UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

LEI UNIVERSAL DE CRESCIMENTO

Lavras
Minas Gerais- Brasil
2013

KAYO NASCIMENTO RIBEIRO

Orientador: Professor Dr. Fabiano Lemes Ribeiro

LEI UNIVERSAL DE CRESCIMENTO

Pré-projeto de pesquisa apresentado ao Programa de – Mestrado Acadêmico em Física como parte das exigências do programa.

Lavras
Minas Gerais- Brasil
2013

Sumário

KAYO NASCIMENTO RIBEIRO

30 de Janeiro de 2013

Conteúdo

1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA 4

2 PLANO DE TRABALHO DE PESQUISA 4

3 REFERENCIAL TEÓRICO 5

4 METODOLOGIA 12

4.1 Modelo Baseado em Agentes 13

4.2 Determinando a Dimensão Fractal 14

RESUMO

Este projeto de pesquisa tem como objetivo entender os efeitos das propriedades microscópicas e comportamentos emergentes em sistemas compostos por muitos componentes (por exemplo, uma população de indivíduos ou agentes). Como ponto de partida, propomos o estudo da dinâmica de células interagentes por meio de modelos de crescimento populacional.

Vamos estudar modelos computacionais dos quais emergem uma estrutura fractal. Modelos de crescimento populacional tem se mostrado importante no entendimento de problemas relacionados ao crescimento de células cancerosas, controle de crescimento populacional, entre outros.

Palavras Chaves: Sistemas Composto por muitos componentes, Modelos Computacionais, Modelos de Crescimento Populacional.

1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Este projeto tem como objetivo entender como as interações individuais - ou microscópicas – entre os indivíduos (ou agentes) que compõem uma população, dão origem a comportamentos coletivos - ou macroscópicos - emergentes dessas interações. Esse tipo de sistema faz parte de uma área do conhecimento conhecida por Sistemas Complexos. Estamos interessados na formulação de modelos matemático/computacionais que descrevam detalhes particulares dos indivíduos e que levem a emergência de comportamentos coletivos.

A ferramenta natural para esse tipo de investigação são os chamados Modelos Baseados em Agentes (MBA) [1]. Esses modelos simulam sistemas populacionais, representando cada membro da população por agentes/indivíduos que possuem características próprias. O objetivo desse tipo de modelagem é tornar mais realista as simulações de populações naturais.

2 PLANO DE TRABALHO DE PESQUISA

As atividades para o desenvolvimento do projeto devem ser realizadas, conforme descrito abaixo.

- Primeiro Ano de Trabalho:
  1. Estudo dos problemas em questão e inspiração para a elaboração dos modelos computacionais;
  2. Implementação de modelos computacionais (baseado em agentes) para estudo dos tópicos de pesquisa;
  3. Análise dos primeiros dados gerados pelos modelos e possibilidade das primeiras publicações em revistas especializadas;

- Segundo Ano de Trabalho:
  1. Tratamento teórico dos modelos propostos; tentativa de predição de fases acessíveis aos sistemas; comparação de resultados teóricos com as simulações computacionais;
  2. Redação da dissertação;
  3. Realização de trabalhos remanescentes do projeto de pesquisa;

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Sistema Complexo (SC) é aquele formado por um número grande de entidades automatas – os agentes - que interagem entre si dando origem a um comportamento coletivo complexo e bastante diferente do comportamento individual de suas unidades. Uma característica fundamental desses sistemas é que o comportamento emergente não é proveniente de um controlador central [1]: o macrocomportamento emergente acontece como consequência direta e única das interações microscópicas. Exemplos de sistemas complexos são comuns em física, biologia e sócio-economia, uma vez que esses cenários são formados por um ensemble de partículas, indivíduos ou agentes, respectivamente. Em biologia, sociedades extremamente organizadas como a dos insetos sociais ou as distribuições fractais de colônias de bactérias podem emergir a partir das interações de seus indivíduos [1, 2]. Em sócio-economia, a interação dos seus agentes constituintes dá origem a dinâmicas complexas, exibindo efeitos de cooperação auto-organizada, estruturas sociais, crashes, etc. [5, 3, 6].

Existe um repertório relativamente vasto de técnicas analíticas que permitem o cálculo de propriedades macroscópicas de modelos microscópicos simples para a descrição de sistemas complexos.

Como exemplo dessas técnicas podemos citar as aproximações de campo médio [14, 15, 16, 17]. No entanto, esse tipo de aproximação leva a homogeneidade entre os agentes, o que tem se mostrado insuficiente para a descrição adequada das evidências empíricas de sistemas que dependem fortemente da heterogeneidade dessas entidades automatas. Há então uma necessidade crescente de modelos com padrões mais complexos de interação, como é o caso dos modelos de autômatos celulares [19] e de redes complexas [1]. Esses modelos, que recebem o nome de modelos baseados em agentes, usam simulações computacionais para a representação e analise de sistemas complexos. Mais especificamente, são simuladas (usando técnicas de Monte Carlo, por exemplo) tanto a distribuição espacial dos agentes - que constituem uma população - quanto as interação entre eles. Geralmente essas interações são feitas a partir de regras simples. As simulações são feitas com o objetivo de se observar o resultado coletivo do modelo proposto para o sistema complexo que se queira analisar.

Um ponto de partida para o estudo de sistemas complexos seria o comportamento emergente de estruturas fractais no crescimento de células. Esse tipo de estudo se mostra de grande importância, uma vez que células cancerosas apresentam uma dinâmica com esse tipo de característica [25, 26, 34].

Modelos de Crescimento Populacional

Modelos de crescimento populacional tem se mostrado importantes na descrição e previsão de um grande numero de processos em diversas áreas do conhecimento, como física, química, demografia, economia, ecologia, epidemiologia, entre outras disciplinas. Esses modelos são construídos na tentativa de prever o tamanho $n(t)$ de uma população num dado momento t a partir do tamanho inicial $n_0 \equiv n(t = 0)$ dessa população. Nos últimos anos tem-se focado na tentativa de generalização desses modelos com o objetivo de unificar as variáveis empíricas relevantes [20, 21]. Os parâmetros mais importantes presentes nesses modelos são a taxa de crescimento k e a capacidade de carregamento $K = n(t \to \infty)$ (tamanho da população no equilíbrio). A tentativa de generalização destes modelos tem inserido outras constantes e parâmetros aos modelos no sentido de torná-los (os modelos) mais completos e com melhores ajustes aos dados experimentais.

Um fato importante, o qual merece um certo questionamento, é que a grande maioria dos modelos presentes na literatura lida com parâmetros puramente macroscópicos, inseridos aos modelos com a intenção de ajustar aos dados experimentais. Dessa forma, esses modelos desprezam as relações microscópicas presente nos indivíduos que constituem a população [26]. Por exemplo, o modelo de Gompertz, que será descrito com mais detalhes logo a seguir, foi construído puramente para ajustar-se aos dados experimentais da população humana. É claro que esse tipo de abordagem é bastante útil pois: i) elimina uma grande quantidade de variáveis não relevantes que complicariam a descrição do sistema; ii) considera apenas algumas poucas grandezas relevantes e fáceis de serem medidas. No entanto, uma abordagem microscópica e um consequente comportamento macroscópico emergente, se mostram de grande valia para um entendimento mais robusto de uma população.

Essencialmente, modelos de crescimento obedecem a descrição

$$\frac{d}{dt}n(t) = n(t)F(n), \tag{1}$$

que significa que a variação do tamanho da população num dado momento t depende diretamente do número atual de indivíduos $n(t)$ ponderado pelo termo $F(n)$, chamado de função de saturação induzida. Essa função é o que caracteriza o modelo. Utilizando a derivada $\frac{d}{dt}\ln = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}$ e a equação (1), o crescimento populacional pode ser descrito por,

$$\frac{d}{dt} ln = F(n). \tag{2}$$

Como exemplos de modelos de crescimento podemos citar:

- Modelo de Malthus: $F(n) = k$. Esse modelo considera recursos ilimitados, o que proporciona um crescimento exponencial da população. A solução desse modelo é:

$$n(t) = n_0 e^{kt}; \tag{3}$$

- Modelo de Verhulst: $F(n) = k(1-n/k)$. Este modelo possui um termo de saturação que representa a escassez de recursos do ambiente. Ele também é conhecido como modelo logístico pois sua forma discreta conduz ao modelo do mapa logístico [31]. A solução desse modelo é

$$n(t) = \frac{K}{1 - \left(1 - \frac{K}{n_0}\right) e^{-kt}} \tag{4}$$

O modelo de Malthus é um caso particular do modelo de Verhulst, o qual é recuperado quando a quantidade de recursos do ambiente é infinita: $K \to \infty$;

- Modelo de Gompertz: $F(n) = -k \ln(n/k)$. Este modelo foi proposto inicialmente para descrever taxas de mortalidades em populações humanas, embora também descreva a dinâmica populacional de outros sistemas biológicos. A solução desse modelo é:

$$n(t) = K e^{\ln\left(\frac{k}{n_0}\right) e^{-kt}}; \tag{5}$$

- Modelo de Richards:

$$F(n) = k \frac{1 - \left(\frac{n}{K}\right)^{\tilde{q}}}{\tilde{q}}, \tag{6}$$

onde $\tilde{q}$ é um parâmetro do modelo. Esse modelo representa um passo importante na construção de modelos unificados. Ele foi proposto originalmente em [27] e tem como casos particulares: i) o modelo de Verhulst, quando $\tilde{q} = 1$; e ii) o modelo de Gompertz, quando $\tilde{q} = 0$ [29, 28].

Funções Generalizadas

Nos últimos anos, o grupo de Modelagem Computacional de Sistemas Complexos da FFCLRP-USP, estabeleceu uma linha de investigação de modelos unificados a partir das chamadas funções generalizadas ou $\tilde{q}$-funções [20, 22]. Dentre essas funções, podemos citar a generalização da função logaritmo, ou função $\tilde{q}$-logaritmo; e a função exponencial generalizada, ou função $\tilde{q}$-exponencial. Essas funções têm se mostrado importantes pois permitem um fácil manuseio algébrico de expressões, bem como recuperar casos particulares [23].

A função $\tilde{q}$-logaritmo é definida como,

$$ln_{\tilde{q}}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\tilde{q}}} = \lim_{\tilde{q}' \to \tilde{q}} \frac{x^{\tilde{q}'} - 1}{\tilde{q}'} \tag{7}$$

que nada mais é que uma generalização, através da introdução do parâmetro $\tilde{q}$, da função logaritmo natural. Esta função, definida como o valor da área abaixo da curva da hipérbole não simétrica $f_{\tilde{q}}(t) = 1/t^{1-\tilde{q}}$ no intervalo $t \in$ [1, x], recupera a função logaritmo no limite $\tilde{q} \to 0^1$:

$$\lim_{\tilde{q} \to 0} ln_{\tilde{q}}(x) = \ln(x). \tag{8}$$

A função inversa da $\tilde{q}$-logaritmo é a $\tilde{q}$-exponencial,

$$e_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} \lim_{\tilde{q}' \to \tilde{q}} (1 + \tilde{q}' x)^{\frac{1}{\tilde{q}'}}, & \text{se } \tilde{q}x > -1; \\ 0, & \text{de outra forma.} \end{cases} \tag{9}$$

Para $\tilde{q} = 0$, recupera-se a função exponencial: $e_0(x) = e^x$.

Modelo Generalizado para Crescimento Populacional

O estudo dessas funções generalizadas tem sido motivadas principalmente pelo fato que o modelo de Richards pode ser reescrito em termos da função $\tilde{q}$-logaritmo. O modelo de Richards (6) pode ser re-escrito em termos da função $\tilde{q}$-logaritmo introduzida em (7) pela forma

$$F(n) = -k \ln_{\tilde{q}} \left(\frac{n}{q} \right). \tag{10}$$

A reescrita do Modelo de Richards em termos das $\tilde{q}$-funções possibilita uma melhor descrição desse modelo. Por exemplo, a solução analítica pode ser escrita de uma forma bastante compacta e facilmente manipulável, dada por

$$n(t) = \frac{K}{e_{\tilde{q}}\left(\ln_{\tilde{q}} \left(\frac{K}{n_0} \right) e^{-kt} \right)}. \tag{11}$$

A solução desse modelo com funções generalizadas foi estudada e publicada em [23].

Modelo Microscópico

Como havíamos ressaltado no início, estamos interessados em entender como as interações microscópicas dos indivíduos afetam a dinâmica populacional. O primeiro passo em direção a esse entendimento foi obtido a partir de um modelo microscópico para a o crescimento de células apresentado por Mombach e outros em [18]. Nesse modelo, foi possível observar consequências macroscópicas das interações dos microcomponentes e ainda conseguir uma interpretação física para o parâmetro $\tilde{q}$. Vamos nessa seção discutir um pouco a respeito desse modelo.

Considere que a taxa de replicação de uma célula é regulada por uma competição entre continuar a se auto-replicar e as interações inibitórias das células vizinhas, que são modeladas por um termo dependente da distância. A taxa de replicação das células obedece:

[Taxa de Replicação] = [estímulo em auto-replicar-se] - [inibição das células vizinhas].

Baseado nessa idéia pode-se dizer que a atualização da população celular deve obedecer a regra

$$n(t + \Delta t) = n(t) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} R_i, \tag{12}$$

onde

$$R_i = G_i - J \sum_{j \neq i} \frac{1}{|r_i - r_j|^{\gamma}}, \tag{13}$$

é a taxa de replicação da i-ésima célula. A grandeza G_i é o estímulo da célula i em auto-replicar-se. O segundo termo do lado direito de (13) nos dá a inibição sofrida por i decorrente da presença das demais células. A intensidade da inibição é dependente da distância $|r_i - r_j|$ entre o par ij, com intensidade J é modulada pelo fator γ. Tomando o limite $\Delta t \to 0$ em (12) chega-se ao modelo microscópico

$$\frac{d}{dt}n(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[G_i - J \sum_{j \neq i} \frac{1}{|r_i - r_j|^\gamma} \right]. \tag{14}$$

Mombach e outros, usando premissas de que a população celular possui uma estrutura caracterizada pela dimensão fractal D_f, mostraram que o modelo microscópico (14) pode ser reescrito em termos apenas de variáveis macroscópicas. A definição de dimensão fractal está apresentada no apêndice (A). Seguindo as manipulações algébricas desenvolvidas em [18], conclui-se que o modelo (14) pode ser re-escrito na forma

$$\frac{d}{dt}\ln n = \langle G \rangle + \frac{\omega J}{D_f\left(1 - \frac{\gamma}{D_f}\right)} - \left(\frac{\omega}{D_f}\right)^{\frac{\gamma}{D_f}} \frac{J}{\left(1 - \frac{\gamma}{D_f}\right)} n^{1 - \frac{\gamma}{D_f}}, \tag{15}$$

onde $\langle G \rangle = \sum_i^n G_i / n$ é o valor médio do estímulo das células em auto replica-se, e ω é uma constante relacionada à geometria. O resultado acima se mostra importante no sentido de que ele apresenta apenas grandezas macroscópicas, embora tenha sido obtido unicamente por premissas microscópicas. Em outras palavras, o comportamento global emerge das interações locais entre as células que constituem a população.

Para completar, Mombach e outros identificaram o resultado (15) com o modelo de Richards. Dessa forma, pode-se trabalhar a dinâmica populacional celular em termos do modelo (10) e consequentemente pelo formalismo das $\tilde{q}$-funções, o que será discutido a seguir.

Nova abordagem do modelo de Mombach e Outros

Para uma manipulação algébrica mais conveniente, propomos nesse projeto de pesquisa usar o formalismo desenvolvido pelo grupo de Ribeirão Preto [20, 21, 23] para lidar com a dinâmica populacional por meio das $\tilde{q}$-funções. Nesse sentido, podemos reescrever o resultado (15) em termos do modelo de Richards,

$$\frac{d}{dt}\ln n = -k \ln_{\tilde{q}}\left(\frac{n}{K}\right). \tag{16}$$

As equações (15) e (16) representam exatamente o mesmo modelo.

No entanto, a segunda apresenta-se mais compacta, o que facilita a interpretação das grandezas envolvidas. Por exemplo, o parâmetro $\tilde{q}$ ganha uma interpretação física relacionada ao alcance das interações entre as células (dado pelo parâmetro γ) e a dimensão fractal, pela forma:

$$\tilde{q} = 1 - \frac{\gamma}{D_f}. \tag{17}$$

Continuando a comparação entre (16) e (15), juntamente com (7), a taxa de crescimento deve ser:

$$k = \tilde{q}\langle G\rangle + \frac{\omega J}{D_f}, \tag{18}$$

e o tamanho da população no equilíbrio será:

$$K = \left(\frac{\tilde{q}\langle G\rangle + \frac{\omega J}{D_f}}{\left(\frac{\omega}{D_f}\right)^{\frac{\gamma}{D_f}} J}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

i) Casos Limites

Como vimos na seção anterior, o modelo de Richards é um modelo generalizado que tem como casos particulares o modelo de Gompertz e o modelo de Verhulst.

i.1) $\gamma = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 1$

Quando a dinâmica acontece com um fator de interação $\gamma = 0$, o que significa que todas as células interagem da mesma forma, não importando quão distantes duas células estão entre si, temos uma dinâmica dada pelo modelo de Verhulst. De acordo com (17), temos nesse caso $\tilde{q} = 1$. Dessa forma, o modelo de Verhulst pode ser interpretado como uma aproximação de campo médio para a dinâmica populacional. Para esse caso limite, a partir de (7), o modelo (16) ganha a forma,

$$\frac{d}{dt}\ln n = -k\left(\frac{n}{K} - 1\right). \tag{20}$$

Além disso, de (18) e (19) temos

$$k = \langle G\rangle + \frac{\omega J}{D_f} \tag{21}$$

e

$$K = \frac{\langle G \rangle}{J} + \frac{\omega}{D_f}, \tag{22}$$

respectivamente.

i.2) $\gamma = D_f \Leftrightarrow \tilde{q} = 0$
O modelo de Gompertz emerge quando o parâmetro de interação escala com a dimensão fractal da população. Nesse caso $\gamma \approx D_f$ o que implica $\tilde{q} \to 0$. Tomando esse limite em (16), (18) e (19), e por meio das propriedades das $\tilde{q}$-funções, chega-se a,

$$\frac{d}{dt} \ln n = -k \ln \left(\frac{n}{K} \right), \tag{23}$$

que é o modelo de Gompertz com a taxa de crescimento dada por:

$$k = \frac{\omega J}{D_f}, \tag{24}$$

e a capacidade de carregamento,

$$K = \frac{\omega}{D_f} e^{\frac{D_f \langle G \rangle}{J\omega}}. \tag{25}$$

4 METODOLOGIA

O modelo de Mombach e outros foi importante pois relacionou as variáveis macroscópicas de modelos de dinâmica populacional com variáveis microscópicas relacionadas à interação celular.

Esse modelo, no entanto, carece de uma estudo mais sólido, principalmente no que diz respeito à estrutura fractal da qual o modelo exige para a dinâmica. Mombach e outros mostraram que a estrutura (fractal) - a qual os indivíduos estão inseridos - afeta o crescimento da população. No entanto ainda não está respondido de que forma o crescimento populacional afeta essa estrutura. A estrutura não está pronta a priori, ela é um produto da própria dinâmica populacional, e isso ainda não foi bem explorado.

Para responder essas questões, propomos a implementação da regra (13) num modelo baseado em agentes. Essa implementação possibilitará simular e observar como uma regra local afeta a dinâmica do sistema como um todo. Nessa simulação seria possível, por exemplo, observar uma possível estrutura fractal sendo criada como consequência da dinâmica de nascimento e morte dos indivíduos.

Lista-se aqui algumas questões que gostaríamos de responder:

- Como o valor da dimensão fractal muda com o crescimento da população?
- Dadas as regras locais de interação, a população cresceria estabelecendo um valor estacionário para a dimensão fractal?
- Uma vez atingido esse valor estacionário, o resultado (15) poderia prever o tamanho da população num dado momento futuro?

4.1 Modelo Baseado em Agentes

Em um Modelo Baseado em Agentes, os agentes - células ou indivíduos - que constituem uma população, estão dispostos numa rede. Esse tipo de método é adequado para simular populações cujos componentes possuem características distintas e individuais. Os agentes são representados explicitamente e carregam tantas informações quantas forem convenientes para o interesse do modelador. Cada agente, dentro de uma simulação, possui sua própria história de interações com o ambiente e com os outros agentes da população. O objetivo desse tipo de abordagem é capturar as interações locais que eventualmente são perdidas quando tratamos as populações por modelos tipo campo médio, como é o caso dos modelo apresentados na seção anterior.

O modelo

Considere que os indivíduos estejam dispostos em uma rede quadrada de tamanho L^2. Cada sítio dessa rede pode ou não estar ocupado por um indivíduo. Vamos representar o i-ésimo sítio dessa rede pela variável $\sigma_i = 0, 1$, onde $i = 1, \ldots, L^2$. A variável $\sigma_i(t) = 1$ significa presença de um indivíduo no instante t; enquanto que $\sigma_i(t) = 0$ significa que o sitio está vazio no instante t. O tamanho da população no instante t pode ser facilmente computado por:

$$n(t) = \sum_{i=1}^{L^2} \sigma_i(t). \tag{26}$$

A cada instante t, todos os indivíduos são anualizados de forma a determinar o número de filhos que cada um deles irá gerar. Caso exista um indivíduo no sítio i, ou seja $\sigma_i(t) = 1$, o número de filhos desse indivíduo será:

$$R_i = G_i - J \sum_{j \neq i} \frac{1}{|r_i - r_j|^\gamma}, \tag{27}$$

de acordo com a idéia (13). Caso $R_i < 0$, o que significa que a inibição proveniente dos vizinhos é maior que a capacidade intrínseca desse indivíduo em se reproduzir, então esse indivíduo morre: $\sigma_i(t+1) = 0$. Caso $R_i > 0$, então R_i novos indivíduos serão introduzidos na rede. A localização desses novos indivíduos pode ser feita por pelo menos duas formas: 1) introduzindo-os aleatoriamente na rede; ou 2) introduzindo-os na vizinhança da célula mãe. A capacidade de auto-replicação G_i do i-ésimo indivíduo pode ser: 1) idêntico para todos os indivíduos da população; ou 2) gerado a partir de uma distribuição.

O valor dos parâmetros que vão estabelecer o número de descendentes ($\{G_i\}_i, \gamma$ e J), somada a forma com que as novas células serão espalhadas pela rede, determinam a estrutura fractal com que a população vai se dispondo pela rede. Será bastante conveniente investigar de que forma o valor da dimensão fractal dessa estrutura se relaciona com as diferentes escolhas das regras de interação local.

4.2 Determinando a Dimensão Fractal

Pode-se determinar a dimensão fractal de um rede composta por sítios vazios e ocupados a partir da forte evidência de uma lei de potência entre o número n de sítios ocupados e o tamanho do espaço que contém esses sítios - caracterizado pelo raio r [34]. Em outras palavras, vale a relação $n \sim r^{D_f}$, onde D_f é a dimensão fractal da estrutura (veja apêndice (A)).

A determinação da dimensão fractal será feita de acordo com o seguinte algoritmo (tipo Monte Carlo):

1. Sorteia-se um sitio da rede;

2. A partir desse ponto conta-se o número de sítios ocupados $n(r)$ dentro de um quadrado de área r^2 centrado nesse ponto;

3. Dobra-se o valor de r e conta-se o número de sítios ocupados dentro dessa área maior;

4. Repete-se o processo até ser possível verificar a dependência de n com r;

5. Sorteia-se outro ponto da rede e repete-se todo o processo.

6. Com os valores encontrados para o par (n, r) será construído o gráfico de $\ln(n)$ em função de $\ln(r)$. O coeficiente angular da reta formada será o valor medido de D_f .

Uma melhor estimativa de D_f será obtida com um número grande de repetições da evolução do sistema. Com esse cálculo, será possível verificar se a previsão (15) e o modelo baseado em agentes proposto na seção (4.1) são equivalentes na descrição do crescimento populacional. Será possível estabelecer relações e interpretações entre a dinâmica de um sistema regido por regras locais e as aproximações de campo médio.

APÊNDICE

A) Objetos Fractais

A geometria fractal foi desenvolvida por Mandelbrot e outros [35] para descrever objetos com formas que não podem ser descritos pela geometria Euclidiana. Este é o caso, por exemplo, de objetos ramificados ou rugosos. Uma grandeza que caracteriza esses objetos é a dimensão D_f.

Antes de definirmos com mais precisão essa grandeza, vamos revisar algumas idéias da geometria Euclidiana.

Considere um objeto circular ou esférico com massa m e raio r. Caso o raio desse objeto seja dobrado, i.e. raio vai de r para $2r$, a massa desse objeto aumenta por um fator:

- 2^2 se o objeto é um circulo (espaço de 2 dimensões euclidianas);
- 2^3 se o objeto é uma esfera (espaço de 3 dimensões euclidianas). Podemos então expressar a dependência da massa com o seu tamanho, pela forma:

$$m(r) = r^{D_f}; \tag{28}$$

onde D_f é a dimensão do objeto. Dessa forma, a relação (28) nos dá uma forma prática de se determinar a dimensão do objeto.

Considere agora que d é a dimensão no espaço euclidiano no qual o objeto está embutido. Nesse caso, a densidade do objeto pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{m}{r^d}. \tag{29}$$

Mas pela relação (28) temos,

$$\rho \sim \ r^{D_{f-d}}, \tag{30}$$

o que significa que se $D_f < d$ então a densidade do objeto não é a mesma para todo r, mas obedece a uma lei de potência.

A dependência de escala da densidade do objeto é uma característica de objetos ramificados e rugosos, das quais possuem uma dimensão D_f fracionária e por isso são chamados de fractais.

Referências

[1] N. Boccara. *Modeling Complex Systems*. Springer-Verlag New York (2004).

[2] Per Bak. *How the Nature Works: The Science of Self Organized*. Copernicus (1999).

[3] P. Ball. *The physical modelling os Society: A Historical Perspective*. Physica A 314 (2002).

[4] M. González, P. Lind and H. Hermann. *Networks Based on collisions Among Mobile Agents*. Physica D 224 (2006).

[5] M. González, P. Lind and H. Hermann. *System of mobile agents to model social networks*. Physical Review Letters 96 (2006).

[6] D. Sornette, A. Johansen and J. Bouchaud. *Stock Market, Crashes, Precursors and Replicas*. Journal de Physique I 6 (1996).

[7] Kadanoff. *Statistical Physics - Statistics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific (2000).

[8] CHARRET, I. C. ; COSTA JR., A. T. ; LOUSADA, J. N. C. . *Individual-based model for coevolving competing populations*. Physica. A, v. 385, p. 249-254, 2007.

[9] CHARRET, I. C. ; MARTINS, M. V. C. . *Spontaneous emergence of pattern in a predator-prey system*. Physical Review. E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics (Online), v. 76, p. 061902-1-061902-8, 2007.

[10] SOUZA, A. A. de ; MARTINS, S. G. F. ; M.S. Zacarias . *Computer Simulation applied to the biological control of the insect Aphis gossypii for the parasitoid Lysiphlebus testaceipes*. Ecological Modelling, v. 220, p. 756-763, 2009.

[11] MARTINS, S. G. F. ; Julio S.S. Bueno Filho ; COSTA JUNIOR, A. T. ; PENNA, T. . *Complex Behavior of a Predator-Prey Model with Discrete Genotype*. International Journal of Modern Physics C, v. 12, n. 6, p. 807, 2001.

[12] K. Luz-Burgoa R. ; OLIVEIRA, S Moss de ; SCHWAMMLE, Veit ; MARTINS, J S S‘a . *Thermodynamic behavior of a phase transition*

in a model for sympatric speciation. Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids and Related Interdisciplinary Topics, v. 74, n. 021910, p. 1-5, 2006.

[13] SCHWAMMLE, Veit ; K. Luz-Burgoa R. ; MARTINS, J S S'a ; OLIVEIRA, S Moss de . *Phase transition in a mean-field model for sympatric speciation.* Physica. A, v. 369, p. 612-618, 2006.

[14] J.P. Sethna. *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexity.* Oxford University Press (2006).

[15] J.M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions.* Oxford University Press (1992).

[16] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group.* Perseus Books (1992).

[17] T. Tanaka. *Methods of Statistical Physics.* Cambridge University Press (2002).

[18] Mombach, J., Lemke, N., Bodmann, B. and M. Idiart. *A mean-field theory of cellular growth.* Europhysics Letters 59 (6), pp.923928 (2002).

[19] T. Tomé, M. de Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade.* Edusp, Editora da Universidade de São Paulo (2001).

[20] AS Martinez, RS Gonzalez, CAS Tercariol. *Continuous growth models in terms of generalized logarithm and exponential functions.* Physica A 387 5679-5687 (2008).

[21] A. S. Martinez, R. González and A. Espíndola. *Generalized exponential function and discrete growth models.* Physica A, 388, Issue 14 (2009).

[22] Tiago José Arrudaa, Rodrigo Silva Gonzáleza, César Augusto Sangaletti Ter¸cariola and Alexandre Souto Martinez. *Arithmetical and geometrical means of generalized logarithmic and exponential functions: Generalized sum and product operators.* Physics Letters A Volume 372, Issue 15, 7 April 2008, Pages 2578-2582.

[23] CABELLA, B. C. T. ; MARTINEZ, A. S. ; RIBEIRO, F. . *Data collapse, scaling functions, and analytical solutions of generalized growth models.* Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics (Print), v. 83, p. 061902, 2011.

[24] CABELLA, B. C. T. ; RIBEIRO, F. ; MARTINEZ, A. S. . *Full Analytical Solution for a Verhulst-Like Two-Species Population Dynamics Model*. Artigo Submetido à Physica A.

[25] A. d'Onofrio. *Fractal growth of tumors and other cellular populations.* Chaos, Solitons & Fractals (2008), doi:10.1016/j.chaos.2008.04.014 .

[26] RP Araujo, DLS McElwain. *A history of the study of solid tumour growth: the contribution of mathematical modelling.* Bull Math Biol 2004; 66:1039–91.

[27] FJ Richards. *A Flexible Growth Function for Empirical Use.* Journal of Experimental Botany, 10 290-300 (1959).

[28] E.W. Montroll, B.J. West. *On an enriched collection of stochastic processes Fluctuation Phenomena, Elsevier Science Publishers B.* V, Amsterdam, 1979, pp. 61–205.

[29] E.W. Montroll, L.W. Badger. *Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena.* Gordon and Breach, New York, 1974.

[30] Murray, J.D.. *Mathematical Biology: An Introduction.* 3rd edition, Springer Verlag, New York (2002).

[31] Fiedler-Ferrara, N and do Prado, C. *Caos, uma introducao.* Sao Paulo, Edgar Blucher (1994).

[32] R. S. Soares and A. S. Martinez. *The geometrical patterns of cooperation evolution in the spatial prisoner's dilemma: An intra-group model.* Physica A, 369 (2006).

[33] M. Pereira, A. S. Martinez and A. *Espíndola. Prisioner's Dilemma in One-Dimensional Cellular Automata: Visualization of Evolutionary Patterns.* Int. Journal of Modern Physics C., 19, 1 (2008).

[34] S. Cross. *Fractals in Pathology.* Journal of Pathology, vol. 182: 1-8 (1997).

[35] Mandelbrot BB.*The Fractal Geometry of Nature.* New York: W. H. Freeman, 1982.

[36] F. Ribeiro and N. Caticha. *Emergence and Loss of Assortative Mating in Sympatric Speciation.* Journal of Theoretical Biology 258 (2009).

[37] Fabiano Ribeiro, Manfred Opper. *Expectation Propagation with Factorizing Distributions: A Gaussian Approximation and Performance Results for Simple Models.* Neural Computation 23(4): 1047-1069 (2011)