Um Modelo para Dinâmica de Populações

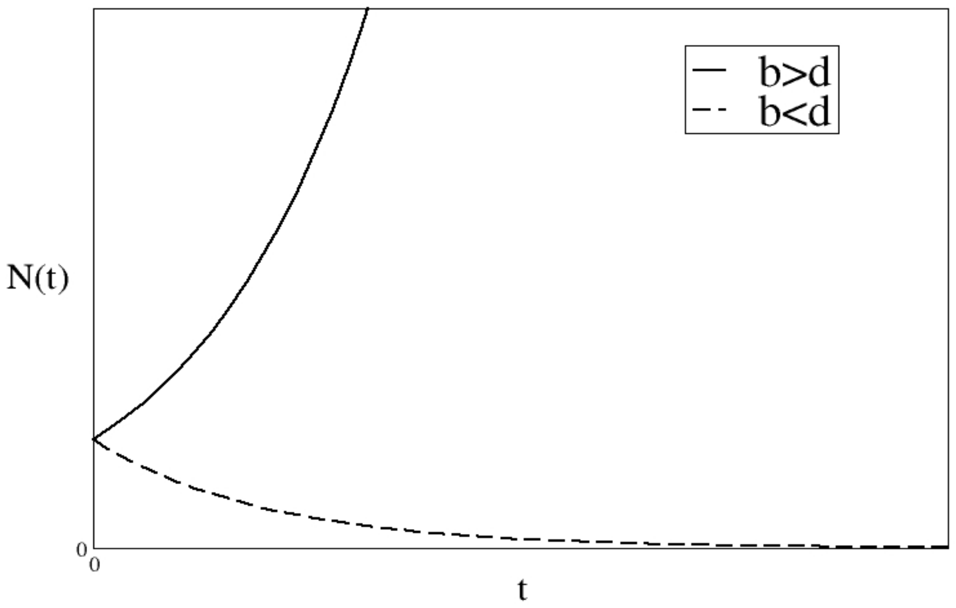
$$\frac{dN}{dt} = \text{Nascimentos} - \text{mortes} + \text{migração}$$

- N_0 : População Inicial
- b: Taxa de natalidade;
- d: taxa de mortalidade;
- r=(b-d) : taxa de crescimento;

Modelo de Malthus:

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN = (b-d)N$$

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$$



Analogia com Matemática Financeira

Deposito Inicial: $ 100,00

Juros Poupança	duplica saldo	Saldo após 70 anos
1,00%	70 anos	$ 200,00
5,00%	14 anos	$ 3.200,00
10,00%	7 anos	$ 102.400,00

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Explosão de Ratos

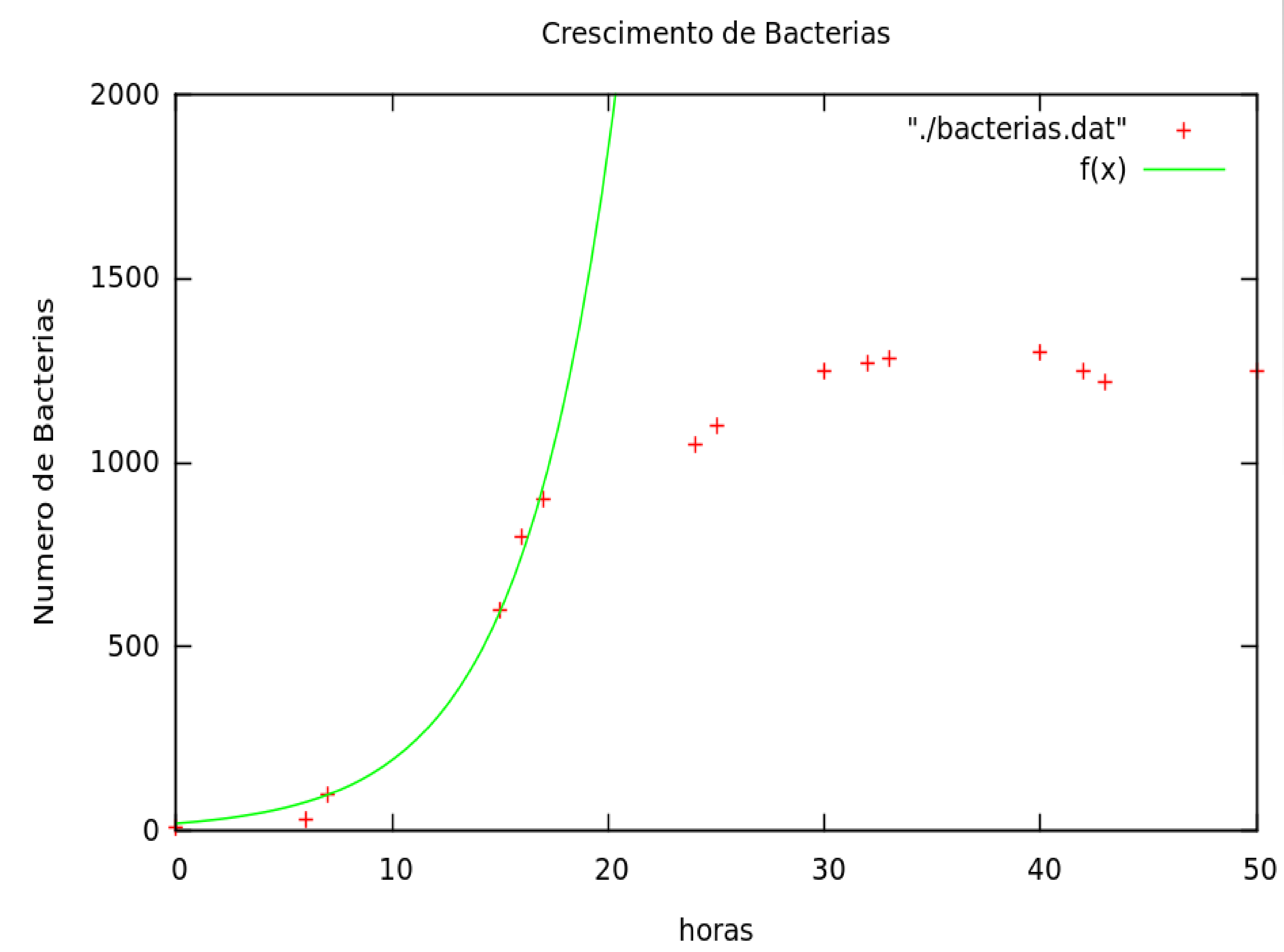
- Populações Reais crescem exponencialmente?
- Considere uma População de Ratos descrita pelo modelo de Malthus;
- Cada rato pesa 0,5 Kg;
- Quanto tempo a população de Ratos atinge um ponto de Colapso gravitacional?

Dados: Massa Minima de estrela: 50 x massa de Jupter

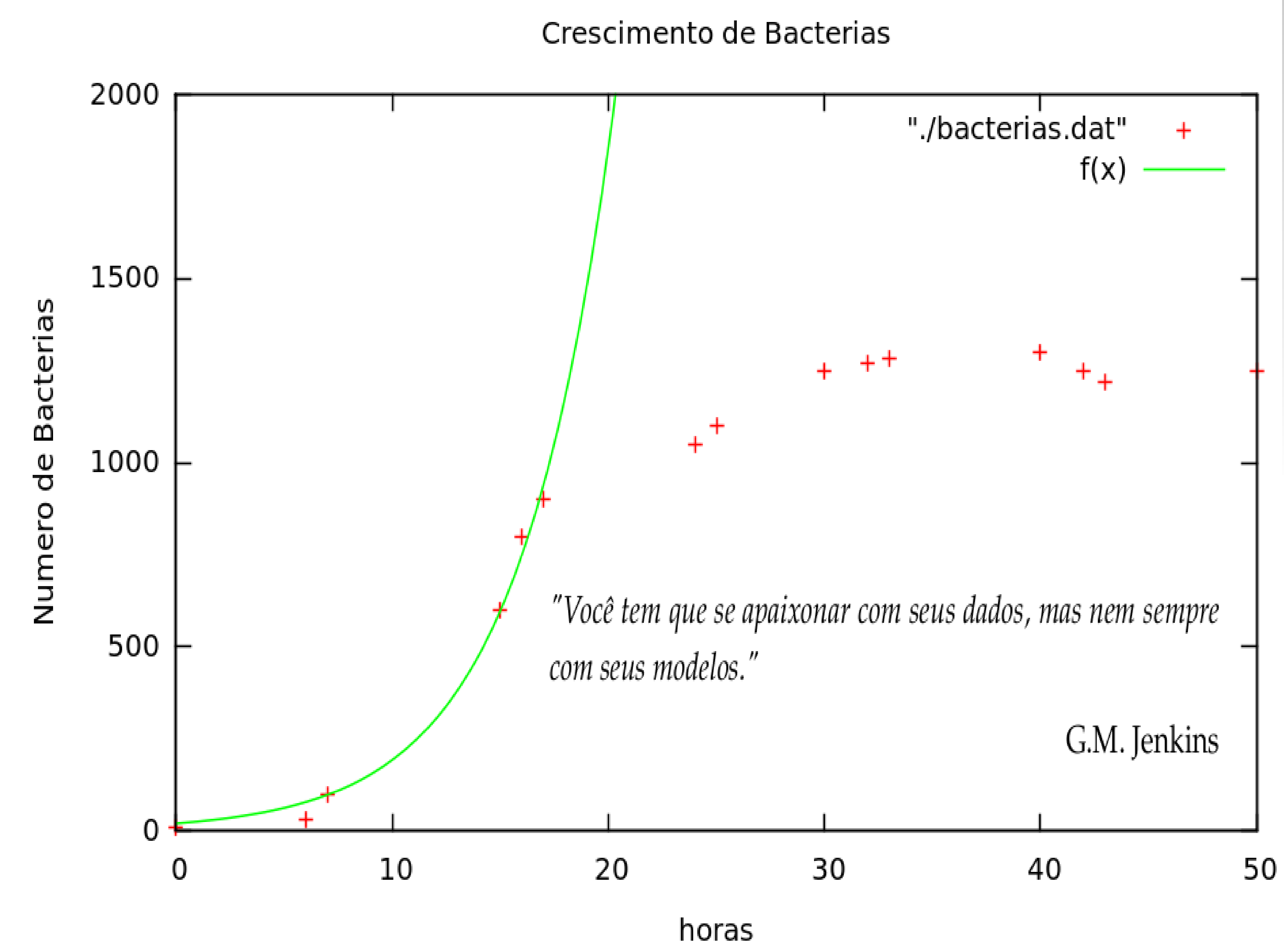
Massa Minima de Buraco Negro: 10^23 kg

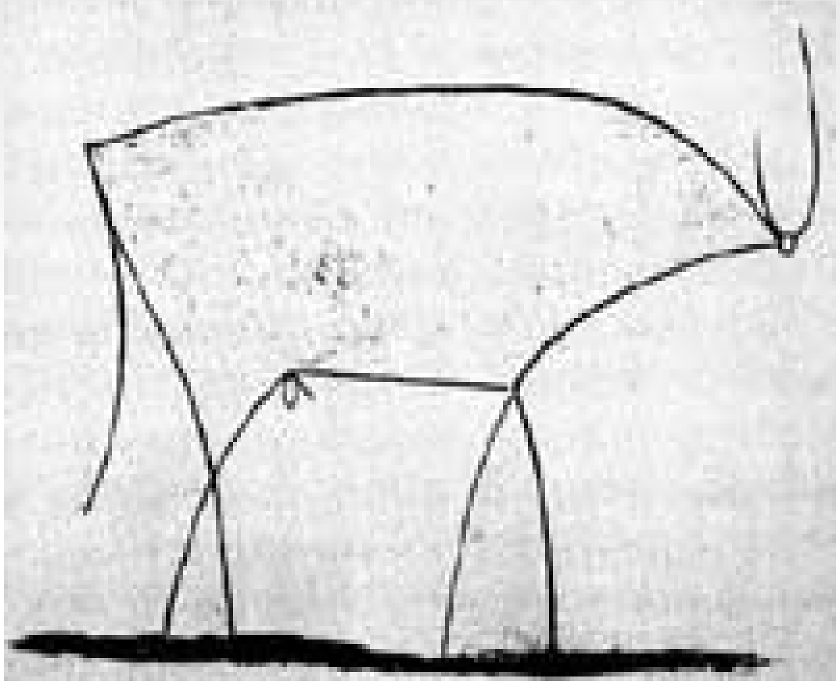
Dados Experimentais

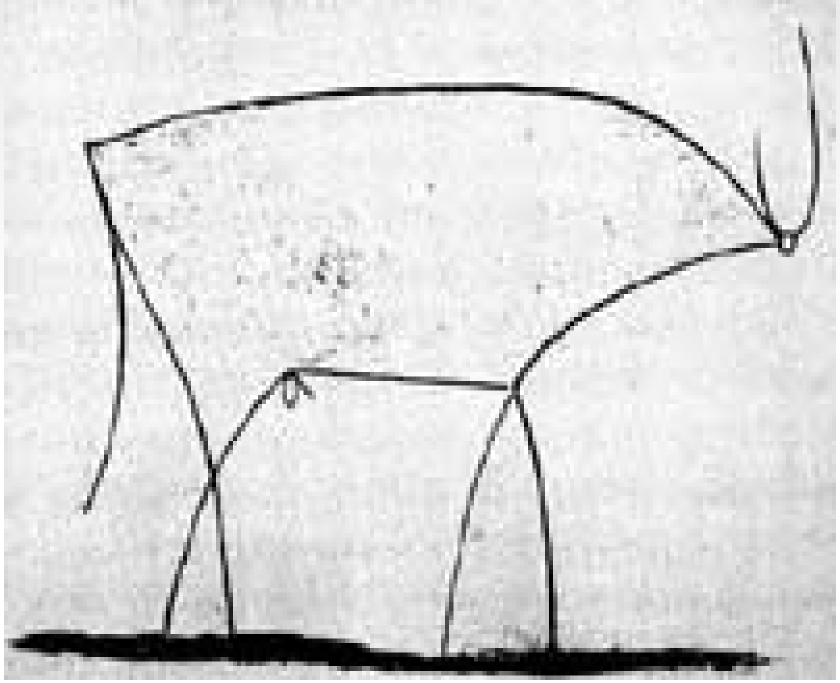
- Mortalidade aumenta com a densidade;
- Fecundidade diminui com a densidade;
- Tamanho dos Individuos Adultos diminui com a densidade;

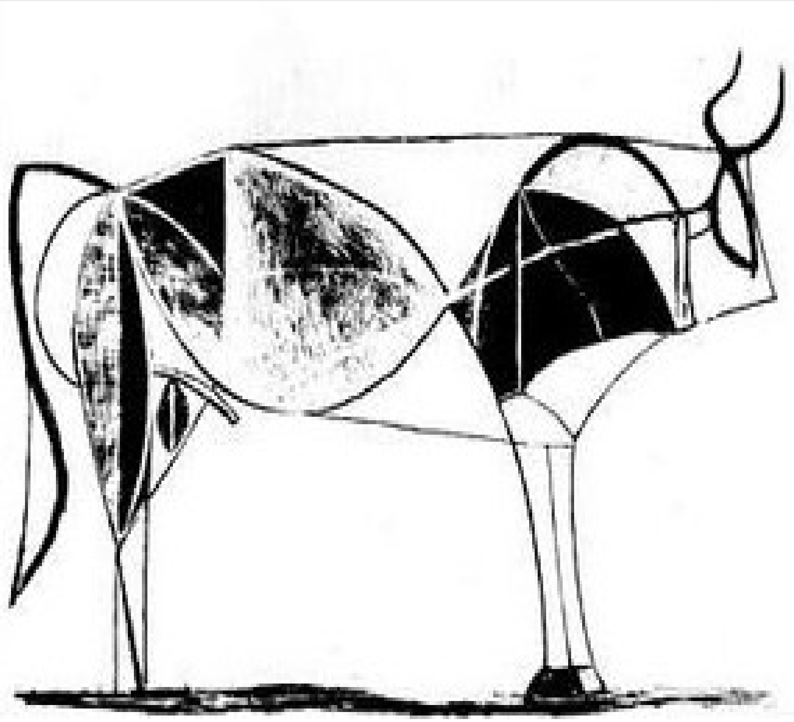


Crescimento de Bacterias
"./bacterias.dat"
f(x)
Numero de Bacterias
0
500
1000
1500
2000
0
10
20
30
40
50
horas


Crescimento de Bacterias
"./bacterias.dat"
f(x)
Numero de Bacterias
horas
0
500
1000
1500
2000
0
10
20
30
40
50
"Você tem que se apaixonar com seus dados, mas nem sempre com seus modelos."
G.M. Jenkins

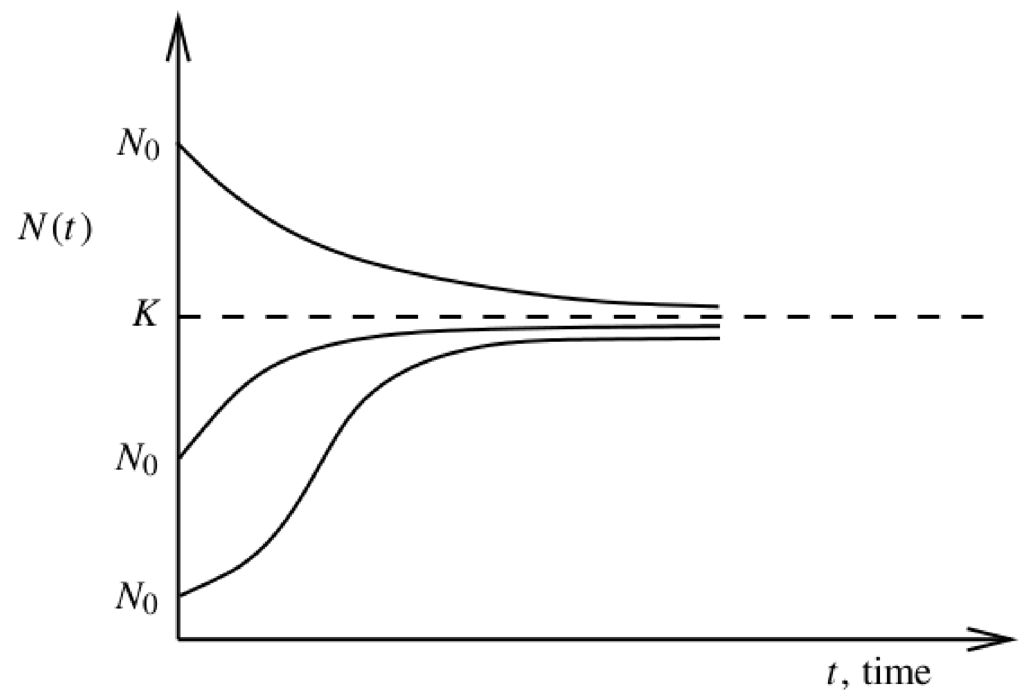




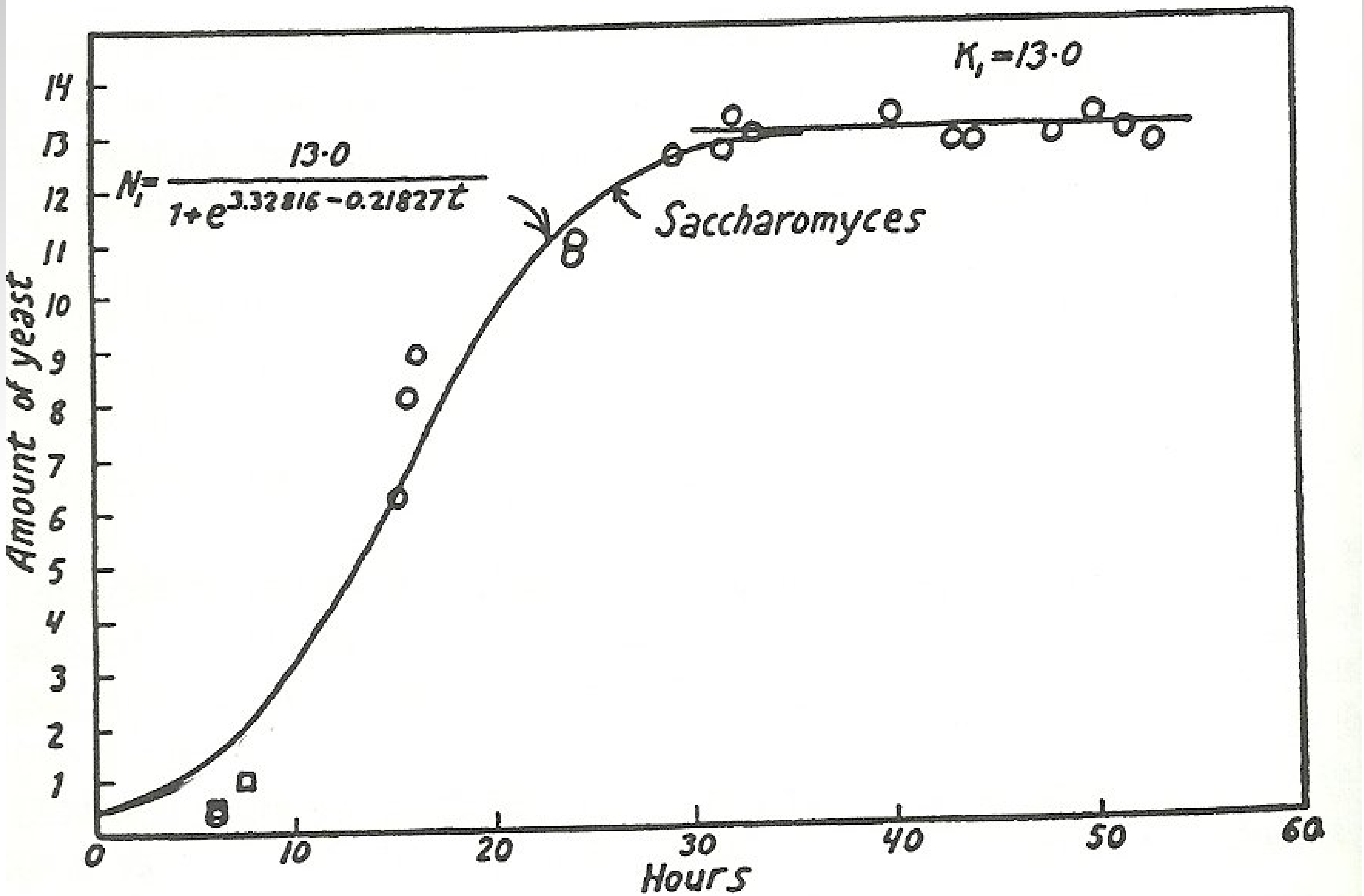


Modelo de Verhulst

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K),$$



$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{\left[K + N_0\left(e^{rt} - 1\right)\right]} \quad \to K \quad \text{as} \quad t \to \infty,$$


$K_1 = 13 \cdot 0$
$N_1 = \frac{13 \cdot 0}{1 + e^{3.32816 - 0.21827t}}$
Saccharomyces
Amount of yeast
Hours
0
10
20
30
40
50
60
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

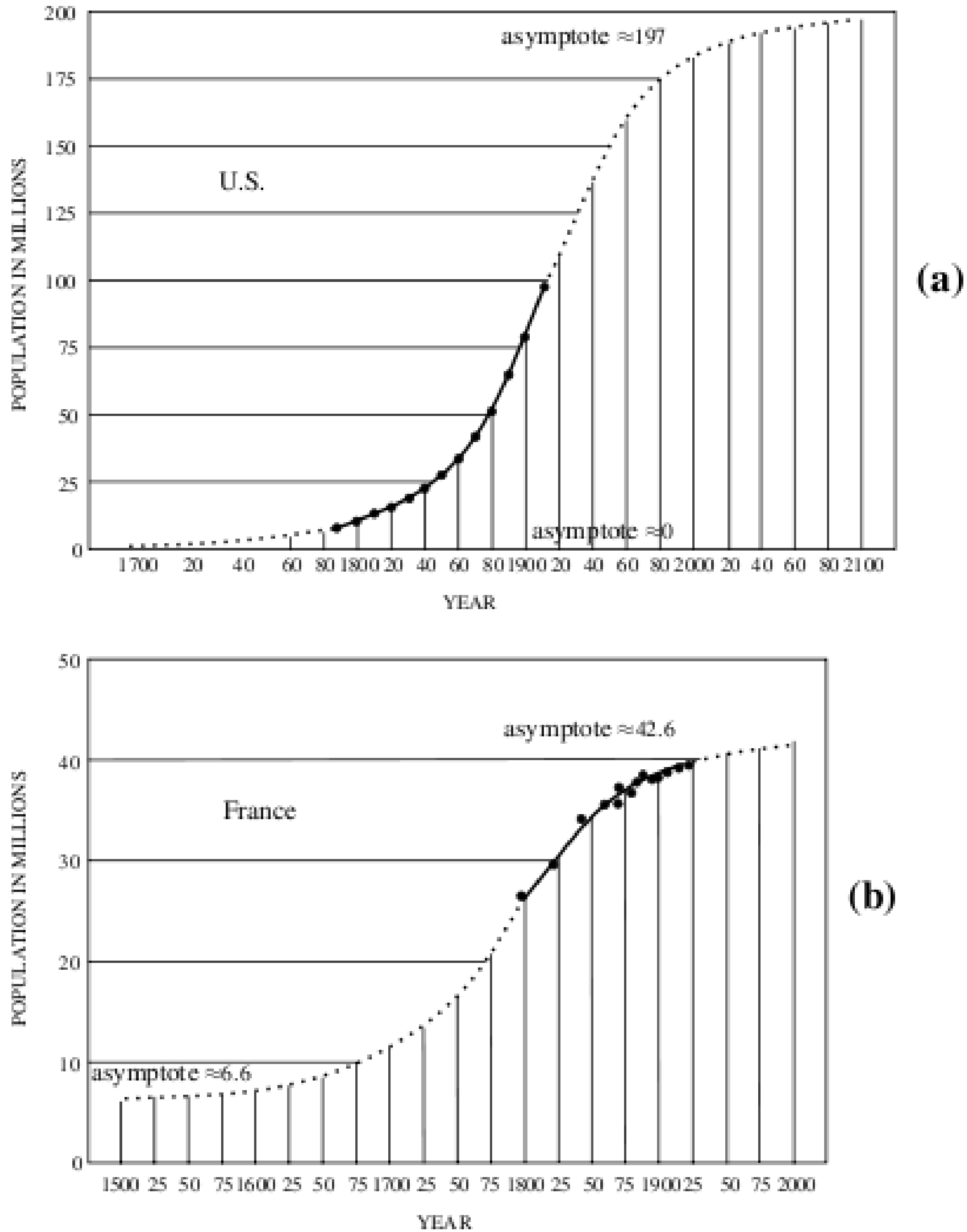
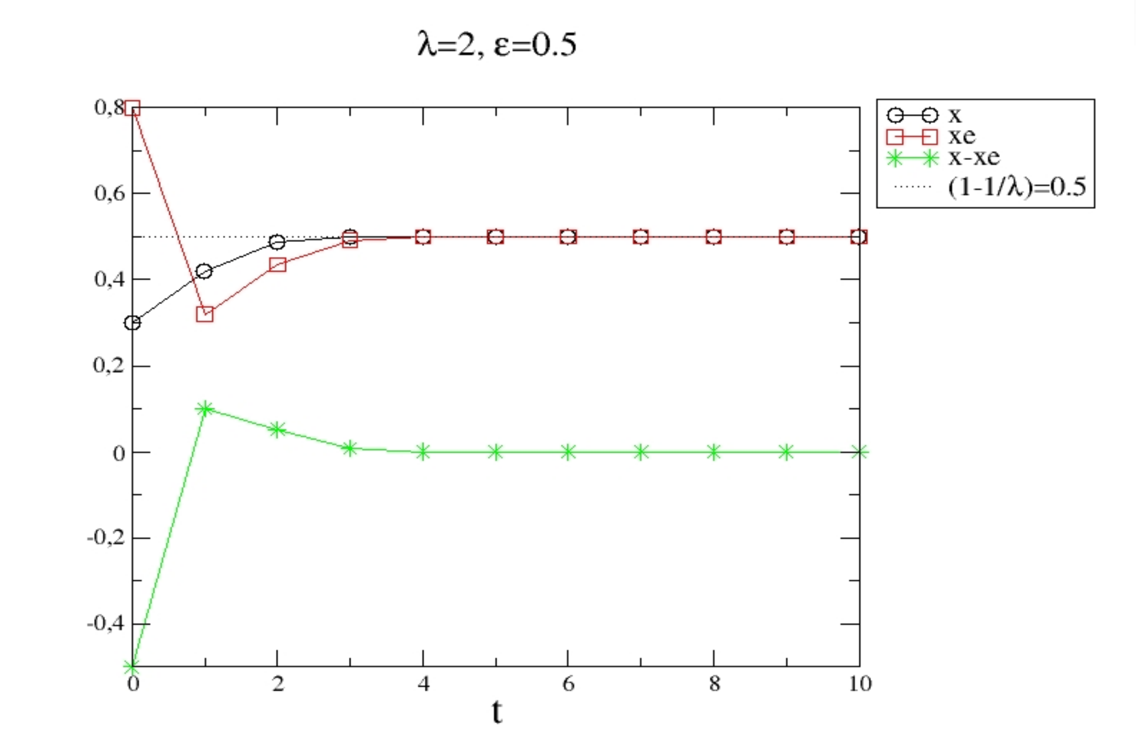
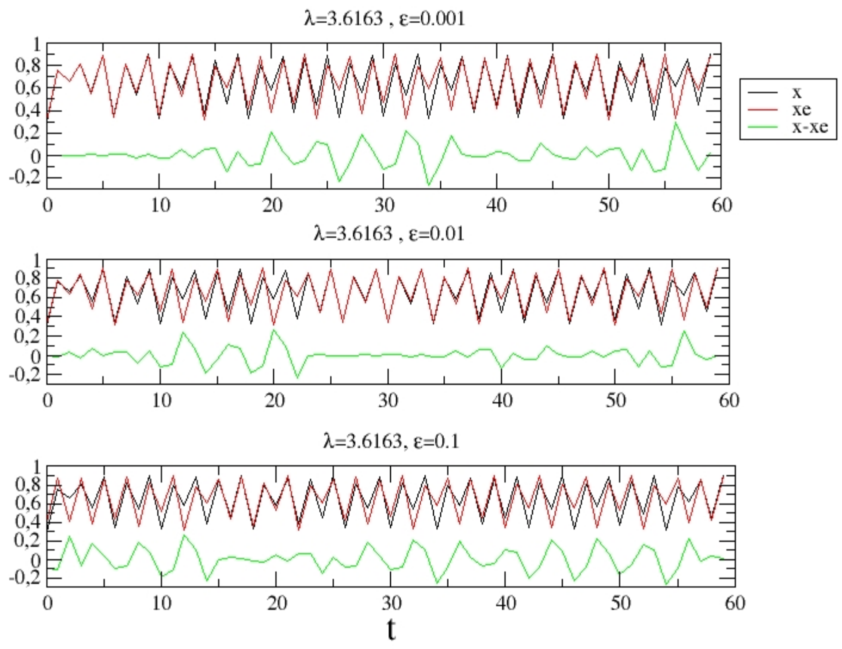


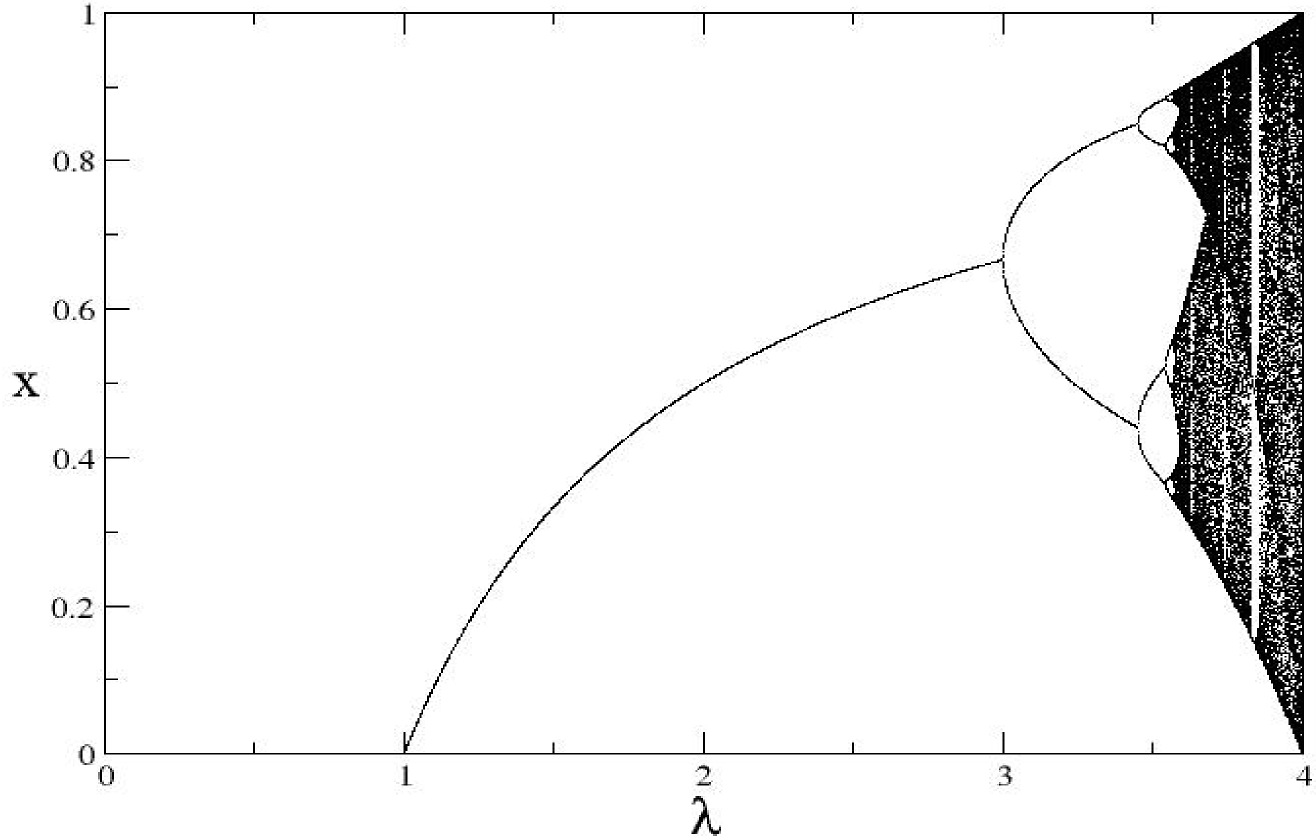
Figure 1.2. Logistic population growth (1.3) used to fit the census data for the population of (**a**) the U.S. and (**b**) France. The data determine the parameters only over a small part of the growth curve. (Redrawn from Pearl 1925)

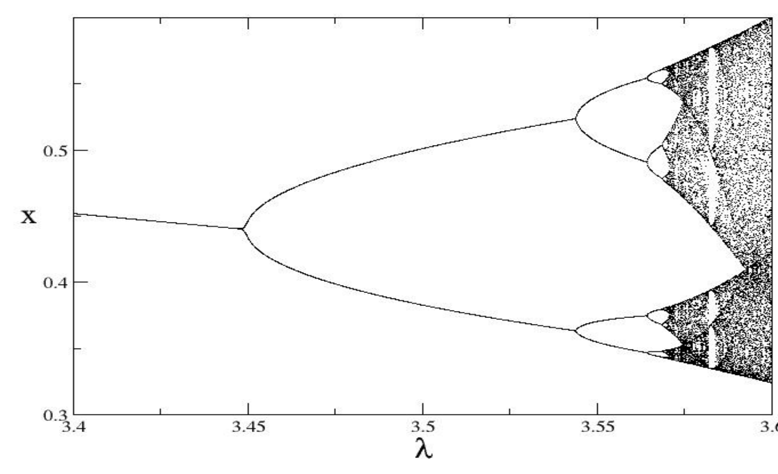
Modelo Discreto – Mapa Logístico

$$x(t+1) = \lambda x(t)\Big(1 - x(t)\Big),$$






1
0.8
0.6
x
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
λ


0.5
x
0.4
0.3
3.4
3.45
3.5
3.55
3.6
λ