

# Projeto 4: População Humana

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

May 17, 2013

## 1 Propriedades da função exponencial generalizada

1. Mostre que para  $\tilde{q} < 0$ , a função exponencial generalizada  $e_{\tilde{q}}(x)$  diverge em  $x = x_c$ , onde  $x_c$  é finito. Mostre que  $x_c = 1/|\tilde{q}|$ ;
2. Mostre que para  $\tilde{q} > 0$ , a função  $e_{\tilde{q}}(x)$  diverge apenas em  $x = \infty$ ,

## 2 Dados da População Humana

Considere a tabela abaixo, que contém os dados da população Humana:

World human population.

Year	Population (millions)	Year	Population (millions)
1000	200	1955	2780
1650	545	1960	3005
1750	728	1965	3345
1800	906	1970	3707
1850	1171	1975	4086
1900	1608	1980	4454
1910	1750	1985	4850
1920	1834	1990	5263
1930	2070	1995	5674
1940	2295	2000	6070
1950	2517	2005	6453

Figure 1: Dados da População humana ao longo do tempo.

1. Plote os dados acima usando o gnuplot ou o xmgrace;
2. Use o gnuplot ou o xmgrace para fitar o modelo de Malthus:  $N(t) = N_0 e^{rt}$ , variando os parâmetros  $N_0$  e  $r$ , onde  $N_0 \equiv N(t=0)$  é a população inicial e  $r$  a taxa de crescimento. Note que esse modelo não captura a tendência dos dados.

### 3 Modelo de Malthus Generalizado: Modelo de *von Foerster*

1. von Foerster, em 1960 [5] propôs o seguinte modelo:

$$\frac{d}{dt}N = rN^{1-\tilde{q}} \quad (1)$$

onde  $r$  é a taxa de crescimento e  $\tilde{q}$  um parâmetro do modelo.

2. Mostre que a solução do modelo (1) é dada por

$$N(t) = N_0 e_{\tilde{q}}(r_q t), \quad (2)$$

onde  $e_{\tilde{q}}(x)$  é a função exponencial generalizada e  $r_q \equiv r/N_0^{\tilde{q}}$ . Como de praxe,  $N_0$  é a população inicial.

3. Fazendo um ajuste dos dados da população humana com a solução (2), temos que a melhor descrição é com os parâmetros assumindo os valores  $N_0 = 11.10^7$ ,  $r_{\tilde{q}} = 0,000452635$  e  $\tilde{q} = -1,09$ , conforme apresentado em [4]. Verifique esse resultado plotando num mesmo gráfico: i) dados da população humana; ii) solução (2) usando parâmetros com os valores mencionados;
4. O que você conclui com uma análise visual desse gráfico? O modelo é bom para descrever os dados experimentais?
5. Visite o site <http://www.census.gov/population/international/index.html> e veja (na parte esquerda da pagina) a população humana de hoje. Coloque o valor observado no gráfico plotado na questão (3) dessa seção. O modelo de von Foerster previu esse resultado?
6. Usando as propriedades da função exponencial generalizada (veja [2]), mostre que a solução (2), quando  $\tilde{q} < 0$ , também pode ser escrita como

$$N(t) = \frac{N_0}{qr_{\tilde{q}}(t_c - t)^{\frac{1}{|\tilde{q}|}}} \quad (3)$$

onde  $t_c \equiv 1/\tilde{q}r_{\tilde{q}}$  é o instante de tempo em que a população diverge.

7. Usando os valores de parâmetros apresentados, verifique que o modelo prevê uma explosão da população humana em  $t_c = 2026,86$ ;
8. Discuta esse resultado tendo em vista o que você respondeu na pergunta (4) dessa seção.

### 4 Taxa per capita de Crescimento

Todos os modelos de crescimento populacional que estudamos podem ser escritos na forma

$$\frac{d}{dt}N = NF(N), \quad (4)$$

onde a função  $F(N)$  é a chamada *taxa per capita de crescimento*<sup>1</sup>.

1. Mostre que para o modelo de Malthus,  $F(N) = r$ .
2. Mostre que para o modelo de Verhulst,  $F(N) = r(1 - N/K)$ ;
3. Gompertz,  $F(N) = -r \ln(N/K)$ ;

---

<sup>1</sup>Per capita significa “por pessoa” ou melhor, por individuo

4. Von Foerster  $F(N) = rN^{-\tilde{q}}$
5. Faça um gráfico de  $F(N) = rN^{-\tilde{q}}$  (von Foerster) em função de  $N$ , usando  $\tilde{q} = -1,09$  e  $r = 2$ , ou seja, descrição da população humana. Note que a taxa de crescimento per capita da população humana cresce com o tamanho da população. Como você explica esse resultado?

## References

- [1] Brenno Caetano Troca Cabella, and Alexandre Souto Martinez, Fabiano Ribeiro (PDF). Data Collapse, Scaling Functions and New Analytical Solutions of Generalized One-Species Population Dynamics Models
- [2] Alexandre Souto Martinez (PDF). Modelos Matemáticos, Probabilísticos e Computacionais.
- [3] D. Strzałka, F. Grabowski, Towards possible q-generalizations of the Malthus and Verhulst growth models (PDF), *Physica A* 387 (2008) 2511–2518.
- [4] D. Strzałka, Connections between von Foerster coalition growth model and Tsallis q-exponential (PDF), *Acta Physica Polonica B* 40 (1) (2009) 41–47.
- [5] H. von Foerster, P. M. Mora, L. W. Amiot, Doomsday: Friday, 13 november, a.d. 2026 (PDF), *Science* 132 (1960) 1291–1295.