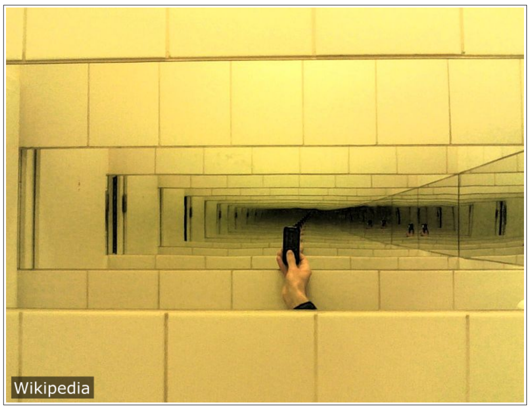
Boletim Lavrense de Matemática

Edição 6, 15 de outubro de 2021



A guerra pelo estudo do infinitesimal

Como é constituído um objeto geométrico como uma reta ou uma superfície? Se dividirmos um segmento de reta pela metade sucessivamente, esse processo terá fim? Perguntas como estas ocuparam as mentes de grandes pensadores e suscitaram um acirrado embate em torno da ideia de infinitesimal. Esse conceito, por sua vez, levou ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, uma das mais importantes áreas da Matemática. Confira nesta edição o início e nas próximas duas edições o desenrolar da história do Cálculo.

CURIOSIDADES

O movimento existe?

A resposta pode ser imediata e óbvia: sim. Afinal, a todo momento vemos insetos voando, bicicletas deslocando-se nas ruas e nós mesmos estamos em (quase) constante movimento. Porém, há muito tempo, na Grécia antiga, Zenão elaborou paradoxos que vão fazer você se questionar se a resposta é tão evidente quanto parece à primeira vista.

PROJETO DE EXTENSÃO

Aprofundando o conhecimento matemático

Uma ótima oportunidade de estudos e bolsas é o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) que tem a participação da UFLA. Voltado para medalhistas de olimpíadas de Matemática do ensino básico, o programa promove o aprofundamento do conhecimento matemático para estudantes de qualquer curso de graduação. Saiba mais na nossa reportagem.

PICME

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

ESPECIAL

Infinitesimais

Você já ouviu falar sobre infinitesimais?

Durante o curso de Cálculo I somos apresentados às ideias de limite, derivada e integral de uma função. Os detalhes rigorosos envolvidos neste estudo demoraram muito tempo para serem organizados e compreendidos.

As teorias apresentadas no Cálculo foram organizadas e formalizadas depois do século XVI. Antes disso, muitas tentativas para resolver problemas típicos do Cálculo foram realizadas com a utilização dos infinitesimais.

De uma forma geral a ideia sobre os infinitesimais afirma que toda reta é composta por uma sequência de pontos, ou "indivisíveis", que são os blocos usados na construção da reta. Os indivisíveis não podem ser divididos. Mas, isso levanta questões importantes. Por exemplo, se um segmento de reta é composto por indivisíveis, quantos são esses indivisíveis e qual é o seu tamanho? Uma possibilidade é que seja um número finito, mesmo que com uma magnitude muito pequena, mas qualquer grandeza positiva pode ser dividida. Outra possibilidade é que haja um número infinito de indivisíveis em um segmento de reta. Mas, aqui os indivisíveis não podem ter magnitude positiva, pois o segmento é finito. Logo, os indivisíveis devem ter magnitude nula. Isso também é estranho já que não importa quantos indivisíveis de tamanho nulo forem somados, a magnitude será sempre zero. O que também leva a uma contradição com nossa ideia de que um segmento de reta é formado por indivisíveis.

As ideias iniciais sobre os infinitesimais foram apresentadas pelos gregos, como Eudoxo e Aristóteles. As ideias de limite estavam presentes de forma indireta no método de exaustão[1], por exemplo. Os paradoxos[2] de Zenão de Eleia (488 - 430 a. C.), como Aquiles e a tartaruga (veja a seção Curiosidades), mostram um pouco das dificuldades encontradas quando tentamos estudar os infinitesimais.

A dificuldade de organizar essas ideias e compreendê-las de forma adequada deixou esse assunto sem avanços durante muito tempo.

Na primeira metade do século XVI, o mundo conheceu as famosas 95 teses (1517) do monge alemão Martinho Lutero (1483 - 1546), que contestava alguns dogmas do catolicismo romano, como por exemplo o fato de que era possível alcançar o perdão de Deus através das indulgências. Lutero foi excomungado pelo Papa Leão X em 1521, depois de recusar uma retratação.

Lutero é considerado um dos principais líderes da Reforma Protestante. A Igreja Católica após a realização do Concílio de Trento (1545 - 1563), convocado pelo Papa Paulo III, lança o movimento de Reforma da Igreja Católica, a Contrarreforma.

A Contrarreforma tinha como objeto combater as propostas apresentadas pela Reforma Protestante. Os jesuítas, que são os membros da Companhia de Jesus, ordem fundada em 1534 por um grupo de estudantes da Universidade de Paris liderado por Santo Inácio de Loyola (canonizado em 1622), tiveram grande influência e atuação de destaque na Reforma Católica. A Companhia de Jesus foi reconhecida pela bula papal em 1540 e atualmente é famosa pela sua atuação missionária e educacional.

É nesse contexto de Reforma e Contrarreforma que ocorreu uma guerra de proporções impensadas na época. Um conflito de ideias entre os que eram contra e os que defendiam o estudo dos infinitesimais. Entre os que defendiam uma sociedade rígida e hierarquizada comandada por um punho forte, como um rei, e os que aceitavam e estimulavam a diversidade de ideias e a participação de correntes divergentes nas discussões sobre os rumos da sociedade.

Mas o que poderia ter de errado ou perigoso no estudo dos infinitesimais? O estudo dos infinitamente pequenos trazia furos para um mundo utópico, racional e comandado por rígidas regras matemáticas. O estudo dos infinitesimais abriu a possibilidade de uma análise crítica das instituições existentes e a experimentação de novas instituições.

Em 10 de agosto de 1632 cinco homens de manto negro se reuniram para avaliar uma questão sobre infinitesimais. Os Revisores Gerais da Ordem, liderados pelo padre alemão Jacob Bidermann, eram jesuítas e tinham como função "transmitir avaliações sobre as mais recentes ideias científicas e filosóficas da época". Em outras palavras, eles diziam que assuntos poderiam ser ou não estudados pelos membros da Ordem. O trabalho desses revisores era árduo e desafiador, eles estavam no centro do turbilhão intelectual conhecido como Reforma Científica (Nicolau Copérnico havia dito há menos de meio século que a Terra não era o centro do universo, ela girava em torno do Sol).

Os Revisores consideravam os questionamentos recebidos à luz das doutrinas aceitas pela Igreja e pela Companhia. Quando uma ideia era rejeitada ela não poderia mais ser apoiada ou mesmo ensinada por um membro da Ordem. Nessa época os pronunciamentos da Ordem eram considerados oficiais, e poucos católicos ousavam defender uma ideia que tivesse sido condenada pelos Revisores Gerais.

O tópico considerado pelos Revisores Gerais em 10 de agosto de 1632 tratava sobre a "composição do continuum por indivisíveis". A redação do problema era na essência o seguinte: "qualquer grandeza contínua, seja uma linha, superfície, ou extensão de tempo, é composta de distintos átomos infinitamente pequenos". Se essa afirmação for verdadeira, então uma linha reta é na verdade composta por um número muito grande de pontos indivisíveis, lado a lado. De forma análoga, uma superfície é composta por linhas finas indivisíveis, também lado a lado, e um período de tempo é formado por instantes em sucessão.

Mesmo parecendo que a questão

[1] Veja mais sobre o método da exaustão na 4ª edição do Boletim.

[2] Paradoxos são afirmações supostamente verdadeiras que levam a contradições lógicas ou a situações que contrariam o senso comum.

sobre os indivisíveis parecia razoavelmente aceitável, a decisão dos padres vestidos com mantos pretos foi rápida: "Consideramos a proposição não só repugnante à doutrina comum de Aristóteles, mas em si mesma improvável e consideramos que essa proposta de problema é desaprovada e proibida na nossa sociedade".

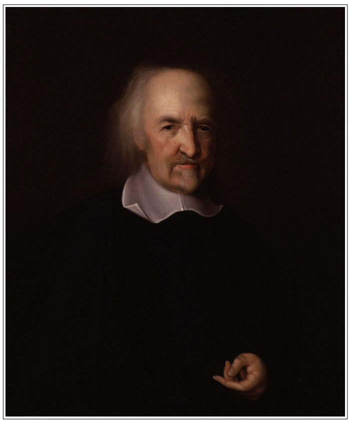
Essa decisão dos revisores foi apenas um dos golpes aplicados no estudo dos infinitesimais pelos jesuítas. Naquele momento, parecia que o problema com os indivisíveis estava resolvido, porém o mesmo problema, com redações diferentes, vinha sendo proposto e proibido desde 1606, e a apresentação do mesmo não parou com a proibição de 1632.

Em um esforço para se manter à frente do desenvolvimento da Matemática da época, professores de todas as partes do sistema jesuíta continuavam a propor variações do problema. Em 1651, a Companhia criou uma lista de doutrinas banidas que não poderiam ser ensinadas nem defendidas pelos membros da Ordem. As teses proibidas foram publicadas no *Ordinatio pro studiis superioribus* (Regulamento para estudos superiores). Eram 65 teses filosóficas, e também havia 25 teses teológicas. Nesse texto encontravam-se quatro proposições proibidas que diziam respeito direto aos infinitesimais:

25. O continuum de sucessão e a intensidade das qualidades são compostos exclusivamente de indivisíveis;
26. São dados pontos, a partir dos quais o continuum é composto;
30. A infinidade em quantidade e magnitude pode estar encerrada entre duas unidades ou dois pontos;
31. Vácuos minúsculos estão intercalados no continuum, poucos ou muitos, grandes ou pequenos, dependendo de sua escassez ou densidade.

A publicação do *Ordinatio* de 1651 foi um marco na batalha dos jesuítas contra os infinitesimais. Ele definiu a linha que os estudos deveriam seguir nos locais onde os jesuítas tinham influência. Isso dificultou muito a vida dos poucos matemáticos que ainda defendiam os infinitesimais na Itália.

Os jesuítas se colocaram na linha de frente na batalha contra os infinitesimais, junto com matemáticos como Cristóvão Clávio (matemático, 1538 - 1612), Paul Guldin (matemático jesuíta, 1577 - 1643), Mario Bettini (matemático, 1584 - 1657), Thomas Hobbes (teórico político e filósofo inglês, 1588 - 1679), André Tacquet (matemático jesuíta, 1612 - 1660).



Thomas Hobbes. Fonte: *Wikipédia.*

Por outro lado, matemáticos brilhantes se colocaram abertamente na defesa dos infinitesimais como Luca Valerio (matemático, 1553 - 1618), Galileu Galilei (físico e matemático, 1564 - 1642), Grégoire de Saint-Vincent (matemático jesuíta, 1584 - 1667), Bonaventura Cavalieri (matemático italiano, 1598 - 1647), Evangelista Torricelli (físico e matemático italiano, 1608 - 1647), Stefano degli Angeli (matemático, 1623 - 1697). Dentre eles vamos destacar o matemático britânico John Wallis (1616 - 1703), certamente o mais brilhante precursor de Isaac Newton (1642 - 1727).

John Wallis. Fonte: *Wikipédia.*

Wallis foi ministro religioso, estudou em Cambridge, e em 1649 foi nomeado como professor de geometria em Oxford. Era membro fundador da Royal Society (fundada em 1660, reconhecida oficialmente em 1662), uma das mais antigas organizações científicas ainda existentes. Wallis foi o primeiro a utilizar o símbolo ∞ para representar o infinito em seu livro sobre seções cônicas (*De sectionibus conicis*, 1655).

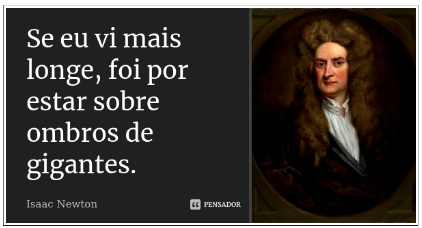
Wallis estudou os trabalhos de Johannes Kepler (astronômo e matemático alemão, 1571 - 1630), Bonaventura Cavalieri, Gilles de Roberval (matemático e físico francês, 1602 - 1675), Evangelista Torricelli e René Descartes (filósofo, físico e matemático francês, 1596 - 1650). Em seu livro *Arithmetica Infinitorum* (1656), ele abandonou o pano de fundo geométrico utilizado por Cavalieri e calculou a integral de x^m entre 0 e 1 utilizando um processo primitivo de limites com infinitos indivisíveis. Seu processo de indução não tinha rigor matemático e foi criticado com razão por Fermat (jurista e matemático, 1601 - 1665).

Entre os anos de 1640 e 1660 a Inglaterra viveu um período chamado de Revolução Inglesa. Duas visões sobre monarquia se chocaram. O rei Carlos I defendia a ideia de um poder mais absoluto e o Parlamento Inglês defendia a ideia de uma divisão maior dos poderes do rei. Certamente as causas dos problemas ingleses na época eram políticas, sociais e religiosas.

Em resumo, a revolução levou a uma guerra civil que terminou com o julgamento, condenação e decapitação do rei Carlos I em 30 de janeiro de 1649 (antes dos franceses). As coisas não melhoraram depois da morte de Carlos I e como parte da solução dos problemas a monarquia foi restaurada sob Carlos II, filho de Carlos I, em 1660.

Thomas Hobbes, autor de Leviatã, foi tutor de Carlos II. Ele não gostava dos jesuítas, mas compartilhava a ideia deles contra os infinitesimais. Hobbes acreditava que sua filosofia estava baseada nos conhecimentos matemáticos, assim as afirmações apresentadas em Leviatã eram incontestáveis como as demonstrações geométricas. Hobbes acreditava que seria possível resolver todos os problemas geométricos ainda sem solução. Particularmente trabalhou para encontrar a quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado, com régua e compasso.

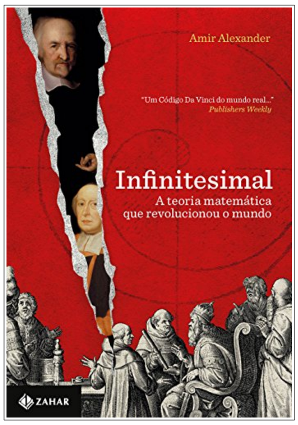
Ele chegou a publicar alguns resultados sobre o tema que foram refutados por Wallis. Wallis e Hobbes foram grandes rivais na época. A credibilidade de Hobbes como matemático nunca mais se recuperou. A quadratura do círculo não é possível.



Famosa frase de Isaac Newton. Fonte: *Wikipédia.*

Isaac Newton escreveu para Robert Hooke (matemático e físico inglês, 1635 - 1703) em 1676 e afirmou "Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes". Certamente muitos desses gigantes estiveram diretamente ligados à guerra sobre os infinitesimais.

A história sobre os acontecimentos dessa época e como ocorreu o embate entre as correntes que defendiam e condenavam o estudo dos infinitesimais, a retomada desses estudos e a criação das bases que permitiram que Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (matemático e filósofo, 1646 - 1716) criassem o Cálculo Diferencial e Integral são apresentadas de forma empolgante no livro de Amir Alexander: *Infinitesimal, A teoria matemática que revolucionou o mundo,* da editora ZAHAR.



Capa do livro *Infinitesimal.*

Não perca na próxima edição do Boletim a história de Leibniz e Newton. ■

CURIOSIDADES

Alguns paradoxos de Zenão

Zenão de Eleia (488 - 430 a. C.) foi um filósofo cujo método de atuação consistia em mostrar os absurdos das teses que combatia, através da elaboração de paradoxos, mas sem refutar diretamente tais teses.

Dentre todos os paradoxos criados por Zenão, descrevemos abaixo os quatro que causaram maior perturbação.

Começamos com os paradoxos Dicotomia e Aquiles. Nestes, Zenão rebate a ideia de que espaço e tempo são divisíveis sem limite. Ele parte da suposição de que uma certa distância tem infinitos pontos, e que um corredor teria que passar por todos eles antes de atingir a linha de chegada, e assim conclui que o corredor nunca atinge seu objetivo.

1. **Dicotomia** - Um corredor pretende percorrer uma certa distância, digamos 400 metros. Antes de percorrer os 400 m ele deve percorrer a primeira metade dessa distância, ou seja, 200 m; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto, isto é, os primeiros 100 m; e antes disso, os primeiros 50 m e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer por-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo o corredor nunca chegará ao final do percurso.

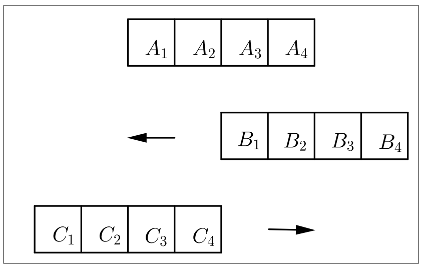
2. **Aquiles** - Aquiles aposta uma corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles, por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga.

Com esses paradoxos Zenão concluiu que espaço e tempo não são infinitamente divisíveis. Isso acarretaria num limite para a divisão do espaço e do tempo. Mas esse limite tem tamanho? Para refutar a afirmação que tal limite não tem extensão ou duração, Zenão propôs o paradoxo da Flecha.

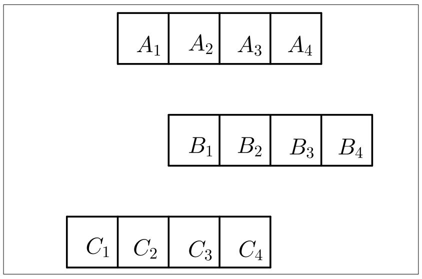
3. **Flecha** - Um arqueiro lança uma flecha, que adquire movimento. Em um certo instante, a flecha ocupa um espaço que é igual ao seu volume, portanto, segundo Zenão ela estaria parada neste instante. Isso se aplica para todos os instantes, assim, a flecha está sempre parada e não poderia estar se movendo, o que contradiz a hipótese inicial de que a flecha está em movimento.

Resta analisar o caso em que espaço e tempo não são infinitamente divisíveis, e o limite de tal divisão tem tamanho. Para refutar também essa possibilidade Zenão propôs o paradoxo do Estádio.

4. **Estádio** - Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 corpos de igual tamanho, estacionários; sejam B_1, B_2, B_3 e B_4 corpos de mesmo tamanho que os $A's$, que se movem para a esquerda de modo que cada B passa por um A num instante (menor intervalo de tempo possível). Sejam C_1, C_2, C_3 e C_4 também do mesmo tamanho que os $A's$ e os $B's$, e movendo-se uniformemente para a direita com relação aos $A's$, de modo que cada C passa por um A num instante de tempo. Suponhamos que num dado momento os corpos ocupem as seguintes posições relativas:



Então, passando um único instante, isto é, após uma subdivisão indivisível do tempo, as posições serão:



Assim C_4 terá passado por dois dos $B's$; logo o instante não pode ser o intervalo de tempo mínimo, pois podemos tomar como uma unidade nova e menor o tempo que C_4 leva para passar por B_1.

Assim, os paradoxos Dicotomia e Aquiles argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo; a Flecha e o Estádio, argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis.

Referências:

[1] Boyer, C. B. História da Matemática. 3ª Edição. Editora Blucher. 2009.

[2] Filosofia da Física. USP. 2017. ■

PROJETO DE EXTENSÃO

PICME

Você foi medalhista da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) ou da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)? É estudante de graduação? Se sim, você pode se inscrever no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME). Os candidatos selecionados recebem bolsa de Iniciação Científica no valor de R$ 400,00.

O objetivo do PICME é oferecer aos estudantes universitários que se destacaram nas olimpíadas escolares a oportunidade de concluir sua graduação, em qualquer área, simultaneamente com estudos avançados em Matemática. Assim, espera-se propiciar o acesso a uma sólida formação matemática que venha enriquecer o desenvolvimento profissional desses estudantes, abrindo inclusive a possibilidade de ingressarem em um mestrado na área de Matemática.

Na programação acadêmica do PICME os bolsistas cursam disciplinas de Matemática e participam de atividades escolhidas pela coordenação, de acordo com seu nível e objetivos específicos. Os alunos são acompanhados ao longo do projeto pela equipe responsável.

A coordenação geral do programa é feita pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada e a implantação, acompanhamento e execução são feitos na UFLA pelo Departamento de Matemática e Matemática Aplicada em parceria com o Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. Mais de 20 alunos já passaram pelo PICME na UFLA e alguns prosseguiram com os estudos na pós-graduação.

Interessou no projeto? Entre em contato com a coordenadora do PICME na UFLA, professora Adriana Xavier Freitas: `adrianafreitas@ufla.br`.

Nós, editores do Boletim Lavrense de Matématica, agradecemos a professora Adriana Xavier que gentilmente colaborou para essa reportagem. ■

DESAFIOS

Desafios da Edição

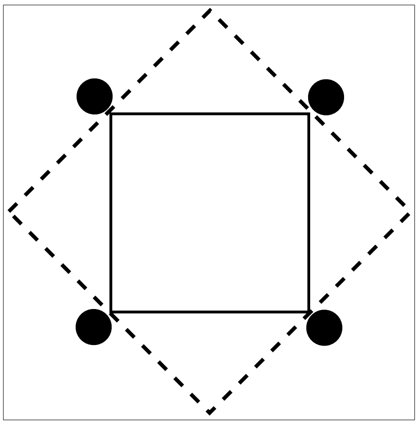
Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Dois trens estão na mesma via, separados por 100 km. Eles começam a se mover um em direção ao outro, a uma velocidade constante de 50 km/h. No mesmo momento, uma supermosca sai da 1ª locomotiva de um dos trens e voa sempre a 100 km/h até a locomotiva do outro trem. Apenas chega, dá meia volta e regressa até a primeira locomotiva, e assim vai e vem de uma locomotiva para a outra até que os dois trens se encontram. Qual distância percorreu a supermosca?

2)Em uma sala há uma estante com dez prateleiras e em cada prateleira há dez livros. Todos livros pesam 100 gramas, com exceção dos livros de uma prateleira que pesam 101 gramas cada. Como determinar, com certeza, qual prateleira possui os livros mais pesados fazendo apenas uma pesagem em uma balança digital?

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 5ª edição)

Desafio 1: Na figura, o quadrado desenhado com linha contínua representa a piscina original da mãe de Joana e os círculos preenchidos representam as palmeiras (na vista de cima). O quadrilátero pontilhado mostra a nova piscina que é solução do problema: ela continua sendo quadrada, sua área superficial é o dobro da área da piscina original (você consegue mostrar este fato?) e as palmeiras não foram cortadas.



Desafio 2: O número mínimo de pneus que Aline deve levar para sua viagem é de 6: os 4 pneus iniciais e mais 2 estepes. Ela pode iniciar a viagem com os

4 pneus novos e rodar 6.000 km. Neste momento ela troca 2 pneus pelos 2 estepes que levou. Ao rodar mais 6.000 km ela troca os outros 2 pneus iniciais - que já estarão totalmente desgastados - pelos pneus trocados anteriormente. Assim, ela ainda consegue viajar mais 6.000 km finalizando a viagem de 18.000 km. ■

Eventos

V Semana da Matemática da UFLA

A Semana da Matemática da UFLA tem o objetivo de mostrar como a Matemática é acessível aproximando discentes e professores com uma programação diversificada e atraente. Através de minicursos, palestras com pesquisadores renomados, oficinas, mesas redondas, todos os participantes poderão aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos em Matemática. O público alvo são os alunos da Licenciatura em Matemática, professores do ensino superior e rede básica de ensino e demais interessados.

Organização: Departamento de Matemática e Matemática Aplicada (DMM) e Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemáticas (DFM) - UFLA.

Período: 25 a 29 de outubro de 2021

Mais informações:
`www.dmm.ufla.br/semat/vsemat`

VI Workshop de Matemática e Matemática Aplicada

Realizado em parceria entre UFLA e UFSJ - Universidade Federal de São João del Rei -, o Workshop de Matemática e Matemática Aplicada acontece anualmente e conta com palestras de importantes pesquisadores e momentos de interação com o objetivo de fortalecer a pesquisa na área de Matemática na região.

Organização: UFLA e UFSJ/Campus Alto Paraopeba.

Período: 01 a 03 de dezembro de 2021.

Mais informações:
`www.dmm.ufla.br/wmma/vi`

Oportunidade de estudo

Estão abertas as inscrições para o Profmat - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. O objetivo do programa é promover melhoria do ensino básico através do aprofundamento da formação matemática dos participantes. O prazo final para inscrição é 25 de outubro de 2021. A UFLA conta com um polo do Profmat e o exame de acesso será realizado em Lavras.

Mais informações:
`www.profmat-sbm.org.br/ingresso`

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.