Boletim Lavrense de Matemática

Edição 14, 15 de outubro de 2023

Tome melhores decisões: aprenda Combinatória

Tomar decisões é sempre um processo difícil. Mas saber de quantas maneiras diferentes podemos tomar uma decisão pode nos dar uma nova perspectiva sobre o problema. E este é um dos pontos que a Análise Combinatória investiga. Com o desenvolvimento da computação, algoritmos também podem ser utilizados para ajudar na tomada de decisão. Na reportagem Especial dessa edição, descrevemos as principais perguntas que a Análise Combinatória busca responder, e os principais matemáticos envolvidos no desenvolvimento dessa área da matemática.

BIOGRAFIA

Quadricentenário do nascimento de Pascal

Em 19 de junho de 2023 o nascimento de Blaise Pascal completou 400 anos. Pascal foi um gênio matemático que contribuiu para o desenvolvimento das ciências e foi também um dos precursores em novas áreas da matemática como geometria projetiva e cálculo das probabilidades. Na 14ª edição do Boletim Lavrense de Matemática, convidamos o leitor a conhecer um pouco sobre a vida e a obra deste jovem que foi um dos grandes e mais notáveis intelectuais da história.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Triângulo de Pascal

O triângulo aritmético infinito, mais conhecido por Triângulo de Pascal, é composto pelos coeficientes das expansões binominais, tal triângulo apresenta diversas propriedades. Ele foi objeto de estudo de muitos matemáticos. Um dos estudos mais famosos a respeito desse triângulo foi de Blaise Pascal que o estudou profundamente e provou várias de suas propriedades e por esse fato é conhecido por Triângulo de Pascal, mesmo não sendo o primeiro a dedicar o estudo a esse triângulo, indícios desse triângulo aparecem 2000 anos antes do nascimento de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

EDITORES
DEX/UFLA
Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Ricardo Edem Ferreira
Thais Presses Mendes

ESPECIAL

Um pouco sobre Análise Combinatória

Análise Combinatória é um ramo da matemática que se propõe a resolver problemas que envolvem contagem de agrupamentos de elementos de conjuntos finitos. A esses agrupamentos dá-se o nome de arranjos. Por exemplo, $(2, 1, 4)$ é um arranjo de três elementos do conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ou seja, um agrupamento ordenado de três elementos do conjunto X.

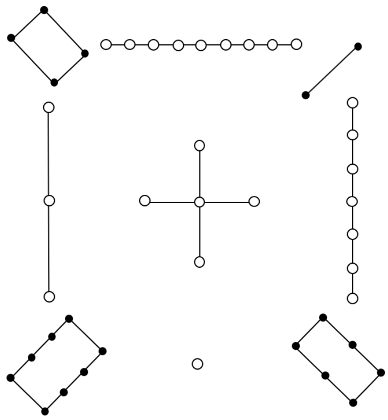
Existem três problemas básicos de Combinatória: existência, contagem e otimização. O problema da existência lida com a questão: Existe pelo menos um arranjo de um tipo particular? O problema de contagem pergunta: Quantos arranjos existem? E o problema de otimização busca responder à pergunta: Dentre todos os arranjos possíveis, qual é o melhor de acordo com alguns critérios pré-estabelecidos?

Na segunda edição do livro *Applied Combinatorics*, de Fred S. Roberts e Barry Tesman, os autores apresentam um exemplo muito interessante dos problemas de Combinatória. Trata-se de um projeto para um gasoduto. Uma vez que o fluxo de gás natural através de um tubo depende do diâmetro do tubo, do seu comprimento, das pressões nas extremidades, da temperatura, das várias propriedades do gás e assim por diante, o problema de projetar um sistema de gasoduto envolve, entre outras coisas, decisões sobre as medidas nas várias junções ou ligações, de modo a minimizar o custo total de construção e operação. Para exemplificar as três questões de Combinatória, considere o problema de construir um gasoduto, por uma rede fictícia e bem modesta usando 14 ligações, com 5 possíveis tamanhos de tubos para cada junção. A primeira questão a ser respondida seria, existe uma forma de usar apenas 14 ligações considerando os 5 possíveis tamanhos de tubos? A segunda questão seria, de quantas maneiras pode-se construir o gasoduto considerando 14 ligações e 5 tamanhos de tubos? E por fim, a terceira questão, dentre todas as possibilidades de construção com as condições oferecidas, qual rede traz o melhor custo-benefício?

Gasoduto na Suíça
Fonte: *Wikipedia*

Como o problema acima sugere, a Combinatória é uma área com grande aplicabilidade. Problemas de recuperação de informações, construção de códigos de correção de erros, contagem de substâncias químicas e assim por diante, podem ser abordados usando Combinatória. Atualmente é difícil separar a Combinatória da computação. Ao mesmo tempo que a construção de computadores mais eficientes permitiu ampliar a classe de problemas de Combinatória que podem ser resolvidos, o desenvolvimento da ciência da computação trouxe consigo vários problemas combinatórios desafiadores. Grande parte da Combinatória moderna está preocupada com o desenvolvimento de algoritmos para resolver problemas de existência, contagem ou otimização.

Apesar de atualmente a Combinatória andar lado a lado com a computação, há registros bastante antigos com relação a esse ramo da matemática. Evidências apontam para o fato de que os criadores do assunto vieram do Oriente. O *Livro das Permutações*, um dos mais antigos clássicos matemáticos chineses, traz o exemplo mais antigo de quadrado mágico conhecido. Segundo a lenda, o imperador chinês Yu, por volta de 2200 a.e.c, viu o diagrama numérico decorando a carapaça de uma tartaruga. Tal lenda é refutada por alguns estudiosos, que alegam, de forma confiável, que o quadrado mágico pode ser rastreado até os escritos chineses do primeiro século da era comum. O diagrama numérico foi posteriormente desenhado como na figura abaixo, onde os numerais são expressos por nós em cordas, nós pretos para os números pares e nós brancos para os números ímpares[1].



Quadrado mágico

Dentre os objetos estudados em Combinatória, permutações e combinações assumem um papel de destaque. Uma permutação é uma sequência ordenada contendo cada símbolo de um conjunto uma única vez. As sequências

$$(4, 1, 3, 5, 2) \quad \text{e} \quad (1, 2, 4, 5, 3)$$

são exemplos de permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Em uma permutação a ordem em que os objetos estão colocados é importante.

Uma combinação com k elementos, é um subconjunto, com k elementos, de um conjunto que possui n elementos. Por exemplo, os conjuntos

$$\{1, 3, 4\} \quad \text{e} \quad \{2, 4, 5\}$$

são combinações de 3 elementos, do conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Uma combinação é um conjunto, por isso a ordem em que os elementos estão dispostos não é importante.

O número de permutações de um conjunto com n elementos é dado pela fórmula

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

[1]Para mais informações sobre quadrado mágico veja Edição 10.

a qual pode ser denotada por $n!$, e o número de combinações, com k elementos, de um conjunto com n elementos, é dado pela fórmula

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1},$$

que pode ser denotado por C_n^k ou $\binom{n}{k}$. Essas fórmulas eram conhecidas por Bhaskara (1114 - 1185) por volta do ano 1150 e provavelmente por matemáticos anteriores, como Brahmagupta (598 - 668). Casos particulares dessas fórmulas podem ser encontrados em textos que datam do século II a.e.c..

A expansão binomial

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

era conhecida pelo matemático grego Euclides de Alexandria por volta de 300 a.e.c.. Os coeficientes $1, 2, 1$ da expansão binomial são os números que aparecem na terceira linha do Triângulo de Pascal. Embora receba o nome de Blaise Pascal (1623 - 1662), o triângulo era de fato conhecido por Chu Shih-Chieh, na China, em 1303, conforme está descrito com mais detalhes na seção de Curiosidades.

No século XVII, Pascal e Pierre de Fermat (1601 - 1665), realizaram estudos de problemas combinatórios relacionados a jogos de azar, que foi a base para a teoria da probabilidade[2]. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) também deve receber crédito pelas contribuições à área, pois deve-se a ele a sugestão, em uma carta a Johann Bernoulli (1667 - 1748), de que seria interessante estudar as partições de números inteiros e, em outra carta, essa direcionada a Christian Huygens (1629 - 1695) em 1679, uma vaga referência a uma geometria de posição. Foi nessa época que os avanços na notação algébrica levaram a uma melhor compreensão de uma ligação entre álgebra e Combinatória: a descoberta da relação entre os coeficientes da expansão binomial de $(a+b)^n$ e o número de combinações de n elementos, tomados k a k, ou seja, C_n^k. Essa ideia era conhecida por Pascal e Leibniz, e foi o matemático francês Abraham de Moivre (1667 - 1754) quem levou a ideia um passo adiante quando exibiu uma regra para encontrar os coeficientes na expansão de

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n.$$

Outra descoberta de De Moivre foi uma forma do Princípio de Inclusão e Exclusão.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707 - 1783) trabalhou nas áreas de Combinatória relacionadas a quadrados mágicos e partições, a relação entre partições e funções simétricas, e expôs a teoria dos grafos. Na mesma época, os matemáticos práticos começaram a usar ideias combinatórias em problemas cotidianos, e Jacob Bernoulli publicou o primeiro livro apresentando métodos combinatórios, *Ars Conjectandi.*

Nos séculos XVIII e XIX, técnicas combinatórias foram utilizadas por William Rowan Hamilton (1805 - 1865) e outros estudiosos para estudar jogos. No século XIX, Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887) desenvolveu uma abordagem teórica de grafos para redes elétricas e Arthur Cayley (1821 - 1895) desenvolveu técnicas de enumeração para estudar química orgânica.

Nos tempos atuais, as técnicas de Combinatória ganharam grande destaque devido a sua aplicabilidade nas mais diversas áreas, como em transporte, processamento de informações, planejamento industrial, engenharia elétrica, codificação, genética, ciência política e uma variedade de outras áreas.

Referências:

Applied Combinatorics, Roberts, F. S., Tesman B. Chapman & Hall, 2009.

The History of Combinatorics, Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, Rl J., Handbook of Combinatorics, Elsevier, 1995.

■

BIOGRAFIA

Blaise Pascal

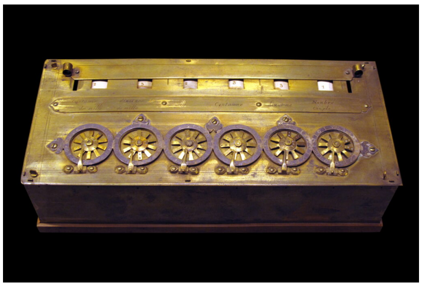
Blaise Pascal nasceu na cidade francesa de Clermont-Ferrand, em 19 de junho de 1623. Filho de Étienne Pascal, professor de matemática, e de Antoinette Begon, Pascal perdeu sua mãe muito cedo, aos três anos de idade, e foi educado por seu pai. Segundo algumas biografias a respeito de Pascal, seu pai não queria que ele lesse livros de matemática antes de completar 15 anos, porém, isso só despertou ainda mais seu interesse pela ciência e, aos 12 anos, demonstrou aptidão pela geometria descobrindo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à soma de dois ângulos retos. A partir disso, foi incentivado pelo próprio pai, que lhe deu uma cópia do livro *Os elementos* de Euclides.

Aos 14 anos, Pascal começou a frequentar com seu pai as reuniões informais da Academia de Mersenne, em Paris. Nessas reuniões, havia discussões sobre diversas ciências, especialmente matemática e física. Foi onde Pascal conheceu estudiosos importantes, tais como o filósofo René Descartes (1596 - 1650) e o matemático Gilles Personne de Roberval (1602 - 1675). Ao completar 16 anos, Pascal publicou seu primeiro trabalho sobre geometria, *Essay pour les coniques.*

Blaise Pascal
Fonte: *Wikipedia*

[2]A Teoria da Probabilidade será abordada na 15^a edição do Boletim Lavrense de Matemática.

Pascal também desenvolveu a "pequena máquina de calcular", uma das primeiras calculadoras que se tem conhecimento, para ajudar seu pai no trabalho de coletar impostos. Ela está atualmente no Conservatório de Artes e Medidas de Paris. Em 1647, dedicou-se ao estudo da física e suas descobertas a respeito do vácuo e as variações da pressão atmosférica causaram grande polêmica entre os cientistas da época, pois muitos contestaram suas teorias, sobretudo quando publicada sua obra *New Experiments Concerning Vacuums.*



Pascalina:
a calculadora de Pascal
Fonte: *www.medium.com*

Em 1651, seu pai faleceu e Pascal recolheu-se na abadia de Port-Royal-des-Champs, para viver uma experiência filosófica e religiosa. Suas duas obras mais famosas são deste período: as *Provinciais* e os *Pensamentos*, a primeira trata do conflito entre jansenistas e jesuítas. Nos *Pensamentos*, sua obra magna, Pascal adianta vários temas que seriam tratados na filosofia contemporânea, tais como a finitude do sujeito e diversos temas do existencialismo. Nesta última, encontra-se sua frase mais citada: *"O coração tem suas razões, que a própria razão desconhece".*

Em 1654, Pascal começou a se comunicar com Fermat e, juntos, desenvolveram as bases da teoria das probabilidades e da Análise Combinatória. Pascal relacionou tais teorias ao triângulo aritmético, atualmente conhecido como Triângulo de Pascal. Os coeficientes binomiais utilizados por ele contribuíram posteriormente para que Isaac Newton (1643 - 1727) descobrisse o Teorema Geral do Binômio, que incluía expoentes fracionários e negativos.

Pascal, que sempre teve uma saúde frágil, adoeceu gravemente em 1659 e morreu em 19 de agosto de 1662, dois meses após completar 39 anos. Seu corpo foi sepultado na Igreja de Saint-Étienne-du-Mont, Ilha de França.

Recentemente, o Papa Francisco publicou uma carta apostólica em comemoração ao 400º aniversário de nascimento de Blaise Pascal. Na carta, intitulada *Sublimitas Et Miseria Hominis*, o Papa descreveu Pascal como um homem de sua época que fez uma defesa intelectual magistral da fé cristã. Ainda segundo o Papa: *"Como cristão, Pascal falou de Jesus Cristo para aqueles que concluíram apressadamente que não há razão sólida para acreditar nas verdades do cristianismo. Por sua vez, ele sabe por experiência que o conteúdo da revelação divina não apenas não se opõe às exigências da razão, mas oferece a resposta surpreendente que nenhuma filosofia jamais poderia alcançar por conta própria".*

Referências:

www.ecalculo.if.usp.br/historia

www.ebiografia.com

www.catholicnewsagency.com/news

■

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Triângulo de Pascal: um triângulo cheio de propriedades matemáticas

Uma palavra recorrente na vida de estudantes do ensino fundamental em disciplina de matemática é a palavra triângulo, dentre elas o Triângulo de Pascal. Mas que triângulo é esse? Nessa matéria veremos um pouco sobre esse interessante objeto matemático.

Não é em todo lugar do mundo que ele leva o nome de Pascal, os chineses o chamam de Triângulo de Yang Hui, os italianos de Triângulo de Tartaglia, há também quem o chama de outras denominações como Triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo Aritmético ou Triângulo Combinatório.

Conforme podemos imaginar, como ocorreu com o Teorema de Pitágoras visto na Edição 13, tal triângulo leva o nome de Pascal mas não é uma descoberta ou invenção dele. Os indianos há 2000 anos antes de Pascal já utilizavam esse triângulo no estudo de métricas musicais. E os chineses o utilizavam 1700 anos antes de Pascal no cálculo aproximado de raízes quadradas, cúbicas, e assim por diante. Mas afinal, quais foram as contribuições de Pascal para o Triângulo Aritmético?

Em 1654, Antoine Gombauld, autodenominado de Cavaleiro de Méré, escreveu uma carta ao matemático Pascal propondo-lhe resolver alguns problemas matemáticos que havia encontrado participando de jogos de azar. Um desses problemas era *"Jogando com um par de dados honestos, quantos lances são necessários para que tenhamos uma chance favorável (ou seja, de mais de 50%) de obtermos um duplo-seis, ao menos uma vez?".*

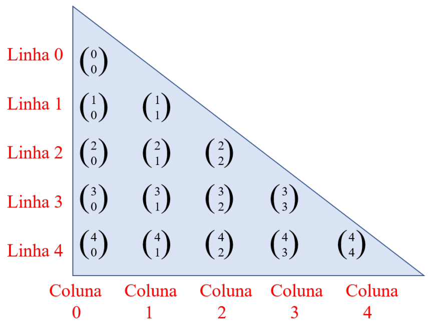
Pascal sabia que a resolução seria pela enumeração combinatorial das possibilidades de ocorrência do duplo-seis. E procurando uma maneira de fazer essa enumeração ele redescobriu e aperfeiçoou uma interpretação combinatória e probabilística do triângulo. E descobriu que em 25 lances de um par de dados, a probabilidade de ocorrer, ao menos uma vez, um duplo-seis é de $50,6\%$.

Após essa resolução, Pascal gastou um ano escrevendo uma monografia sobre o Triângulo Aritmético, *Traité du triangle arithmétique*, que foi publicada postumamente. Quase cem anos depois, em 1739, o matemático francês De Moivre publicou um trabalho em que usou o termo *triangulum arithmeticum pascalianum* para se referir ao Triângulo

Aritmético. A repercussão desse trabalho na época consagrou a denominação de Triângulo de Pascal na Inglaterra, França e mais alguns outros países europeus.

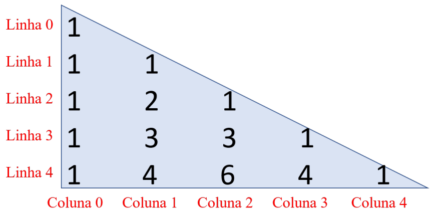
Agora que já conhecemos um pouco da origem do nome Triângulo de Pascal vamos apresentar esse triângulo e algumas de suas propriedades. O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito onde são dispostos os coeficientes das expansões binomiais. Os números que compõem o triângulo apresentam diversas propriedades e relações, e possuem diversas aplicações na área de Análise Combinatória e também probabilidade.

O Triângulo de Pascal é dividido por linhas e colunas, começando sempre da linha zero e da coluna zero.



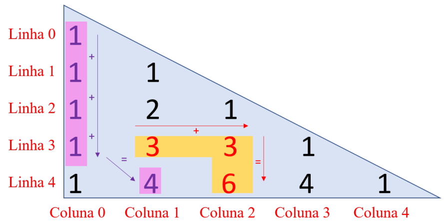
Disposição dos Coeficientes Binomiais ou Combinações

Como mostrado na Figura anterior, ele é formado por combinações, ou seja, na linha 0 e coluna 0, teremos a combinação de 0 elemento tomado de 0 em 0, na linha 1 coluna 1, teremos a combinação de 1 elemento tomado de 1 em 1, e assim por diante. Substituindo as combinações pelos seus respectivos resultados temos o Triângulo de Pascal.



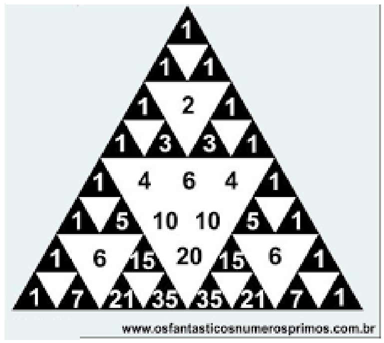
Triângulo de Pascal

Uma propriedade desse triângulo é que um termo qualquer é igual à soma do termo que está na linha acima dele com o termo que está acima dele na coluna anterior, tal propriedade é conhecida por Relação de Stifel. A Figura a seguir mostra um exemplo dessa propriedade na cor laranja. Uma outra propriedade é que a soma dos termos da coluna p até determinada linha n é igual ao termo que está na linha $n+1$ posterior e coluna $p+1$ posterior. A próxima Figura mostra um exemplo dessa propriedade na cor lilás. Há também a propriedade que afirma que a soma dos termos da linha n é 2^n. Outra importante propriedade desse triângulo é que os números que aparecem na linha n são os coeficientes da expansão de $(x+y)^n$, usualmente denotados por $\binom{n}{k}$. Existem outras propriedades do Triângulo de Pascal.



Propriedades do Triângulo de Pascal

Um fato curioso sobre o Triângulo de Pascal é que ele segue o mesmo padrão de cores do Triângulo de Sierpinski quando os números pares são coloridos de branco e os ímpares de preto, conforme imagem abaixo.



Triângulo de Pascal
Triângulo de Sierpinski

Referência:

cdnportaldaobmep.impa.br

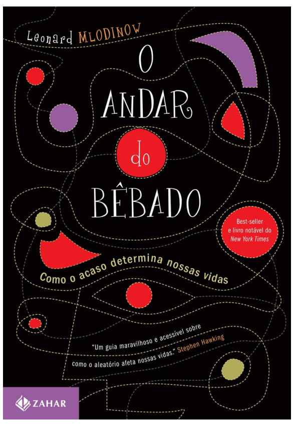
■

SUGESTÃO DE LEITURA

Pode o acaso influenciar a nossa vida?

Publicado pela primeira vez em 2008, *O Andar do Bêbado*, foi e continua sendo um sucesso em vários países, tendo cerca de 180 mil exemplares vendidos apenas no Brasil.

O autor, o físico estadunidense Leonard Mlodinow que além de escrever livros de divulgação científica também foi roteirista de séries como MacGyver e Star Trek, nos conduz em seu livro *O Andar do Bêbado* por um caminho fantástico onde demonstra com muitos exemplos reais como a aleatoriedade dirige nossas vidas.



Fonte: *Companhia das Letras*

Claro que o talento e o preparo de cada pessoa é importante para a realização de seus objetivos na vida, mas Mlodinow nos mostra com exemplos curiosos como o sucesso ou o fracasso de certos empreendimentos dependem de eventos casuais.

O autor nos mostra com bom humor e uma escrita envolvente que podemos tirar algum proveito do fato de que o mundo é em grande parte governado pela aleatoriedade.

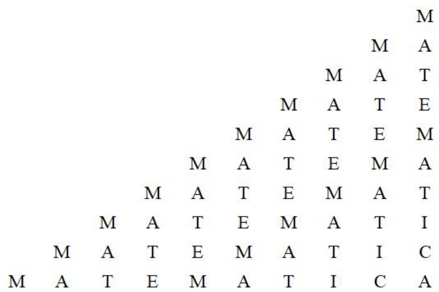
Se for possível aprender essa lição, poderemos viver mais leves sabendo que *"muitas coisas em nossas vidas são tão previsíveis quanto o próximo passo de um bêbado depois de uma noitada"*. ■

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1)De quantos modos é possível formar a palavra MATEMATICA partindo de um M e indo sempre para a direita ou para baixo.



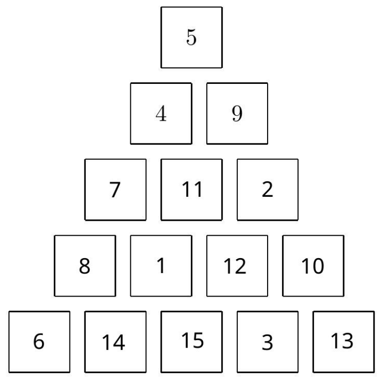
2)Utilizando a mesma figura do desafio 1, de quantos modos é possível formar a palavra ACITAMETAM partindo do A da última linha e última coluna e indo sempre para a esquerda ou para cima.

Referência:

Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios, Augusto C. O. Morgado, João B. P. de Carvalho, Paulo C. P. Carvalho e Pedro Fernandez. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, 2020.

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 13ª edição)

Desafio 1: Uma disposição das cartas que resolve o problema está na figura a seguir



Desafio 2: Observamos que se consideramos o triângulo $\widehat{ABC}$ retângulo, contanto inicialmente o triângulo $\widehat{ABC}$ e considerando a altura desse triângulo em relação ao lado AB, temos 5 triângulos retângulos, caso o triângulo $\widehat{ABC}$ não seja retângulo temos 4 triângulos retângulos. ■

Evento

VIII Workshop de Matemática e Matemática Aplicada

O Workshop de Matemática e Matemática Aplicada (WMMA) tem como objetivo principal o fortalecimento e interação de grupos de pesquisa em matemática.

O evento é uma parceria entre a Universidade Federal de Lavras, a Universidade Federal de São João del-Rei, a Universidade Federal de Alfenas e a Universidade Federal de Ouro Preto.

Em 2023, o WMMA chega à sua 8ª edição e será realizado na cidade de São João del-Rei, nos dias 30 e 31 de outubro e 01 de novembro de 2023. O evento contará com ciclos de plenárias e palestras, apresentações de pôsteres, minicursos e mesa redonda para debater e difundir a pesquisa em Matemática e Matemática Aplicada.

Para mais informações visite o site

www.dmm.ufla.br/wmma/viii

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.