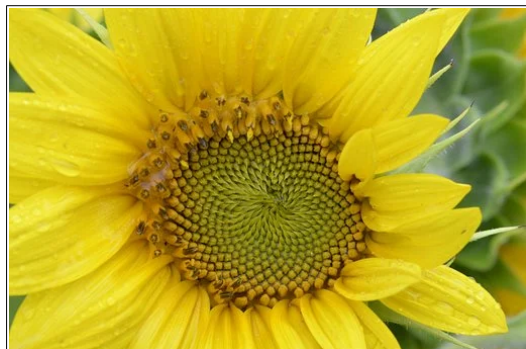


Boletim Lavrense de Matemática

Edição 3, 23 de novembro de 2020



A saga de um jovem para popularizar a ciência e o problema que há séculos encanta as pessoas

Há quase nove séculos o jovem Leonardo se dedicou a popularizar um sistema de numeração que iria mudar o mundo. Dentre suas contribuições à Matemática a proposta de um problema aparentemente simples que está relacionado à proporção áurea, número que muitos acreditam estar associado a tudo que é considerado harmonioso. Confira no nosso Especial um pouco da história de Leonardo de Pisa e algumas de suas contribuições para a ciência.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Sequência de Fibonacci e a proporção áurea

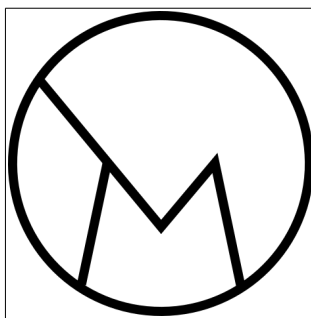
O problema apresentado por Leonardo de Pisa, em seu mais conhecido livro *Liber Abaci* gera uma sequência conhecida como sequência de Fibonacci. Os números dessa sequência

relacionam-se de tal forma que a razão entre dois números consecutivos é um número irracional conhecido como razão áurea ou proporção divina.

PROJETO DE EXTENSÃO

Despertando a criatividade através do raciocínio lógico

Despertar o interesse das pessoas pela Matemática através de desafios que podem ser resolvidos usando a criatividade, sem o uso de fórmulas; contribuir para a melhoria da qualidade do ensino; identificar novos talentos. Esses são apenas alguns dos objetivos da Olimpíada Lavrense de Matemática. Se você ainda não a conhece, convidamos você para conhecer os objetivos e o alcance deste projeto.



Contatos

Site: www.dex.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dex@ufla.br

Índice

Leonardo de Pisa e a sequência de Fibonacci [pág. 2](#)

Curiosidades Matemáticas [pág. 3](#)

Olimpíada Lavrense de Matemática [pág. 4](#)

Desafios Matemáticos [pág. 4](#)

Oportunidade de estudo [pág. 5](#)

Eventos [pág. 5](#)

EDITORES DEX/UFLA

Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Hélcio G. F. Filho
Ricardo Edem Ferreira

ESPECIAL

Leonardo de Pisa e a sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (c. 1170-1240)¹ nasceu na Itália. O pai, um homem de negócios, pode ter-se chamado Bonacci, pois foi postumamente dado a Leonardo o apelido Fibonacci, que significa filho de Bonacci, mas o nome pode também ter origem na sua boa índole, pois um outro significado da palavra Bonacci é “boa natureza”.



Leonardo de Pisa. Fonte: *Wikipedia*.

Fibonacci foi educado em Bugia, porto do Mediterrâneo que hoje se chama Bejaia, no Norte da África, onde aprendeu matemática e conheceu os nove algarismos que então eram conhecidos como sistema numérico hindu. Na época, o sistema de escrita de números em uso, em Pisa, e em toda a Europa ocidental, era constituído pelos numerais romanos e para fazer cálculos usava-se um aparelho chamado ábaco que proporcionava aquilo que o sistema numérico não proporcionava - valor posicional². Um problema com o ábaco é que o trabalho desaparecia logo após ser realizado, não deixando qualquer registro do processo, o que impossibilitava verificar um cálculo sem ter que fazê-lo outra vez. Porém, nessa época, a crescente complexidade das transações comerciais exigia uma técnica mais sofisticada.

Chegando ao Extremo Oriente, os viajantes árabes trouxeram da Índia a descoberta de um sistema de escrever números usando um conjunto de símbolos numéricos (de 1 a 9) que era diferente do seu alfabeto, que podia

explorar um sistema de valor posicional e ainda conceberam um símbolo (zero) para manter os símbolos dos números nas colunas corretas. Por volta do século VII o sistema já estava bem instalado. No entanto, quando Fibonacci chegou a Bugia no fim do século XII apenas um pequeno público de homens instruídos conheciam o sistema hindu. Nem os estudantes e nem os homens de negócios sabiam da sua existência. Rapidamente Fibonacci compreendeu a vantagem da notação indiana sobre o ábaco para as transações comerciais.

Assim, após viajar pelo mundo mediterrâneo para estudar com os mais importantes matemáticos árabes da época, Fibonacci regressou a Pisa por volta de 1200 e imediatamente começou a trabalhar escrevendo um livro acerca da riqueza da nova matemática que tinha aprendido, fornecendo ele próprio contribuições significativas.

Em 1202 publicou o livro *Liber abaci*, ou o Livro de Cálculo. O seu propósito declarado era apresentar o sistema hindu de notação posicional à Europa e explicar o uso dos novos numerais. Ele propunha este sistema não só à elite de estudiosos mas às pessoas comuns empenhadas no mundo do comércio. Fibonacci continuou a juntar informações ao livro e em 1228 saiu uma edição revista e essa é a que chegou até nós.

Dos muitos livros que escreveu existem cópias do *Liber abaci* (1202), *Practica Geometriae* (1220), *Flos* (1225), e *Liber quadratorum* (1225). *Liber quadratorum* é a mais impressionante obra de Fibonacci, embora seja *Liber abaci* a obra pela qual é mais conhecido.

Os numerais hindus, a sua maior contribuição para a civilização ocidental, encontraram a princípio uma vasta oposição. Os conservadores diziam que os números eram difíceis de aprender e suspeitavam que os novos números podiam ser facilmente manipulados. No entanto, por volta do século XV já estavam substituindo

os numerais romanos e o ábaco no comércio.

A aplicação matemática dos novos numerais espalhou-se com a invenção da imprensa e devido, provavelmente, à maior facilidade de cálculo, os séculos XVI, XVII e XVIII assistiram ao extraordinário progresso da matemática e suas aplicações.

Um dos problemas que aparece na terceira edição do *Liber abaci* levou à descoberta pela qual Fibonacci é hoje recordado - os números de Fibonacci e a sequência de Fibonacci.

Agora que já conhecemos um pouco da biografia de Leonardo de Pisa, vamos apresentar a importante sequência que leva o seu nome.

Você sabe o que é uma sequência? Podemos pensar numa sequência como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

O número a_1 é chamado primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, de forma geral, a_n é o n -ésimo termo dessa sequência, conhecido como termo geral.

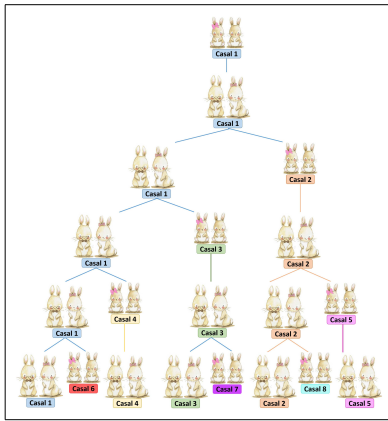
Uma sequência muito importante e conhecida devido à sua relação com a natureza é a sequência de Fibonacci. Ela pode ser encontrada no arranjo de folhas de uma planta, pétalas das flores, conchas espiraladas dos caracóis, galáxias, dentre outros.

Fibonacci considerou o crescimento de uma população ideal de coelhos, originada por um único casal da espécie. Os números dessa sequência descrevem o número de casais de coelhos depois de n meses supondo que:

- no primeiro mês nasce apenas um casal;
- casais reproduzem-se apenas após o segundo mês de vida;
- não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
- todos os meses, cada casal fértil dá à luz a um novo casal; e
- os coelhos nunca morrem.

¹c. é a abreviatura de circa, uma palavra em latim que é usada em datação e que significa “aproximadamente”.

²Atribuição de um valor a cada número, dependente da sua posição numa fileira.



Reprodução dos coelhos. Fonte: arquivo pessoal.

Assim, Fibonacci notou que a quantidade de casais de coelhos mês a mês cresce de forma que o número de casais do mês seguinte será a soma dos dois números anteriores. Portanto, o termo geral da sequência é dado pela equação:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Para homenagear Fibonacci costuma-se escrever,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

A sequência é dada por,

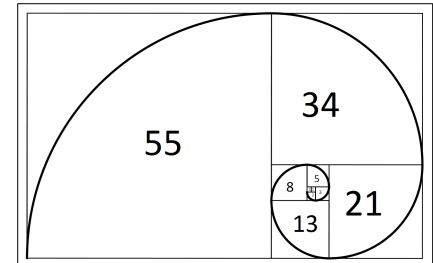
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Um fato interessante presente nessa sequência é que, a partir do

quarto termo, podemos obter uma constante entre o quociente de um número com o seu anterior, cujo resultado é aproximadamente 1,618. Esse número é conhecido por número de ouro ou proporção áurea, e é utilizado na arte, na arquitetura e no design por ser visto como agradável aos olhos humanos. Alguns autores citam como exemplo, que no mais célebre quadro de Leonardo da Vinci, Mona Lisa, é possível verificar a existência da proporção áurea nas relações entre o tronco e a cabeça, bem como nos elementos da face. No entanto, não há consenso quanto à verificação da proporção áurea em muitos exemplos que são comumente citados em livros. George Markowsky, em seu artigo “*Misconceptions about the Golden Ratio*” analisa muitos exemplos que são frequentemente usados na literatura para exemplificar a utilização da proporção áurea na arquitetura e nas artes. Markowsky discute alguns dos equívocos mais repetidos, e alega que a ausência de critérios claros ou metodologia padrão podem acarretar todos esses enganos.

A proporção áurea aparece também em muitas construções geométricas. Uma construção muito citada é conhecida como retângulo de ouro. Quando os termos da sequência

de Fibonacci são representados por quadrados e dispostos de maneira geométrica, pode ser construído o retângulo de ouro. Através desse retângulo é possível traçar uma espiral, conhecida como espiral de Fibonacci, que também pode ser vista em muitos fenômenos naturais.



Espiral de Fibonacci.

Fonte: atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/07/a-sequencia-de-fibonacci

Para saber mais:

[1] pt.wikipedia.org
 [2] super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-a-sequencia-de-fibonacci
 [3] O código secreto. A fórmula misteriosa que governa a arte, a natureza e a ciência. Priya Hemenway. Evergreen. 2010.
 [4] Misconceptions about the Golden Ratio. George Markowsky. The College Mathematics Journal. 1992. ■

COMEMORAÇÃO

Dia de Fibonacci

O dia 23 de novembro é um dia de celebração para os apaixonados pela Matemática. Nesse dia comemora-se a sequência de Fibonacci, e Leonardo de Pisa, o homem que a descreveu no início do século XIII, em seu livro *Liber Abaci*. Por isso o dia 23 de novem-

bro é considerado o Dia de Fibonacci.

O Boletim Lavrense escolheu o dia 23/11 para sua terceira edição em homenagem ao Dia de Fibonacci.

A escolha da data deve-se ao fato de que na ordem americana de representar datas (mês/dia/ano) os quatro primeiros números da representação (11/23/XXXX) correspondem aos primeiros números da sequência. ■

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

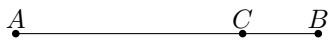
A Proporção Áurea

Os primeiros oito números de Fibonacci aparecem como uma das pistas deixadas pelo curador do Louvre Jacques Saunière, personagem assassinado no romance best seller *O Código da Vinci* (2003).

A proporção áurea

No livro *Elementos* de Euclides, há uma construção que permite dividir um segmento AB em duas partes por um ponto C de forma que a proporção entre o maior segmento AC e o me-

nor segmento CB seja exatamente a mesma proporção entre o segmento inteiro AB e o maior segmento AC. Independente do tamanho do segmento AB, a proporção é um número irracional sempre igual a 1,6180339887...



Essa proporção é conhecida por proporção áurea, ou proporção divina, e é denotada por Φ . Note que, Φ é o único número positivo que satisfaz $1/\Phi = 1 - \Phi = 0,6180339887\dots$

Segundo Ian Stewart, os antigos gregos usavam o Φ na arte e na arquitetura, pois o consideravam agradável aos olhos.

As dimensões exteriores do

Parthenon em Atenas formam um retângulo cujos os lados estão em proporção áurea, ou seja, é um retângulo áureo perfeito.

No entanto, as referências à arquitetura e pinturas antigas são questionadas por alguns autores, como George Markowsky, por exemplo (veja referência no Especial da Edição 3).

O Φ aparece na natureza em moluscos de concha, em miolos da flor de

girassol, em certos cristais e na forma de galáxias.

Quando um falcão mergulha para capturar uma presa, ele descreve uma curva matematicamente relacionada ao Φ .

Referência:

Incríveis passatempos matemáticos Ian Stewart; tradução Diego Alfaro; revisão técnica Samuel Jurkiewicz - Rio de Janeiro: Zahar, 2010. ■

PROJETO DE EXTENSÃO

Olimpíada Lavrense de Matemática

Apresentar a Matemática através de problemas que envolvam mais raciocínio lógico e menos fórmulas decoradas. Esse é um desafio que move muitas olimpíadas de Matemática ao redor do mundo. E Lavras e região contam com um desses projetos.

Em 2016, professores do Departamento de Ciências Exatas (DEX) da Universidade Federal de Lavras (UFLA) criaram a Olimpíada Lavrense de Matemática (OLM). Em seu primeiro ano, a OLM contou com 10 escolas inscritas, dentre públicas e particulares, com cerca de 3 mil alunos participantes. Desde 2018, o projeto OLM faz parte do programa de extensão Prazer Escola.

A partir de 2017 o projeto expandiu para a região de Lavras. Atualmente, são realizadas olimpíadas de Matemática em mais quatro cidades

da região: Três Pontas, Nepomuceno, Bom Sucesso e Ibituruna.

**Quase 12 mil alunos
participaram nas edições de
2019.**

Em 2019, quase 12 mil alunos de 42 escolas participaram das edições nas cinco cidades sendo que, em Lavras, a OLM teve 22 escolas inscritas e mais de 6 mil alunos participantes.

A OLM tem duas fases e é dividida em três níveis: nível 1 (alunos do 6º e 7º ano), nível 2 (alunos do 8º e 9º ano) e nível 3 (alunos do Ensino Médio). A primeira fase ocorre nas escolas e a segunda fase, com os 5% dos alunos de cada nível da primeira fase, ocorre na UFLA. No final do ano é realizada a Cerimônia de Premiação para premiar os mais bem classificados com meda-

lhas de ouro, prata, bronze e menção honrosa.

O projeto, no primeiro semestre de cada ano, oferece oficinas olímpicas para os alunos do 6º e 7º ano de escolas públicas lavrenses com o objetivo de aprimorar o raciocínio matemático utilizado em olimpíadas e também poder acompanhar a evolução do desempenho desses alunos. Com isso, a equipe da OLM (formada por docentes do DEX, alunos bolsistas e voluntários) percorre dois dos seus objetivos que é melhorar a qualidade do ensino da Matemática e descobrir novos talentos.

Tem interesse em conhecer mais sobre o projeto? Acesse www.dex.ufla.br/olm.

Colaborou para a reportagem: *Andréia da Silva Coutinho, coordenadora da OLM.* ■

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Qual a probabilidade?

Mathophila pega um baralho e coloca os quatro ases na mesa, virados para baixo. Dois deles (espadas, paus) são pretos, os outros dois (copas, ouros) são vermelhos.

- Innumeratus?

- Sim?

- Se você pegar duas dessas cartas

aleatoriamente, qual a probabilidade de que tenham cores diferentes?

- Hummmm ...

- Bom, ou as cores são as mesmas ou não são, certo?

- Sim.

- E temos o mesmo número de cartas de cada cor.

- Isso.

- Então a chance de que as duas cartas sejam da mesma cor, ou de cores diferentes, deve ser igual - então ambas são iguais a $1/2$. Certo?

- Hummmmm ...

Mathophila está certa?

2) O que é maior: e^π ou π^e ?
Lembre-se que $e \approx 2,71828$ e $\pi \approx 3,14159$.

Referência:

Incríveis passatempos matemáticos Ian Stewart; tradução Diego Alfaro; revisão técnica Samuel Jurkiewicz - Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 2ª edição)

Desafio 1: Separe as 27 bolinhas de gude em três grupos de 9 bolinhas cada. Pese dois dos grupos. Se o peso for igual, a bolinha mais pesada certamente está no grupo que ficou de fora. Se o peso for diferente, a bolinha mais pesada está no grupo mais pesado (que desceu na balança). Restamos, então, com 9 bolinhas dentre as quais está a mais pesada. Separe-as em três grupos de 3 bolinhas cada. Repita o processo anterior e restarão 3 bolinhas. Mais uma vez, para a terceira pesagem, separamos em três gru-

pos com 1 bolinha em cada. Comparando duas delas, se o peso for igual, a mais pesada é a que ficou de fora. Se o peso for diferente, encontramos a mais pesada diretamente. Seguindo raciocínio similar pode-se mostrar que é possível determinar qual a bolinha mais pesada usando n pesagens se houvesse 3^n bolinhas.

Desafio 2: Devemos nos perguntar em qual ponto do globo terrestre está o urso de modo que ao realizar o trajeto descrito ele retorne para o ponto inicial. Há duas possibilidades: (i) O urso parte do polo norte. Ele percorre um quilômetro para o sul, anda um

quilômetro para o leste e ao andar um quilômetro no sentido norte retorna ao polo norte. (ii) Ele poderia ter partido de algum ponto muito próximo do polo sul. Deste ponto, ele caminha um quilômetro para o sul e depois caminha um quilômetro para o leste dando uma volta completa (ou dando duas, três, quatro ... voltas completas). E ao caminhar um quilômetro na direção norte ele volta pelo mesmo caminho que percorreu na direção sul chegando ao ponto inicial.

Como não há ursos próximos do polo sul, o urso da história é um urso polar que possui a cor branca. ■

MESTRADO

Oportunidade de estudo

Estão abertas as inscrições para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat. O Profmat é um programa de mestrado que tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada relevante para o exercício da docência na Educação Básica, especialmente para professores da rede pública, que busquem aprimoramento da formação

profissional.

As inscrições vão até o dia 18 de dezembro de 2020.

Ele é um programa formado por uma rede nacional de instituições de ensino superior. A Universidade Federal de Lavras - UFLA - faz parte desta rede e oferta anualmente 15 vagas. As

aulas acontecem na UFLA durante as sextas-feiras.

O período de inscrições para o ingresso em 2021 vai do dia 19 de novembro a 18 de dezembro de 2020.

Mais informações e o edital 2021 podem ser acessados no site www.profmat-sbm.org.br. Conheça também a página local do programa na UFLA: www.prpg.ufla.br/profmat. ■

Eventos

IV Semana da Matemática da UFLA

A Semana da Matemática da UFLA tem o objetivo de mostrar como a matemática é acessível aproximando discentes e professores com uma programação diversificada e atrativa. Através de minicursos, palestras com pesquisadores renomados, oficinas, mesas redondas, todos os participantes poderão aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos em Matemática. O público alvo são os alunos da Licenciatura em Matemática, professores do ensino superior e rede básica de ensino.

Organização: Departamento de Ciências Exatas (DEX) - UFLA.

Período: 7 a 10 de dezembro de 2020

Mais informações:

www.dex.ufla.br/semat/ivsemat

Festival Nacional da Matemática

O Festival Nacional da Matemática é um evento para todos os públicos e tem como principal objetivo promover e desmistificar a matemática, levando conhecimento científico de forma lúdica e em situações diárias. São oferecidas oficinas, palestras, ci-

neclube e exposições.

Organização: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Período: 28 a 30 de maio de 2021.

Mais informações:

www.festivaldamatematica.org.br

Participação

O Boletim Lavrense quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.