Projeto 3: Funções Generalizadas

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

May 17, 2013

1 Hipérbole Não-Simétrica

Considere a função

$$f_{\tilde{q}}(t) = \frac{1}{t^{1-\tilde{q}}}, \tag{1}$$

no domínio $t > 0$. Essa função é conhecida por *hipérbole não simétrica*.

1. Mostre que, para $\tilde{q} < 1$, a função (1):

   i) converge para zero: $f_{\tilde{q}}(t \to \infty) = 0$;

   ii) diverge na origem: $f_{\tilde{q}}(t \to 0) \to \infty$;

   iii) Verifique isso visualmente fazendo gráficos (com gnuplot) usando $\tilde{q} = -1, 0, \frac{1}{2}$ no intervalo $t \in [0, 3]$.

2. Mostre que para $\tilde{q} = 1$ a função (1) é uma constante: $f_{\tilde{q}}(t) = 1$.

3. Mostre que, para $\tilde{q} > 1$, a função (1):

   i) cresce algebricamente como uma lei de potência: $f_{\tilde{q}}(t) = t^{\tilde{q}-1}$;

   ii) converge na origem : $f_{\tilde{q}}(0) = 0$;

   iii) diverge quando $t \to \infty$: $f_{\tilde{q}}(t \to \infty) = \infty$;

   iv) Verifique isso visualmente fazendo gráficos (com gnuplot) usando $\tilde{q} = 3/2, 2, 3$ no intervalo $t \in [0, 3]$.

4. Ainda considerando $\tilde{q} > 1$ a divergência dessa função pode ser dividida em três categorias. Verifique que:

   i) para $1 < \tilde{q} < 2$ o gráfico é concavo, ou seja, a divergência é suave;

   ii) para $\tilde{q} = 2$ a divergência é linear;

   iii) para $\tilde{q} > 2$ o gráfico é convexo.

5. Plote gora, em um mesmo gráfico, a função (1) usando todos os valores de $\tilde{q}$ analisados, ou seja usando $\tilde{q} = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ no intervalo $t \in [0, 3]$.

2 Função Logaritmo generalizado

A função $\tilde{q}$-*logaritmo* é definida como o valor da área abaixo da função (1) no intervalo $t \in [1, x]$, ou seja

$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\tilde{q}}}. \tag{2}$$

1. Mostre, usando (2), que

$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \frac{x^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} \tag{3}$$

2. Mostre que, para $\tilde{q} < 0$, a função $\ln_{\tilde{q}}(x)$:

   i) diverge na origem: $\ln_{\tilde{q}}(0) = -\infty$;

   ii) converge quando $x \to \infty$: $\ln_{\tilde{q}}(\infty) = |1/\tilde{q}|$;

   iii) Para verificar esses resultados plote $\ln_{\tilde{q}}(x)$ usando $\tilde{q} = -1/2, -1, -2$ no intervalo $x \in [0, 3]$.

3. Plote, em um mesmo gráfico, a função logaritmo natural $\ln(x)$ e a função $\ln_{\tilde{q}}(x)$ usando $\tilde{q} = 0.1, 0.01, 0.001$. Note que no limite de $\tilde{q} \to 0$, a função logaritmo generalizado recupera a função logaritmo natural.

4. Mostre que, para $\tilde{q} > 0$, a função $\ln_{\tilde{q}}(x)$:

   i) converge na origem: $\ln_{\tilde{q}}(0) = -1/\tilde{q}$;

   ii) diverge, assintoticamente, para $\ln_{\tilde{q}}(x) \sim x^{\tilde{q}}/\tilde{q}$ quando $x \to \infty$.

5. Ainda considerando $\tilde{q} > 0$ a divergência da função $\ln_{\tilde{q}}(x)$ pode ser dividida em três categorias. Para verificar isso, plote em um mesmo gráfico a função (1) usando $\tilde{q} = \frac{3}{2}, 2, 3,$. Verifique que:

   i) para $0 < \tilde{q} < 1$ o gráfico é concavo, ou seja, a divergência é suave;

   ii) para $\tilde{q} = 1$ a divergência é linear;

   iii) para $\tilde{q} > 1$ o gráfico é convexo.

3 Função Exponencial Generalizado

A função inversa da função $\tilde{q}$-logaritmo é a função $\tilde{q}$-exponencial

$$e_{\tilde{q}}(x) = (1 + \tilde{q}x)^{\frac{1}{\tilde{q}}}, \tag{4}$$

de forma que para $\tilde{q} = 0$ se re-estabelece a função exponencial usual.

1. Plote, em um mesmo gráfico, a função exponencial e^x e a função $e_{\tilde{q}}(x)$ usando $\tilde{q} = 0.1, 0.01, 0.001$. Note que no limite de $\tilde{q} \to 0$, a função exponencial generalizado recupera a função exponencial usual.

2. Mostre que $e_{\tilde{q}}(x)$ é a função inversa de $\ln_{\tilde{q}}(x)$, ou seja, mostre que $\ln_{\tilde{q}}(e_{\tilde{q}}(x)) = x$ e que $e_{\tilde{q}}(\ln_{\tilde{q}}(x)) = x$.

3. Plote num mesmo gráfico a função $e_{\tilde{q}}(x)$ usando $\tilde{q} = -1, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 3,$ no intervalo $x \in [-3, 3]$.

4. Note, através do gráfico feito anteriormente, que a divergência da função $e_{\tilde{q}}(x)$ pode ser dividida em três categorias. Verifique que:

   i) para $\tilde{q} > 1$ o gráfico é concavo, ou seja, a divergência é suave;

   ii) para $\tilde{q} = 1$ a divergência é linear;

   iii) para $\tilde{q} < 1$ o gráfico é convexo.

4 Modelo Generalizado para Dinâmica de Populações

Um modelo generalizado para dinâmica de populações é dado por

$$\frac{dN}{dt} = -Nr \ln_{\tilde{q}} \left(\frac{N}{K} \right) \tag{5}$$

com solução

$$N(t) = \frac{K}{e_{\tilde{q}} \left(\ln_{\tilde{q}} \left(\frac{K}{N_0} \right) e^{-rt} \right)}, \tag{6}$$

onde N_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento, K a capacidade de carregamento e $\tilde{q}$ um parâmetro do modelo.

1. Mostre que para $\tilde{q} = 1$ o modelo (5) e a solução (6) recuperam o modelo de Verhulst;

2. Mostre que para $\tilde{q} = 1$ e $K \to \infty$ o modelo (5) e a solução (6) recuperam o modelo de Malthus;

3. Mostre que para $\tilde{q} \to 0$ o modelo (5) e a solução (6) recuperam o modelo de Gompertz;

4. Plote, num mesmo gráfico, a solução (6) para diferentes valores de $\tilde{q}$. Sugestões: $\tilde{q} = -2, -1, 0.01, 1, 2$

5. O modelo (5) pode ser escrito na forma

   $$\frac{dN}{dt} = NF(n) \tag{7}$$

   onde introduzimos a função de saturação

   $$F(n) \equiv -r \ln_{\tilde{q}} (n), \tag{8}$$

   com $n \equiv N/K$. A função $F(n)$ pode ser interpretada como a taxa de crescimento efetivo da população.

   i) Plote, num mesmo gráfico, a função $F(n)$ no intervalo $n \in [0, 1]$ usando $r = 2$ e vários valores de $\tilde{q}$. Sugestões: $\tilde{q} = -2, -1.5, -1, -0.5, 0.01, 0.5, 1, 1.5, 2, 3$;

   ii) Quais os regimes de comportamentos que se observa desse gráfico?

References

[1] Brenno Caetano Troca Cabella, and Alexandre Souto Martinez, Fabiano Ribeiro (PDF). Data Collapse, Scaling Functions and New Analytical Solutions of Generalized One-Species Population Dynamics Models

[2] Alexandre Souto Martinez (PDF). Modelos Matemáticos, Probabilísticos e Computacionais.