Boletim Lavrense de Matemática

Edição 8, 14 de março de 2022

Cálculo Fracionário: a teoria matemática que possui data de nascimento

Podemos precisar o século e a década em que uma dada teoria começou a ser estudada, porém dizer o exato momento, como mês e dia em que ela foi pela primeira vez abordada é muito difícil. No entanto, para o Cálculo Fracionário, há registros que mostram exatamente o início das discussões e os primeiros estudiosos a tentarem dar um significado para uma derivada de ordem fracionária. Ficou curioso? Veja nossa reportagem especial.

BOLETIM NAS REDES SOCIAIS

Boletim chega ao Instagram

O Boletim Lavrense apresenta mais uma novidade! Agora ele também está no Instagram levando informações, fatos históricos, desafios, curiosidades do universo matemático.

Siga nosso perfil @boletimlavrensedematematica e fique conectado com a Matemática.

PROJETO DE EXTENSÃO

Desmistificando o cotidiano de um matemático

Já é sabido que muitos matemáticos gostam de conversar sobre Matemática tomando um bom cafezinho, mas você sabe o que um matemático faz no seu dia a dia? Você acha que a Matemática já está pronta e é repleta de fórmulas para decorar? Ou que Matemática foi feita para meninos? Hum ... então está na hora de você conhecer o Café Matemático, um projeto criado pela professora Andréia Coutinho do Departamento de Matemática e Matemática Aplicada da UFLA.

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: `boletimdamatematica.dmm@ufla.br`
Instagram: www.instagram.com/boletimlavrensedematematica

EDITORES
DMM/UFLA
Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Helvécio G. F. Filho
Julia Terra Souza
Ricardo Edem Ferreira

ESPECIAL

Cálculo Fracionário

Uma troca de correspondências entre Leibniz e l'Hôpital em 30 de setembro de 1695 é o marco para o nascimento do Cálculo Fracionário, nomenclatura utilizada para o cálculo de ordem não inteira. Leibniz formulou uma questão para l'Hôpital envolvendo uma possível generalização da derivada de ordem inteira, e l'Hôpital devolveu a pergunta a Leibniz questionando-o sobre o caso em que a ordem da derivada fosse meio. Leibniz apresentou uma resposta e afirmou que isto era, aparentemente, um paradoxo que um dia iria gerar várias consequências importantes.

Como vimos, na 7ª edição do Boletim [1], Leibniz é considerado um dos criadores do Cálculo de ordem inteira e podemos também considerá-lo como pai do Cálculo Fracionário.

Também em uma troca de correspondências entre Leibniz e Wallis, em 1697, Leibniz discute o produto infinito de Wallis para o número π, comenta que o cálculo diferencial poderia ter sido utilizado para obter tal resultado e apresenta a notação $d^{\frac{1}{2}}y$ para denotar uma derivada de ordem meio.

Lagrange contribuiu, de forma indireta, para o Cálculo Fracionário em 1772, a partir da lei dos expoentes

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}},$$

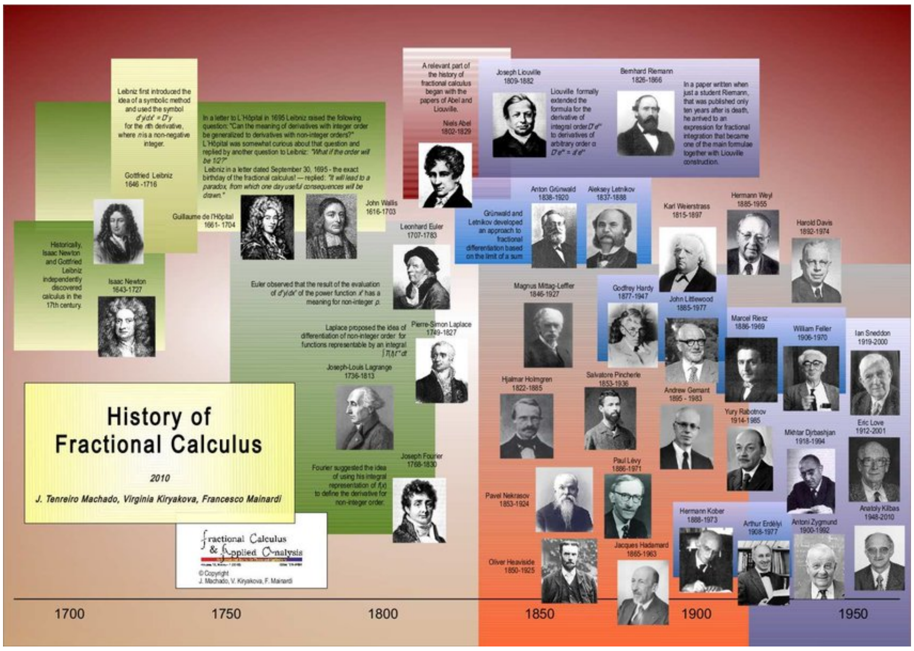
pois a busca por restrições que deveriam ser impostas na função y para que a regra continuasse valendo para m e n números arbitrários foi de grande utilidade no desenvolvimento desse cálculo.

Desde então muitos pesquisadores e matemáticos contribuiram para o tema, principalmente a partir do início do século XIX. No entanto, de forma sistemática, podemos citar, em 1812, Laplace que definiu uma derivada fracionária através de uma integral; em 1819, Lacroix foi o primeiro a mencionar (em seu livro de cálculo) as derivadas fracionárias; Fourier, em 1822, obteve uma representação integral para uma função f.

Apesar de importantes matemáticos terem se dedicado ao Cálculo Fracionário como Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix e Fourier, e do estudo de aplicações do Cálculo Fracionário na própria Matemática e em outras áreas de conhecimento, não existia ainda uma aplicação característica e bem definida.

A primeira operação fracionária, propriamente dita, deve-se a Abel, em 1823, quando obteve a solução de uma equação integral advinda do problema da tautócrona. Atraído por essa solução de Abel, Liouville efetuou o primeiro estudo importante para fornecer uma definição lógica de uma derivada fracionária. Foi também Liouville, em uma de suas muitas anotações, o primeiro a tentar resolver equações diferenciais envolvendo operadores fracionários.

Em 1847, Riemann, ainda na graduação, escreveu um artigo, que foi publicado postumamente, onde apresenta uma definição para a derivada fracionária. Após a sua morte, foi publicado um trabalho em 1892, onde apresenta uma fórmula para a integral fraciónaria, que hoje é conhecida como integral fracionária de Riemann-Liouville.



Pôster sobre a história recente do Cálculo Fracionário.

Fonte: Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 13, No. 3, 2010, 329-334.

[1] Disponível em 7ª edição.

O primeiro trabalho que apresenta a conhecida derivada fracionária segundo Riemann-Liouville foi escrito em 1869 por Sonin. No entanto, o marco inicial para o moderno desenvolvimento do Cálculo Fracionário foi o trabalho de Laurent em 1884, onde ele discute operadores generalizados.

Durante o século XX, a teoria e aplicações de Cálculo Fracionário tiveram contribuições notáveis com uma grande quantidade de pesquisas em derivadas e integrais fracionárias e aplicações sendo publicadas. No entanto, entre os anos de 1900 e 1970 seu desenvolvimento foi menos intenso comparado com os anos entre 1971 e 1995.

Em *A poster about the old history of fractional calculus* publicado em 2010, J. A. Tenreiro Machado, Virginia Kiryakova e Francesco Mainardi apresentam um cartaz que ilustra as principais contribuições durante o período 1695-1970, a "antiga história" do Cálculo Fracionário, veja a figura acima.

Até próximo a década de 70, a maioria dos cientistas não levavam a sério o Cálculo Fracionário, uma vez que, as diferentes e não equivalentes definições propostas para a derivada fracionária funcionavam em alguns casos mas não em outros.

Uma importante definição para a derivada fracionária foi proposta por Caputo em 1969 e a partir de 1970 o Cálculo Fracionário teve um acelerado desenvolvimento e já era considerado útil em vários campos. Essa razão incentivou Ross a organizar a primeira conferência internacional sobre Cálculo Fracionário em 1974 que foi realizada na Universidade de New Haven, Estados Unidos. Essa conferência foi a grande contribuição para o tema no século XX e a partir de então o Cálculo Fracionário desenvolveu-se intensivamente aumentando o número de pesquisadores e publicações. No ano dessa conferência foi publicado o primeiro livro tratando exclusivamente sobre Cálculo Fracionário aplicado.

Hoje, depois de mais de trezentos e vinte anos da carta entre l'Hôpital e Leibniz, temos a certeza que o Cálculo Fracionário se tornou uma fonte de discussões, controvérsias e muitas pesquisas. O cálculo está completamente consolidado e contempla uma série de aplicações das quais destacamos o estudo das equações diferenciais, integrais e integrodiferenciais. Tais equações podem ser encontradas em vários ramos da ciência, percorrendo uma enorme gama de áreas, da física, passando pela engenharia, até a biologia, sem deixar de lado a economia, dentre outras.

Por outro lado, o Cálculo Fracionário, além de estar presente em várias aplicações, destaca-se na abordagem de problemas que envolvem os conceitos de não localidade e efeito de memória os quais não podem ser explicados pelo Cálculo. Em particular, pelo conceito de derivada que, no Cálculo é um operador local enquanto no Cálculo Fracionário é um operador não local.

Na 7ª edição conhecemos um pouco da vida de Leibniz, um dos precursores do Cálculo Fracionário, e agora vamos conhecer um pouco da vida de l'Hôpital, o outro precursor.

Guillaume François Antoine, conhecido como o Marquês de l'Hôpital, nasceu em 1661 em Paris, em uma família de militares muito conhecida na época. A família de l'Hôpital servia ao rei da França desde 1488, e em particular, l'Hôpital durante alguns anos, serviu o exército francês como oficial, mas abandonou a carreira militar por um problema de visão. Depois disso, dedicou-se inteiramente à Matemática.

l'Hôpital. Fonte: *Wikipédia.*

Em Paris, ele conheceu o jovem Johann Bernoulli em 1691 que concordou em continuar suas conversas sobre o cálculo infinitesimal, em sua propriedade privada fazendo palestras particulares para l'Hôpital. E, em 1693, l'Hôpital foi eleito para a Academia Francesa de Ciências onde serviu duas vezes como vice-presidente da academia.

Entre suas realizações está a determinação do comprimento do arco do gráfico logarítmico.

l'Hôpital se correspondeu com Varignon, Leibniz, Huygens e Jacob e Johann Bernoulli. Em 1696, l'Hôpital publicou seu livro *Analyze des infiniment petits pour I'intelligence des lignes courbes.* Este foi o primeiro livro sobre cálculo infinitesimal apresentando as ideias do cálculo diferencial, mas não considerando a integração.

l'Hôpital escreveu em 1694 para Johann Bernoulli para propor que, em troca de um pagamento anual de 300 francos, Bernoulli informasse a ele suas últimas descobertas matemáticas e não contasse isso para outras pessoas. A resposta de Bernoulli para esta proposta se perdeu, mas considerando as cartas posteriores ele aceitou o acordo.

Provavelmente com a consciência tranquila, l'Hôpital publicou os resultados em seu livro, depois de reconhecer sua dívida para com Leibniz e os irmãos Bernoulli. Na introdução de seu livro ele escreveu *"De resto eu reconheço dever muito às luzes de Bernoulli, principalmente desse jovem professor de Groningen. Eu me servi de seus métodos e de suas descobertas, e também das de Leibniz. Por isso, eu consinto que eles reivindiquem tudo o que quiserem, me contentando daquilo que eles quiserem por bem me deixar".*

Mesmo com as considerações de l'Hôpital sobre a possível autoria dos resultados, Johann Bernoulli ficou insatisfeito com o sucesso do livro e a falta de reconhecimento de sua contribuição, o que o fez escrever para l'Hôpital e se queixar do fato.

l'Hôpital morreu em Paris, em 1704, aos 43 anos. Após a sua morte, Bernoulli reivindicou o crédito por partes do texto publicado.

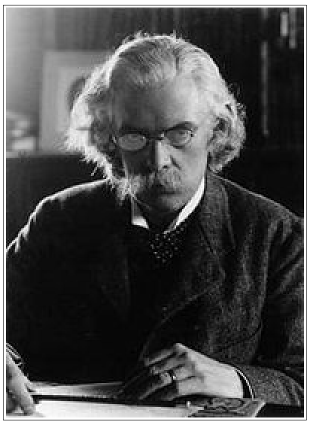
Em 1921, Paul Schafheitlin descobriu um manuscrito das palestras de Bernoulli sobre o Cálculo Diferencial de 1691 a 1692 na biblioteca da Universidade de Basel. O texto mostrou semelhanças notáveis com a escrita de l'Hôpital, indicando que a versão de Bernoulli pode ser verdadeira. ■

CURIOSIDADES

Função de Mittag-Leffler: A rainha das funções especiais

Você sabia que existe uma função que generaliza a função exponencial[2]?

Em 1903, Magnus Gösta Mittag-Leffler (um matemático importante na Suécia nos finais do século XIX, princípios do século XX) estudou e definiu uma função, hoje conhecida em sua homenagem por função de Mittag-Leffler, sendo esta uma generalização da função exponencial.



Magnus Gösta Mittag-Leffler. Fonte: *Wikipedia.*

Na 2ª edição do Boletim relatamos um caso curioso sobre Mittag-Leffler (para saber sobre esse fato veja a seção Curiosidades Matemáticas da 2ª edição clicando aqui). A função definida por ele depende apenas de um parâmetro. Várias generalizações da função de Mittag-Leffler foram desenvolvidas desde 1903, por exemplo as funções de Mittag-Leffler de dois, três, quatro, cinco e seis parâmetros.

Essas funções são umas das mais importantes relacionadas ao Cálculo Fracionário.

A função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial.

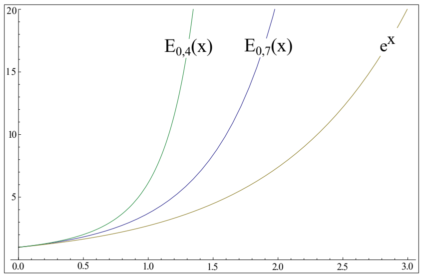
Assim como a função exponencial emerge na solução de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, a solução de uma equação diferencial de ordem não inteira é escrita, em muitos casos, em termos da função de Mittag-Leffler. Tal função é conhecida por rainha das funções especiais.

A clássica função de Mittag-Leffler, $E_\alpha(x)$, é definida através do somatório

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

sendo x pertencente aos números complexos, α um parâmetro complexo com parte real maior que zero e $\Gamma(x)$ a função gama, que é uma generalização do fatorial.

Quando tomamos $\alpha = 1$ temos $E_1(x) = e^x$, ou seja, a função de Mittag-Leffler recupera a função exponencial quando $\alpha = 1$. Na imagem mostramos um gráfico para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro para alguns valores de α.



Função de Mittag-Leffler de um parâmetro, sendo $0 < \alpha < 1$. ■

PROJETO DE EXTENSÃO

Café Matemático

O Café Matemático é um projeto que não surgiu de repente. A ideia de mostrar o que um(a) matemático(a) faz em seu cotidiano começou com as leituras dos livros de Ian Stewart, inclusive com o seu livro *Cartas a uma Jovem Matemática*, mas foi em novembro de 2021 que tudo tomou forma.

O objetivo do projeto é mostrar para as pessoas em geral e aos estudantes de exatas o que uma pessoa pesquisadora na área de exatas, em particular, na Matemática, faz no seu dia a dia, sua trajetória como estudante e de onde surgiu a vontade de seguir esse caminho tão cheio de desafios e alegrias.

Uma vez por mês, às terças-feiras, um(a) pesquisador(a) é convidado(a) a contar sua história na área, sua trajetória e seu dia a dia no ambiente universitário, de modo simples e descontraído, como num café com amigos. As palestras são feitas on-line e, para obter mais informações, você pode acessar o site www.dmm.ufla.br/cafematematico ou encaminhar um e-mail para `cafe.matematico@ufla.br`.

Nós, editores do Boletim Lavrense de Matemática, agradecemos a professora Andréia da Silva Coutinho que gentilmente colaborou para essa reportagem. ■

[2]Para saber mais sobre a função exponencial veja a 2ª edição do Boletim Lavrense de Matemática disponível em 2ª edição.

SUGESTÃO DE LEITURA

Professor José António Tenreiro Machado

Um dos principais nomes da atualidade relacionado ao Cálculo Fracionário é o do professor José António Tenreiro Machado. Tenreiro Machado nasceu em 6 de outubro de 1957, em Pinhel, Portugal, e faleceu, no dia 6 de outubro de 2021.

Prof. José António Teireiro Machado. Fonte: *In memory of Professor José António Tenreiro Machado (1957-2021). C.M.A.Pinto, A. M. Lopes, A. M. S. F. Galhano, Nonlinear Dynamical, 2022.*

Graduado em Engenharia Elétrica, sua carreira acadêmica teve início em 1980 como professor auxiliar na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. De 1985 a 1988, o professor Tenreiro Machado licenciou-se para fundar uma nova escola de engenharia no Instituto Politécnico de Viseu (Viseu, Portugal). Defendeu, em 1989, a sua tese de doutorado.

O legado científico do professor Tenreiro Machado abrange três principais tópicos, a saber, Controle e Robótica, Sistemas Complexos e Cálculo Fracionário. Suas realizações científicas são amplas, profundas e abrangentes. Seu impacto na literatura é verdadeiramente notável. É autor de mais de 1160 publicações, incluindo 11 livros, 575 artigos em periódicos, 118 capítulos de livros, 382 apresentações e 60 palestras em reuniões e conferências nacionais e internacionais e 74 cursos em universidades nacionais e internacionais.

A produção científica mais prolífica do professor Tenreiro Machado está associada ao Cálculo Fracionário. Seu primeiro artigo sobre o tema foi publicado em 1997 no qual analisou e projetou sistemas de controle digital de ordem fracionária. Desde 1997, o professor Tenreiro trabalhou e escreveu diversos artigos sobre o tema, dos quais 51 como autor único.

Suas realizações científicas são amplas, profundas e abrangentes.

O legado deixado pelo professor Tenreiro Machado para o Cálculo Fracionário é vasto, abrangendo aspectos teóricos e práticos, sendo fonte de inspiração para trabalhos e pesquisadores.

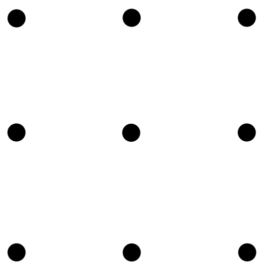
Para saber mais sobre esse importante nome para o Cálculo Fracionário acesse o artigo *In memory of Professor José António Tenreiro Machado (1957-2021)* disponível em www.link.springer.com. ■

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Tente ligar os 9 pontos da figura com 4 segmentos de reta unidos sem tirar o lápis do papel.



2) 100 pessoas são postas em uma fila e cada uma delas recebe um chapéu, que pode ser preto ou branco. Cada pessoa só consegue ver os chapéus de todas as pessoas que estão a sua frente. É pedido que cada uma delas tente adivinhar a cor do seu chapéu. Qual o máximo número de acertos que se pode **garantir**, dado que as pessoas podem combinar uma estratégia antes de recebê-los?

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 7ª edição)

Desafio 1: Entre os números 1601 e 2022, há 105 múltiplos de 4. Também há 4 múltiplos de 100 e 1 múltiplo de 400 (o número 2000). Como os anos bissextos são aqueles que são múltiplos de 4, exceto anos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400, entre os anos 1601 e 2022 ocorreram 102 anos bissextos (pela regra o ano 2000 foi bissexto).

Desafio 2: Quando dividimos 365 por 7 encontramos resto igual a 1. Isso significa que entre dois anos consecutivos não bissextos, se determinado dia (por exemplo, 28/04) foi quarta-feira, no ano seguinte esse dia será quinta-feira (um dia de semana a mais devido ao resto da divisão de 365 por 7). Como o dia 2 de março de dois anos consecutivos foram sexta-feira e domingo (dois dias a mais), o segundo desses anos foi bissexto. Então, o dia 29 de fevereiro desse ano foi sexta-feira e o dia 1º de janeiro foi terça-feira. Assim, o dia 1º de janeiro do primeiro ano foi segunda-feira. ■

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.