrace{P(X=0)}_{\text{Prob perder}} + \underbrace{P(X \geq 1)}_{\text{Prob Ganhar}} = 1$$

$$P(X = x) = \frac{N!}{(N-x)!\,x!} \cdot p^{x} \cdot q^{N-x}$$

$N = 4$

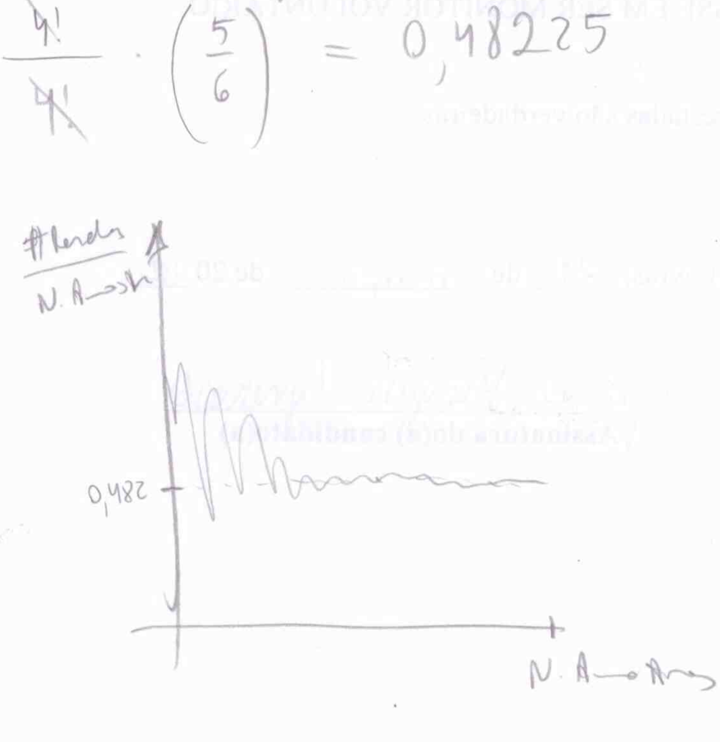
$x = 0$

$p = \frac{1}{6}$ (Probabilidade de ser "6")

$q = \frac{5}{6}$ (Probabilidade de não ser "6")

$$P(X=0) = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48225$$

Simulação Monte Carlo



→ **Variáveis Aleatórias Contínuas**

X : representa uma v.a.

$x \in]-\infty, \infty[$: valor específico (contínuo) que a v.a. pode assumir

$(x, P(X=x))$: função de probabilidade da v.a. X

Numa distribuição de probabilidades cada valor específico x está associado a uma probabilidade

$$P(X=x)$$

→ Obs. Vc pode pensar o caso contínuo como caso particular de um caso discreto em que os intervalos são tão pequenos quanto se queira.

Propriedades:

- Normalização:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} P(X=x)\,dx = 1}$$

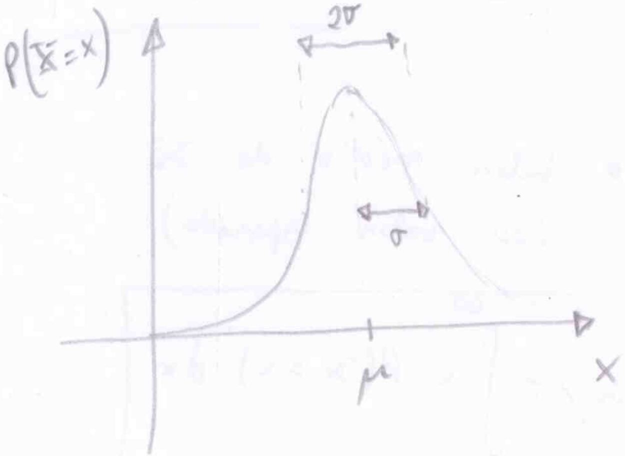
- Valor médio de X (ou valor esperado)

$$\boxed{\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P(X=x)\,dx}$$

②

Distribuicão Gaussiana

$$\boxed{P(\bar{x}=x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



É Normalizada ??

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{x}=x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cancel{\sigma^2}}} \sqrt{2\cancel{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{1}} = 1 \text{ !!}$$

$$u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

→ Valor Médio:

$$\langle \bar{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{x}=x) \cdot x \, dx$$

$$\langle \bar{x} \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} x \, dx$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Visto que:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[C \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] = C \cdot \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial \mu}\left[P(\bar{x}=x)\right] = \int \frac{x}{\sigma^2} P(\bar{x}=x) - \int \frac{\mu}{\sigma^2} P(\bar{x}=x)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \mu} \underbrace{\int P(\bar{x}=x)\,dx}_{=1}}_{=0} = \frac{\langle \bar{x} \rangle}{\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\langle \bar{x} \rangle = \mu}$$

→ Variancia

$$Var[\bar{x}] = \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2$$

Preciso calcular: $\langle \bar{x}^2 \rangle$

Fazer em casa

chego a

$$\boxed{Var[\bar{x}] = \sigma^2}$$

O que nos mostra que a variancia está relacionada com a largura da distribuição !!

→ Limite Gaussiano da distribuição Binomial:

"Teo do Limite Central"

Considere a distribuição Binomial:

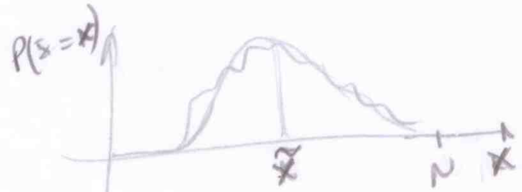
$$P(\bar{X} = x) = \frac{N!}{(N-x)!\,x!}\, p^{x} \cdot q^{N-x}$$

→ No limite de $N \to \infty$

$$P(\bar{X} = 0) \sim q^{N} \to 0$$
pois $q < 1$

$$P(\bar{X} = N) \sim p^{N} \to 0$$
pois $p < 1$

∴ $P(\bar{X} = x)$ deve ter um máximo em $x = \tilde{x}$



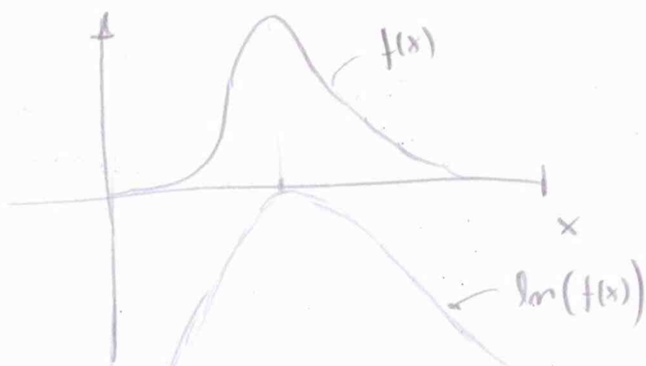
→ Para N grande podemos supor que perto do ponto de máximo $P(\bar{X} = x)$ seja quase contínua em relação à variável aleatória $\bar{X}$.

→ Em vez de trabalharmos com $P(\bar{X} = x)$, é mais conveniente (como veremos) trabalhar com $\ln P(\bar{X} = x)$, que varia bem mais lentamente

→ Como a função logaritmo é monotônica crescente, tanto faz achar o máximo de $P(\bar{X} = x)$ ou de $\ln P(\bar{X} = x)$.

O ponto de máximo dessas duas funções será sempre em $\tilde{x}$.

Por Exemplo:



obs.: quando $N \to \infty$ então $\tilde{x} \sim N$ e $(N-\tilde{x}) \sim N$

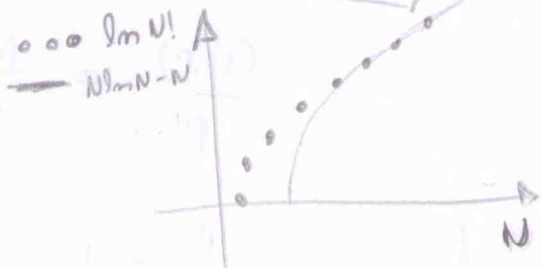
$$f(x) \equiv \log\left[P(\tilde{x} = x)\right]$$

$$f(x) = \log\left[\frac{N!}{(N-x)!\,x!}\, p^{x} \cdot q^{N-x}\right]$$

$$f(x) = \log N! - \log(N-x)! - \log x! + x \log p + (N-x)\log q$$

Aproximação de Stirling:

$$\boxed{\ln N! = N \ln N - N + O(\ln N)}$$



↑ Escala log. log

$$\therefore\quad f(x) \approx N \log N - N - \left[(N-x)\log(N-x) - (N-x)\right] +$$
$$- \left[x \cdot \log x - x\right] + x \log p + (N-x)\log q$$

Estou interessado no ponto de máximo $\tilde{x}$, tal que:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[-N\log(N-x) + x\log(N-x) - \cancel{x} - x\log x + \cancel{x} + x\log p + N\log q - x\log q\right]$$

$$\therefore\quad 0 = -N\frac{1}{(N-x)}(-1)\Big|_{x=\tilde{x}} + \log(N-x) + \frac{x}{(N-x)}(-1) - \left(\log x + \frac{x}{x}\right)$$
$$+ \log p - \log q\Big]$$

⑥

$$0 = \underbrace{\frac{N}{N-\tilde{x}} - \frac{\tilde{x}}{(N-\tilde{x})}}_{=1} - 1 - \log\tilde{x} + \log(N-\tilde{x}) + \log\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$0 = -\log\tilde{x} + \log(N-\tilde{x}) + \log\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$-\log\left(\frac{p}{q}\right) = \log\left(\frac{N-\tilde{x}}{\tilde{x}}\right)$$

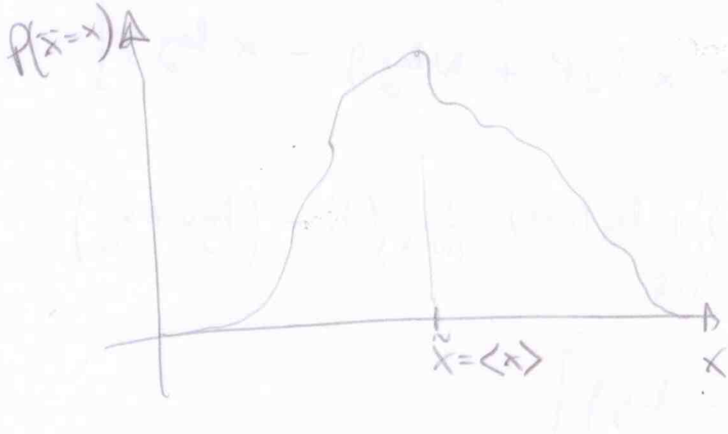
$$\frac{(1-p)}{p} = \frac{N}{\tilde{x}} - 1$$

$$\frac{(1-p)}{p} + 1 = \frac{N}{\tilde{x}}$$

$$\frac{1-p+p}{p} = \frac{N}{\tilde{x}}$$

$$\therefore \boxed{\tilde{x} = p\cdot N = \langle x\rangle}$$

Indicando que o valor mais provável é o ponto médio



Para verificar se temos realmente um ponto de máximo precisamos calcular a derivada segunda

$$f(x) = N\log N - N - (N-x)\log(N-x) + (N - \cancel{x}) +$$
$$- x\log x + \cancel{x} + x\log p + N\log q - x\log q$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \cancel{\frac{N}{N-x}} + \log(N-x) - \cancel{\frac{x}{(N-x)}} - \log x - \cancel{1} + \log\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\log x + \log(N-x) + \log\left(\frac{p}{q}\right)}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(N-x)}(-1) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{(N-x)}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right)_{x=\tilde{x}} = -\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{1}{(N-\tilde{x})}$$

$$\tilde{x} = pN = \langle x \rangle$$
$$N - \tilde{x} = qN = N - \langle x \rangle$$

$$= -\frac{1}{pN} - \frac{1}{qN} = \frac{-qN - pN}{p \cdot q N^2} = \frac{-\cancel{N}\overbrace{(p+q)}^{=1}}{p\, q\, N^{\cancel{2}}}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right)_{x=\tilde{x}} = -\frac{1}{Npq} < 0 \Rightarrow \tilde{x} \text{ Pto de}$$

Máximo !!

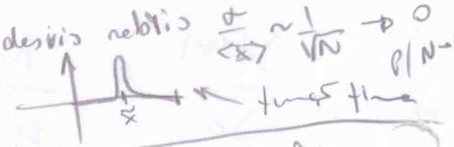
8

→ Com a intenção de encontrar uma expressão aproximada para representar a função binomial nas vizinhanças do ponto de máximo, faremos uma expansão em Taylor

Taylor: $$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2 + O(x^3)$$

Isto se justifica pois $P(\bar{x}=0) \to 0$, $P(\bar{x}=N) \to 0$ } p/ $N \to \infty$

e desvio relativo $\frac{\sigma}{\langle x \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0$ p/ $N \to \infty$



Mas lembre-se que

$$f(x) = \log[P(\bar{x}=x)]$$

Como $\tilde{x}$ é pto de máximo:

$$f'(\tilde{x}) = 0$$

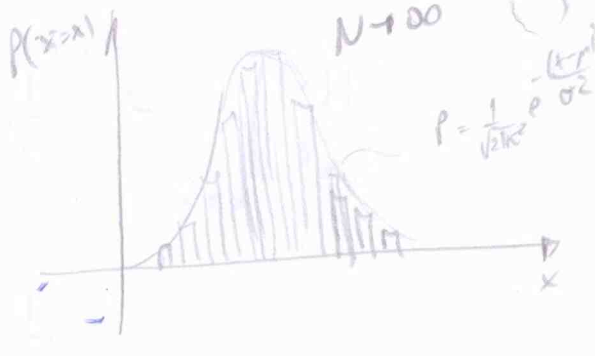
$$f''(\tilde{x}) = -\frac{1}{Npq}$$

$$\therefore \ f(x) \approx f(\tilde{x}) - \frac{1}{2Npq}(x-\tilde{x})^2$$

$$\log P(\bar{x}=x) \approx \log P[\bar{x}=x_0] - \frac{1}{2Npq}(x-\tilde{x})^2$$

$$\log\left[\frac{P(\bar{x}=x)}{P(\bar{x}=\tilde{x})}\right] \approx -\frac{1}{2Npq}(x-\tilde{x})^2$$

$$\Leftrightarrow \ P(\bar{x}=x) \approx \mathbb{C} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Npq}}$$



∴ A distribuição binomial se aproxima da distribuição Gaussiana, à medida que

$N \to \infty$

$\sigma^2 = Npq$

$\mu = \tilde{x}$

$$\therefore \ P(\bar{x}=x) = \mathbb{C}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

→ Problema do Caminho Aleatório (Random-Walk)

Considere um indivíduo que se desloca sobre uma linha reta, com passos de comprimento "l" a partir da origem.

p : Probabilidade de dar um passo p/ Direita

q : Probabilidade de dar um passo p/ esquerda

Sendo

$P_N(m)$: probabilidade que o indivíduo se encontre na posição $x = m \cdot l$ depois de "N" passos

$$\boxed{P_N(m) = ???}$$

→ Probabilidade de uma sequência com N_1 passos p/ direita e N_2 passos p/ esquerda $(N_1 + N_2 = N)$:

$$(p \cdots p)(q \cdots q) = p^{N_1} \cdot q^{N_2}$$

→ Numero total de sequências possíveis com N_1 e N_2 é de $\dfrac{N!}{N_1!\,N_2!}$

→ Exemplo:

$N_1 = 3$
$N_2 = 1$ $\Rightarrow N = 4$

Sequências Possíveis:

$$p \cdot p \cdot p \cdot q = p^3 \cdot q^1$$
$$p\ p\ q\ p = p^3 \cdot q^1$$
$$p\ q\ p\ p = p^3 \cdot q$$
$$q\ p\ p\ p = p^3 \cdot q$$

∴ 4 sequências possíveis

→ Verificando: $\dfrac{N!}{N_1!\,N_2!} = \dfrac{4!}{3!\,1!} = \dfrac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$