Projeto 2: Mapa Logístico

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

May 17, 2013

O estudo que será desenvolvido nesse trabalho tem como objetivo apresentar o chamado mapa logístico, que consiste de um exemplo de sistemas dinâmico em tempo discreto. No século 19 o belga P.F. Verhulst introduziu o mapa logístico para modelar dinâmica de populações em habitat de tamanho limitado. Se a população em questão é muito pequena, ela tende a crescer, pois há bastante alimento disponível. Já se ela crescer demais ela tende a diminuir, por esgotar os recursos alimentícios disponíveis. Veremos que, dependendo das condições, a população pode se estabilizar a uma dada altura, ou pode flutuar indefinidamente de forma regular ou caótica.

Vamos utilizar a variável n para representar o tamanho da população e vamos adotar uma normalização tal que $n = 0$ representa uma população nula; e $n = 1$ representa um máximo de população tão exprimida em seu habitat que já não cabe mais ninguém. Vamos supor ainda que são realizados "censos" periódicos para determinar o tamanho da população e que n_t seja o tamanho da população quando é realizado o t-ésimo censo. O mapa logístico vai nos fornecer uma previsão de quanto medirá o ceso $t + 1$ dado o resultado do censo t.

A expressão do mapa logístico é

$$n_{t+1} = \lambda n_t(1 - n_t), \tag{1}$$

que significa que o valor de n_{t+1} só depende do valor no instante anterior n_t e do parâmetro λ. Aqui, λ está relacionado com a taxa de reprodução dessa população [1]. Embora a expressão (1) seja bastante simples, veremos adiante que ela apresenta uma surpreendente variedade de fenômenos.

É muito fácil, para um dado valor de λ e uma condição inicial $0 < n_0 < 1$, gerar uma série temporal $\{n_t\}_{t=0,1,2,...}$. É interessante estudar o comportamento dessa série para diferentes valores de λ. Para valores pequenos de λ a série é pouco interessante, estabilizando-se rapidamente num valor único (ponto fixo). Por uma população estabilizada entendemos que ela não varie de um censo para outro, ou seja $n^* \equiv n_{t+1} = n_t$. Aumentando λ outros comportamentos poderão ser observados.

1 Análise das estruturas dos atratores

Com a realização desse estudo, você deverá observar que em geral o sistema passa por uma fase inicial que depende do valor inicial de população e depois de um certo número de interações assume um comportamento definitivo. A primeira fase é chamada de *transitório* do sistema e depende das condições iniciais. Ela pode durar mais ou menos iterações dependendo do quanto a condição inicial está "próxima" do comportamento final. Já a fase final é denominada *atrator* do sistema e depende apenas do parâmetro, i.e. do habitat em que a população se encontra. Este atrator pode ser um ponto fixo, um atrator regular (periódico), ou um atrator caótico (a população flutua entre um grande número de valores possíveis). Muitas vezes estamos interessados apenas no atrator do sistema e não no transiente. Ou seja, queremos saber o comportamento da população a longo prazo, independente do fato de começarmos com uma população pequena ou grande. Vamos agora estudar o comportamento final da população em função do parâmetro.

[1] Esse parâmetro pode ser estimado por teorias ou obtido a partir de medidas experimentais.

Para $\lambda = \lambda_m$, a partir de uma condição inicial $0 < n_0 < 1$ qualquer, itere o mapa. Jogue fora os primeiros N_t passos, o transiente. Guarde os valores $\{n_t\}$ dos próximos N_a passos que estão dentro do intervalo $n_m < n < n_M$.

Mude $\lambda \to \lambda + \Delta\lambda$, e repita dentro do intervalo $\lambda_m < \lambda < \lambda_M$. Faça o gráfico de n_t contra λ. Para cada λ esse conjunto representa os pontos visitados pelo mapa, o atrator. Para $\lambda < 3$ todos os valores de n caem no mesmo ponto (a não ser que você não tenha esperado o suficiente). Para $\lambda = 3$ começam a acontecer coisas interessantes, primeiro uma série de bifurcações até chegar a um comportamento aparentemente aleatório.

Realize estudos com as seguintes escolhas de parâmetros:

- $\lambda_m = 0$, $\lambda_M = 2$, $0 < n < 1$.

  Mostre que para essas escolhas há duas soluções de população estabilizada, dadas por:

  i) $n^* = 0$, correspondendo a uma população dizimada; e

  ii) $n^* = 1 - 1/\lambda$;

- $\lambda_m = 0$, $\lambda_M = 2$, com $0 < n < 1$;

- $\lambda_m = 2$, $\lambda_M = 3$, com $0 < n < 1$;

- $\lambda_m = 0$, $\lambda_M = 4$, com $0 < n < 1$;

- $\lambda_m = 3.40$, $\lambda_M = 3.65$, com $0.73 < n < 0.93$;

- $\lambda_m = 3.846$, $\lambda_M = 3.852$, com $0.485 < n < 0.525$;

- $\lambda_m = 3.8488$, $\lambda_M = 3.8498$, com $0.509 < n < 0.517$;

Comente os gráficos obtidos. Observe que acontecem janelas de comportamento periódico no meio da região caótica. De fato essa é fractal, e quanto mais ampliamos, mais janelas de comportamento periódico, cada vez mais finas e de período mais alto, podem ser observadas. Utilize seu programa para fazer mais ampliações e convencer-se disso.

2 Sensibilidade às condições iniciais

Considere duas condições iniciais n_0 e $n_0' = n_0 + \epsilon$. Apresente em um mesmo gráfico valores da evolução temporal de $n_t' - n_t$ contra t, para diferentes valores de λ ($\lambda = 3.545$, $\lambda = 3.566$, $\lambda = 3.6163$). Faça $\epsilon = 0.1$, 0.01 e 0.001. Discuta os resultados brevemente.

Sugestão: você pode escolher os valores $N_t = 3000$, $N_a = 100$. Caso você escolha valores pequenos para N_t a figura ficará borrada. Faça uma escolha adequada do passo $\Delta\lambda$ em cada aplicação. É interessante olhar para i) o mapa de retornos n_t contra n_{t+1}; e ii) a diferença $\Delta\lambda$ entre os valores de λ onde ocorrem duas bifurcações sucessivas.

References

[1] James Dickson Murray (PDF). Mathematical Biology I: an introduction.

[2] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko (PDF). Classical Mechanics.

[3] Alexandre Souto Martinez (PDF). Modelos Matemáticos, Probabilísticos e Computacionais.