Projeto 1: Dinâmica de Populações

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

May 17, 2013

1. Escreva uma pequena biografia sobre:

   (a) Thomas Malthus;

   (b) Pierre François Verhulst;

   (c) Benjamin Gompertz;

2. **Dinâmica de População de Malthus (1798)**:
   Considere $N_0 \equiv N(t=0)$, a população inicial; e r a taxa de crescimento da população.

   (a) Faça um programa computacional para implementar a atualização populacional dada pela regra:

   $$N(t+\Delta t) = N(t) + rN(t)\Delta t. \tag{1}$$

   Rode seu programa e plote em um mesmo gráfico o resultado para os seguintes parâmetros: $N_0 = 1$, $\Delta t = 1$ e $r = 1, 2, 3$.

   (b) Mostre que, no limite $\Delta t \to 0$, a regra (1) conduz à e.d.o.

   $$\frac{dN}{dt} = rN; \tag{2}$$

   (c) Resolva analiticamente a e.d.o. (2) e mostre que a solução do modelo de Malthus é

   $$N(t) = N_0 e^{rt}; \tag{3}$$

   (d) Escreva a solução (3) em termos das grandezas $y = N/N_0$ e $\tau = rt$. Qual a vantagem de utilizar estas novas variáveis? Obs.: Veja referencia [3].

   (e) Discuta o comportamento para $r > 0$ e $r < 0$ em função da condição inicial.

   (f) Considere uma população de ratos descrita pelo modelo Malthusiano (3). Considere uma população inicial de $N_0 = 2$ individuos e uma taxa de crescimento de $r = 3$ indivíduos/mês. Cada rato possui uma massa de 0.2 Kg. Determine: a) O tempo que a massa total da população de ratos seria suficiente para se transformar em uma estrela. Obs.: A massa mínima de uma estrela é de 50 vezes a massa de Júpiter ($50 \times 1,9 \times 10^{27}$Kg); b) O tempo que a massa promove um colapso gravitacional, i.e. se transforme num buraco negro. Obs.: Massa mínima para gerar um buraco negro é de aproximadamente 10^{30}Kg.

3. **Dinâmica de População de Verhulst (1838)**:

Considere K como a capacidade de carregamento da população. O modelo de Verhulst é dado pela e.d.o.:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right); \tag{4}$$

(a) Mostre que a e.d.o. (4) tem como solução:

$$N(t) = \frac{K}{1 - \left(1 - \frac{K}{N_0}\right)e^{-rt}}; \tag{5}$$

(b) Plote, em um mesmo gráfico, a solução (5) usando $r = 2$, $K = 100$ e três diferentes condições iniciais: $N_0 = 140$, $N_0 = 20$, $N_0 = 70$.

(c) Escreva a equação acima em função das grandezas $y = N(t)/N_0$, $k = N_0/K$ e $\tau = rt$ e obtenha:

$$y = \frac{1}{k + (1-k)e^{-\tau}} \ . \tag{6}$$

Qual a vantagem de usar este procedimento? Obs.: Veja referencia [3].

(d) Considere os dados de crescimento de bactérias dispostos na tabela (1). A primeira coluna representa o tempo, dado em horas, e a segunda a respectiva população de bactérias. Use a solução (5) para descrever o problema e o gnuplot ou o xmgrace para fitar os dados. Quais valores de N_0, r e K que melhor representam a dinâmica dessa população?

tempo (hrs)	**População**
0	8
6	30
7	100
15	600
16	800
17	900
24	1050
25	1100
30	1250
32	1270
33	1280
40	1300
42	1250
43	1220
50	1250

Table 1: Dados de população de bactérias.

(e) Explique o limite $K \to \infty$.

(f) Discuta o comportamento para $r > 0$ e $r < 0$ em função da condição inicial.

(g) Discuta a grandeza K em função da condição inicial.

(h) Mostre que, a partir de uma escolha conveniente de variáveis, o modelo de Verhulst pode ser discretizado, chegando-se a relação de recorrência

$$n(t+1) = \lambda n(t)(1 - n(t)), \tag{7}$$

onde $\lambda = 1 + r\Delta t$ e $n(t) \propto N(t)/K$.

4. **Dinâmica de População de Gompertz (1825)**: Considere a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -rN \ln\left(\frac{N}{K}\right) \tag{8}$$

com $K > 0$ e condição inicial N_0.

(a) Resolva analiticamente esta e.d.o. e mostre que

$$N(t) = Ke^{\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-rt}} \ . \tag{9}$$

(b) faça gráficos da solução (9) para diversas condições iniciais e taxas de crescimento.

(c) Discuta o comportamento para $r > 0$ e $r < 0$ em função da condição inicial.

(d) Discuta a grandeza K em função da condição inicial.

References

[1] James Dickson Murray (PDF). Mathematical Biology I: an introduction.

[2] Herbert Goldstein , Charles P. Poole, John L. Safko (PDF). Classical Mechanics.

[3] Alexandre Souto Martinez (PDF). Modelos Matemáticos, Probabilísticos e Computacionais.