

## 2º Lista de Exercícios de Transição de Fases

Prof. Dr. Fabiano Ribeiro

August 20, 2013

1. Explique:

- materiais paramagnéticos;
- materiais ferromagnéticos;
- magnetização espontânea;
- parâmetro de ordem;
- fase paramagnética;
- fase ferromagnética;
- Transição de 1. ordem;
- Transição de 2. ordem;
- Ponto Crítico;
- temperatura crítica;
- histerese;
- coercividade;
- comprimento de correlação;
- função de correlação;
- susceptibilidade magnética;
- expoentes críticos;
- modelo de Ising em uma dimensão;
- modelo de Ising em duas dimensões;
- modelo de Ising em três dimensões;

2. Considere um sistema de spins não interagentes, dado pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -B \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (1)$$

onde  $B$  é o campo externo e  $\sigma_i = \pm 1$  para todos os sítios.

- Determine a função de partição desse sistema;
- Determine a magnetização em função da temperatura;
- Faça um gráfico da magnetização em função da temperatura;
- Esse sistema apresenta magnetização espontânea? Explique.

3. O modelo de Ising unidimensional é dado pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - B \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (2)$$

com  $J > 0$ ,  $B$  o campo externo e  $\sigma_i = \pm 1$  para todos os sítios. Note que  $J = 0$  conduz ao modelo não interagente (1).

- Construa a matriz de transferência desse modelo;
  - Encontre os auto-valores dessa matriz;
  - Encontre a função de partição desse modelo;
  - Determine a magnetização em função da temperatura. Este modelo exibe uma magnetização espontânea?
4. Considere o modelo de Ising dado pelo hamiltoniano (2).

- Em campo nulo ( $B = 0$ ), mostre que

$$\langle \sigma_k \sigma_l \rangle = (\tanh \beta J)^{|k-l|}; \quad (3)$$

- Mostre que

$$\chi(T, B) \equiv \left( \frac{\partial m}{\partial B} \right)_T = \frac{\beta}{N} \sum_{i,j=1}^N (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle) \quad (4)$$

- Use o resultado anterior a fim de obter uma expressão para a susceptibilidade magnética a campo nulo,  $\chi_0 \equiv \chi(T, B \rightarrow 0)$ . Esboce um gráfico de  $\chi_0$  contra a temperatura.
  - Mostre que o calor específico a campo nulo pode ser escrito como uma soma sobre funções de correlação de quatro spins.
5. Considere um modelo unidimensional de spin 1, definido pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} + D \sum_{i=1}^N S_i^2 \quad (5)$$

onde  $J > 0$ ,  $D > 0$  e  $S_i = -1, 0, 1$ , para todos os sítios da cadeia.

- utilize a técnica da matriz de transferência, com condições periódicas de contorno para escrever a função canônica de partição em termos do traço da  $N$ -ésima potência de uma certa matriz de transferência. Calcule os autovalores dessa matriz de transferência.
  - Obtenha expressão para a energia interna e a entropia por spin.
  - Qual o estado fundamental desse modelo ( $T = 0$ ) em termos do parâmetro  $d = D/J$ ? Obtenha a forma assintótica dos autovalores da matriz de transferência, para  $T \rightarrow 0$ , nas regiões características do eixo  $d$ .
6. O modelo de Ising em 2 dimensões pode ser simulado por meio de um applet disponível na webpage:

[www.pha.jhu.edu/~javalab/ising](http://www.pha.jhu.edu/~javalab/ising)

- Anote os valores da temperatura e da correspondente magnetização  $M$  e da energia  $E$  na tabela (1). Use o máximo de pontos possível.
- Faça um gráfico da Magnetização em função da temperatura. Explique esse gráfico no contexto de transição de fases.

$T$	$M$	$E$
...	...	...

Table 1: Tabela a ser preenchida com os dados observados na simulação computacional.

- (c) Considerando apenas os dados com temperatura menor que a temperatura crítica  $T_c = 2,2691853$ , faça um fit dos dados (usando gnuplot, por exemplo) usando a função

$$m = A(T_c - T)^\beta. \quad (6)$$

Os parâmetros  $A$  e  $\beta$  devem ser ajustados pelo fit;

- (d) Faça agora um gráfico com os dados e com a curva gerada pelo fit;
- (e) Qual o valor obtido do expoente crítico  $\beta$ ? Compare com os valores da literatura. Explique.
- (f) Ajuste a temperatura na temperatura crítica  $T_c = 2,2691853$ . Explique o que acontece no sistema.