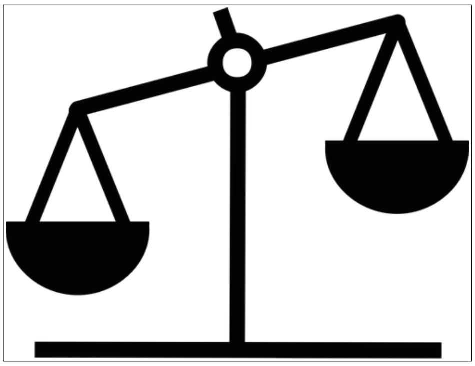
Boletim Lavrense de Matemática

Edição 11, 25 de novembro de 2022



www.publicdomainvectors.org

Um pouco da história das equações algébricas

Para estudar fenômenos que ocorrem na natureza muitas vezes é necessário resolver equações. O uso de equações para estabeler correlações entre os objetos estudados é tão útil e usual, que deu origem ao verbo equacionar. Atualmente é comum ouvirmos expressões do tipo *"Vamos equacionar o problema"* nas mais diferentes áreas. O *" x da questão"* deixou de ser uma expressão puramente matemática há algum tempo. Mas voltando às questões matemáticas, pode-se afirmar que há vários tipos de equações. Na Reportagem Especial desta edição abordamos um grupo específico de equações, denominadas Equações Algébricas.

CURIOSIDADES

O humano e o gênio

Todo ser humano carrega em si características consideradas boas e outras consideradas ruins. Nesse sentido os gênios da Matemática se mostraram tão humanos quanto qualquer outra pessoa. A vaidade por muitas vezes gerou conflitos entre os maiores nomes dessa ciência.

Com Tartaglia e Cardano, não foi diferente. Pelo título de primeiro a publicar resultados sobre resolução de equações cúbicas, eles travaram uma longa disputa, com direito a quebra de juramentos, mentiras e muita mágoa.

Na seção Curiosidades apresentamos o desenrolar dessa história.

A vida conturbada de um jovem talento

Ao observar o mesmo problema sob uma ótica diferente o jovem Évariste Galois deu origem a uma nova teoria, conhecida hoje como Teoria de Grupos. A surpreendente descoberta ocorreu ao mesmo tempo em que uma avalanche de sentimentos tomava conta de Galois. Os ideais republicanos, a trágica morte do pai, as decepções na Academia, culminaram em decisões que colocaram fim à curta, mas intensa, vida do talentoso matemático. Nesta edição contamos um pouco da história desse prodígio da Matemática.

www.commons.wikimedia.org

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: `boletimdamatematica.dmm@ufla.br`
Instagram: www.instagram.com/boletimlavrensedematematica

EDITORES
DMM/UFLA
Ana Claudia Pereira
Julia Terra Souza
Ricardo Edem Ferreira
Thais Presses Mendes

ESPECIAL

Equações Algébricas

Equações algébricas parecem ter surgido de forma natural à medida em que o homem começou a calcular, trocar produtos, contabilizar impostos ou construir os primeiros monumentos e obras de engenharia. Fala-se aqui de mais de 4000 anos atrás.

Mas afinal o que são equações, e o que são equações algébricas? Equação é uma igualdade entre duas expressões matemáticas que envolve uma ou mais quantidades desconhecidas. Resolver uma equação significa encontrar a quantidade desconhecida, a qual dá-se o nome de incógnita. A incógnita pode representar um número, uma função, uma forma. Foi através da solução de uma equação que Newton provou que as órbitas dos planetas são elipses, e que o Sol ocupa um dos focos.

Denomina-se equações algébricas as equações em que a incógnita aparece submetida apenas às chamadas operações algébricas: soma, subtração, multiplicação, divisão e radiciação. Por exemplo:

$$x^3 - 2x = 9$$

$$3x - \frac{1}{x^2} = 1$$

$$-2x^9 - \sqrt{x^3} = 0.$$

Toda equação algébrica de uma incógnita x pode ser colocada na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

conhecida como forma canônica da equação algébrica ou simplesmente equação polinomial de grau n. A forma canônica dos exemplos anteriores são respectivamente:

$$x^3 - 2x - 9 = 0$$

$$3x^3 - x^2 - 1 = 0$$

$$4x^{18} - x^3 = 0.$$

Assim como ocorre com a maioria das teorias matemáticas, não se pode precisar quando o ser humano começou a resolver equações. Mas existem registros muito antigos sobre resolução de equações algébricas. O papiro egípcio de Ahmes, que data de 1650 a.e.c., é um documento que contém diversos problemas matemáticos e mede $5m \times 33cm$, é uma cópia de um documento mais antigo e contém equações do primeiro grau. Sabe-se também que os primeiros matemáticos gregos já executavam a resolução parcial de equações do segundo e terceiro grau, por métodos geométricos.

Apesar dos registros mencionados, frequentemente é atribuído ao matemático grego Diofanto de Alexandria (sec. III e.c.) o título de inventor da Álgebra. Diofanto empregava uma letra para exprimir uma quantidade desconhecida, a incógnita, e tratava igualmente as quantidades desconhecidas e os números para formar a equação. Para equações de primeiro grau com várias incógnitas, Diofanto empregava artifícios para reduzi-las a uma equação de uma única incógnita.

Equações do segundo grau eram trabalhadas por ele para não conter a primeira potência da incógnita. Uma vez que resolver uma equação da forma

$$x^2 - ax + b = 0$$

equivale a determinar dois números, r_1 e r_2, cuja soma seja igual a a e cujo produto seja b, para resolver a equação, Diofanto denotava por x a diferença $r_1 - r_2$, a qual é uma incógnita. Ele observava que

$$r_1 = \frac{a+x}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{a-x}{2}$$

e ainda que

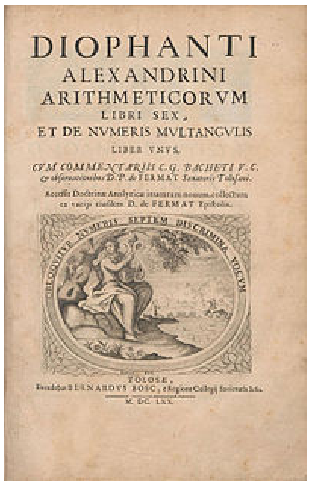
$$\frac{a+x}{2} \cdot \frac{a-x}{2} = b$$

ou seja,

$$x^2 = a^2 - 4b.$$

A última equação não tem o termo x, e assim para determinar x bastava extrair a raiz quadrada dos dois lados da equação.

O objetivo era sempre chegar a uma equação que pudesse ser resolvida apenas extraindo a raiz quadrada.



Tradução latina de uma obra de Diofanto
Fonte: *Wikipedia*

O trabalho de Diofanto só ficou conhecido na Europa no século XVI. Inicialmente com a tradução do estudioso alemão Wilhelm Xylander (1532-1576) em 1575. Em 1621, o matemático francês Bachet de Meziriac (1581-1638) publicou uma tradução com notas, e em 1670 surgiu uma segunda edição, historicamente muito importante por conter as notas marginais de Fermat[1], que estimularam as pesquisas em teoria dos números. Mas antes da obra de Diofanto ser conhecida na Europa, a Álgebra já tinha se difundido no continente. Acredita-se que os europeus herdaram a Álgebra dos árabes, cem anos antes que lhe fosse apresentada a obra de Diofanto. Há registros das primeiras regras da Álgebra, em uma obra do matemático italiano Luca Pacioli (1455-1514). A obra de Pacioli não apresenta a resolução geral das equações do segundo grau, mas apenas regras para resolver casos particulares, de acordo com as combinações de sinais dos termos da equação. Nesta época, soluções negativas e soluções complexas eram desconsideradas, e portanto as resoluções apresentadas por Pacioli só se aplicavam aos casos em que as soluções eram reais e positivas.

O geômetra italiano Scipione del Ferro (1465-1526) foi o primeiro a descobrir um método para resolver equações do terceiro grau reduzidas,

[1] Sobre Fermat, veja a Edição 10 do Boletim Lavrense de Matemática.

ou seja, equações da forma

$$x^3 + p \cdot x = q.$$

A resolução mais geral, para todas as equações do terceiro grau, foi obtida pelos também geômetras italianos Nicolò Fontana (1501-1559), mais conhecido como Tartaglia, e Girolamo Cardano (1501-1576).

Nicolò Fontana - Tartaglia
Fonte: *Wikipedia*

Cardano foi o primeiro a perceber a multiplicidade de soluções das equações, e suas distinções em positivas e negativas. Mas ele é, sobretudo, conhecido por ter sido o primeiro a perceber o caso de expressões irredutíveis, ou seja, aquelas que não podem ser fatoradas usando apenas coeficientes reais.

Girolamo Cardano
Fonte: *Wikipedia*

Ludovico Ferrari (1522-1565), o mais famoso discípulo de Cardano, foi o responsável por resolver as equações de quarto grau. A princípio, Cardano foi desafiado a resolver uma questão que envolvia uma equação quártica. Após tentativas sem êxito, ele passou a tarefa a seu discípulo Ferrari, o qual encontrou o método geral para obter solução. O artifício consistia em preparar as equações, de maneira que fosse possível extrair a raiz quadrada dos dois lados da igualdade, o que as rebaixava a uma equação do segundo grau.

De um modo geral obter solução para equações de terceiro e quarto graus não exigiu muito tempo dos pesquisadores. Porém, por mais de dois séculos vários matemáticos se esforçaram para superar as dificuldades encontradas ao tentar obter a solução da equação do quinto grau.

Apenas no século XIX, dois jovens matemáticos conseguiram dar uma resposta ao problema de resolver equações algébricas de grau maior do que quatro, Niels Henrik Abel (1802-1829) e Évariste Galois (1811-1832).

Abel nasceu em Nedstrand, Noruega. Aos 16 anos já havia lido as obras dos grandes matemáticos da época. Dos 17 aos 19 anos Abel desenvolveu pesquisas no campo das equações e chegou a acreditar que houvesse encontrado uma fórmula geral para as soluções de equações do quinto grau. O material desenvolvido foi encaminhado para análise de professores e pesquisadores, os quais não detectaram falhas. No entanto, ao tentar dar maiores informações sobre sua demonstração o próprio Abel descobriu que sua solução era incorreta. Em 1823 Abel demonstrou que, de modo geral, é impossível resolver equações do quinto grau utilizando apenas as operações algébricas. O matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822) já havia feito essa mesma afirmação anteriormente sem, entretanto, conseguir demonstrar. Com uma vida de miséria, sacrifícios e frustrações, e com o objetivo de atingir a melhor comunidade matemática da época, Abel economizou de todas as formas para conseguir pagar a impressão de seu trabalho sobre as equações de quinto grau. No entanto, o artigo foi ignorado por todos os que o receberam, inclusive por Carl Gauss (1777-1855). Mais tarde a prova do teorema sobre as equações do quinto grau chegou a ser publicada na Alemanha e na França, mas nessa época ele já o havia generalizado para qualquer equação acima do quarto grau. Em 06 de abril de 1829 Abel faleceu, tomado pela tuberculose. Apesar do pouco tempo de vida, Abel fez grandes contribuições à matemática. O adjetivo “abeliano” é uma prova da extensão e grandiosidade de seu legado.

Niels Henrik Abel
Fonte: *Wikipedia*

Galois teve contato com a Matemática aos 14 anos, no colégio para o qual foi enviado em 1823. Com pouco tempo dominou os conteúdos dos principais livros de Matemática, e teve acesso a tudo o que se sabia à época sobre as equações algébricas. Ele percebeu que o estudo de equações algébricas deveria ser tratado de uma maneira diferente daquela que até então havia sido utilizada, e decidiu abordar o assunto levando em conta os aspectos estruturais da questão. Antes de completar 18 anos Galois escreveu um trabalho intitulado *Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo*, que viria a ser o embrião da Teoria de Grupos. Para se ter uma ideia da magnitude do trabalho de Galois, alguns historiadores dizem que a teoria que Galois estava introduzindo na Matemática pode ser comparada ao que Copérnico fizera tirando a Terra do centro do Universo.

Em resumo, ambos demonstraram que as equações gerais de grau superior a quatro não podem ser resolvidas algebricamente mas, enquanto Abel o fez utilizando ao máximo os recursos da Álgebra Clássica, Galois inventou uma nova teoria dando início a Álgebra Moderna.

Referências:
Lições sobre matemáticas elementares ministradas por Joseph Louis Lagrange na Escola Normal Francesa em 1795, Joseph Louis Lagrange. Tradução: Mendes, I.A., Oliveira, J.L.R. Livraria da Física, 2013.
O Romance das Equações Algébricas, Gilberto G. Garbi. Livraria da Física, 2010.

■

Évariste Galois - um revolucionário

Évariste Galois foi um importante e revolucionário matemático francês. Ele nasceu no dia 25 de outubro de 1811 e morreu segundo relatos, devido a um duelo amoroso, em 30 de maio de 1832, com apenas 20 anos. Mas mesmo em seu pouco tempo de vida, Galois trouxe importantes contribuições científicas, a ponto de ter se tornado uma pedra fundamental da Matemática, sendo considerado o pai da Teoria de Grupos e autor de escritos inéditos a respeito da equação de quinto grau, essencial para tantas inovações, tais como a criação de computadores um século depois.

Galois teve contato com a vida política desde cedo já que quando tinha 4 anos de idade seu pai, Nicolas Gabriel Galois, foi eleito prefeito de Bourg-la-Reine, localizada no subúrbio sul de Paris. Até os 12 anos, o matemático teve aulas em casa somente com sua mãe como professora. Já na escola, ele começou estudando *Os Elementos da Geometria* do matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e os trabalhos originais do matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), o que pode ter despertado seu interesse sobre equações de quinto grau.

Para seus professores Galois era uma grande dor de cabeça. A obsessão do jovem pelo estudo da Matemática desde cedo o colocou em um patamar à frente de seus tutores, o que aumentava seu ego e gerava uma série de atritos entre ele e seus superiores, tendo como consequência a recusa para seu ingresso na *École Polytechnique* em 1827, onde sonhava estudar.

A *École Polytechnique* foi fundada durante a Revolução Francesa, o que causava grande fascínio em Galois. Para ele, não era somente um local para estudar Matemática, mas era também tudo o que ela representava politicamente. Ele soube que na *École Polytechnique* um forte movimento republicano se instaurava. Devido a isso, tentou uma segunda vez, quando falhou novamente, por jogar um apagador em um examinador.

Em 1829 Galois foi admitido na *École Normale Supérieure*, um local mais modesto, cuja função era formar professores. Na nova instituição ele teve diversos trabalhos publicados. O trabalho mais importante, a solução de um problema centenário, ficou retido na Academia Francesa nas mãos dos matemáticos franceses Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Esse trabalho tratava sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais, e para apresentá-lo ele desenvolveu o que hoje denomina-se Teoria de Grupos. A Teoria de Grupos é muito utilizada em áreas da Computação, Física, Criptografia, Cristalografia, entre outros.

Évariste Galois
Fonte: *Wikipedia*

Mesmo envolvido com questões matemáticas, seu interesse pela política foi marcante em sua vida, o que se intensificou mais com o suicídio de seu pai após intrigas políticas, motivando Galois a lutar fervorosamente pela república francesa, o que resultou em sua expulsão da *École Normale Supérieure* após publicar um ataque ao diretor, professores, examinadores e editores de livros. Depois desse incidente, o matemático foi preso duas vezes, uma por desacato ao rei e outra por porte ilegal de fardamento. Após um tempo confinado, Galois recebeu uma nova carta da Academia, mas seu trabalho também foi rejeitado pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840). Como os presos parisienses foram vítimas de cólera em 1832, Galois foi levado para uma casa de saúde, local onde conheceu e supostamente manteve um romance com Stéphanie-Félice Poterin du Motel, parente próxima de um médico. Não se sabe como se deu o relacionamento e nem se Stéphanie correspondia aos sentimentos de Galois, mas familiares dela aparentavam não aprovar alguém desempregado e perigoso com ideias políticas revolucionárias. Além disso há relatos de que outro jovem também a cortejava. Como ainda era comum nesse período os duelos em que as mulheres eram dadas como prêmios ao vitorioso, Galois entrou em um desafio contra o outro pretendente. Com a iminente possibilidade de morrer contra um apto atirador, Galois enviou a um amigo matemático chamado Auguste Chevalier uma carta reunindo suas pesquisas até o momento, também pedia que o seu trabalho fosse apresentado aos grandes matemáticos da época, caso morresse, sendo que em alguns pontos de seus escritos ele referenciou a presença de uma mulher e que não tinha mais tempo. Segundo relatos, em uma de suas cartas ele dizia: *"E vou te dizer, eu morrerei em um duelo de ocasião de algum coquette de bas étage (medíocre). Por quê? Porque ela me convidará a vingar sua honra na qual outro está compromissado."* Mesmo sem a certeza se sua morte foi causada por uma disputa amorosa, no dia 30 de maio de 1832 Galois foi encontrado baleado no estômago e levado a um hospital, onde faleceu no dia seguinte.

Passou-se uma década antes que os trabalhos de Galois fossem reconhecidos. Uma cópia chegou às mãos de Joseph Liouville (1809-1882) em 1846. Liouville reconheceu a luz do gênio naqueles cálculos e passou meses tentando interpretar seu significado. Finalmente ele editou os artigos e os publicou no prestigioso *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* A resposta dos outros matemáticos foi imediata e impressionante. Galois tinha de fato formulado uma completa explicação de como se poderia obter soluções para equações do quinto grau. Primeiro ele classificara todas as equações em dois tipos: as que podiam ser solucionadas e as que não podiam. Então, para aquelas que eram solucionáveis, ele deduziu uma fórmula para encontrar as soluções. Além disso, Galois examinou as equações de grau mais alto do que cinco podendo identificar as que tinham soluções.

É, sem sombra de dúvida, uma das obras-primas da Matemática do século XIX, criada por um de seus mais trágicos heróis.

Referências:

www.galoa.com.br/blog

www3.unicentro.br/petfisica

www.matematiques.com.br ■

CURIOSIDADES

Cardano × Tartaglia

Até 1500 a solução de equações cúbicas não havia se desenvolvido muito. Porém, no início do século XVI o professor da Universidade de Bolonha, Scipione del Ferro, descobriu um método para resolver equações da forma

$$x^3 + px = q.$$

O resultado não foi publicado, mas del Ferro contou para seu aluno Antonio Maria del Fiore sua técnica.

Nicolò Fontana, conhecido como Tartaglia devido a um problema na fala que adquiriu aos 11 anos ao ser ferido pelas tropas francesas, também estudou as equações cúbicas e encontrou um método para resolver equações da forma

$$x^3 + bx^2 = d,$$

depois de ser desafiado.

Após a morte de del Ferro, del Fiore se sentiu liberado para utilizar o método do mestre e assim ganhar notoriedade. Os desafios entre os sábios era algo comum naquela época. Tartaglia já era bastante conhecido por seu talento, e por isso del Fiore o elegeu como alvo, com a pretensão de usar questões que dependessem da resolução de equações do terceiro grau como as estudadas por del Ferro, as quais ele detinha a solução. Ele desafiou Tartaglia para uma competição onde cada um deveria resolver em 30 dias equações cúbicas propostas pelo outro.

Del Fiore apresentou 30 equações cúbicas para Tartaglia e recebeu o mesmo número de equações. Faltando pouco para completar os 30 dias, Tartaglia soube que del Fiore tinha em mãos o método descoberto por del Ferro. Sentindo-se ameaçado, em uma noite sem conseguir dormir, Tartaglia não só resolveu os problemas propostos por del Fiore, o que significa que ele descobriu como resolver equações cúbicas da forma

$$x^3 + px = q,$$

como também descobriu uma fórmula para as equações do tipo

$$x^3 + bx^2 = d.$$

Como del Fiore não era um matemático tão brilhante a ponto de conseguir resolver os problemas propostos a ele, Tartaglia saiu vencedor do desafio.

Cardano, que estava escrevendo um livro, soube do desafio e resolveu pedir a Tartaglia que lhe revelasse os métodos de resolução para que ele pudesse publicar em seu livro. Mas Tartaglia não aceitou porque também tinha planos de publicar suas descobertas em um livro de sua autoria. Cardano não desistiu, e se valeu de uma série de estratégias como insultos, mentiras, promessas e juramentos até conseguir de Tartaglia o método para obter solução das equações cúbicas. Após jurar, sobre o Evangelho, nunca revelar a técnica, e depois de prometer apresentar a Tartaglia o governador que poderia tornar viável um financiamento para sua pesquisa, Cardano finalmente conseguiu conhecer o método.

Em 1542, Cardano descobriu que um método para resolver equações cúbicas já tinha sido obtido por del Ferro anteriormente. Ele então, se sentiu livre de todos os seus juramentos e promessas e, em 1545, publicou em seu livro *Ars Magna* o método para obtenção de solução de equações cúbicas revelado por Tartaglia. Nesse mesmo livro Cardano publicou resultados sobre equações quárticas, essa última descoberta por seu discípulo e amigo Ludovico Ferrari. O livro *Ars Magna* se tornou um dos livros de Álgebra mais importantes de todos os tempos. Tartaglia recebeu créditos por sua técnica no livro de Cardano, mas não gostou da traição e guardou essa mágoa por toda a vida.

Para mais fatos sobre a vida peculiar de Cardano recomendamos o livro *O Andar do Bêbado* de Leonard Mlodninow. Nele o autor nos conta como nossas vidas são dependentes do acaso. No livro apresenta diferentes exemplos e análises intrigantes para mostrar com um texto envolvente como nossas vidas estão determinados em grande medida por eventos aleatórios. A trajetória de Cardano é apresentada enquanto o autor narra a grande contribuição desse para a teoria da probabilidade.

Referências:

A História dos Grandes Matemáticos: as Descobertas e Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos, Raymond Flood e Robin Wilson. M.Books do Brasil, 2013.

O andar do Bêbado: como o acaso determina nossas vidas, Leonard Mlodninow; tradução Diego Alfaro. Rio de Janeiro, Zahar, 2009.

■

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Existem números de três algarismos que podem ser escritos como a soma dos cubos de seus algarismos. O número 153 é um desses números, pois

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153.$$

Existem outros números de três algarismos com a mesma propriedade. Você consegue encontrá-los?

2) Uma coletânea do século V, *Antologia Grega*, trás o seguinte problema:

"Neste túmulo jaz Diofanto.
Ah, que grande maravilha!
O túmulo revela cientificamente
a medida da sua vida.
Deus lhe concedeu ser menino
pela sexta parte da sua vida,
e somando a ela a décima segunda parte,
vestiu-lhe o rosto de pelos;
Acendeu-lhe a luz do matrimônio
depois de mais um sétimo,
e cinco anos depois das bodas
concedeu-lhe um filho.
Ah! Pobre criança tardia;
depois de chegar à metade
da vida do pai, o gélido Destino o levou.
Após consolar a tristeza com esta ciência
dos números por quatro anos, findou-se a sua vida."

Quantos anos viveu Diofanto?

Referências:

Incríveis passatempos matemáticos. Ian Stewart; tradução Diego Alfaro. Rio de Janeiro, Zahar, 2010.
A História dos Grandes Matemáticos: as Descobertas e Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos. Raymond Flood e Robin Wilson. São Paulo, M.Books do Brasil, 2013.

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 10ª edição)

Desafio 1: O desafio apresenta diversas soluções possíveis. Veja uma solução:

$$10, 1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8, 9, 10$$

Desafio 2: Você pode utilizar a figura com o Crivo de Eratóstenes para $N = 100$:

$$100 = 3 + 97$$
$$100 = 11 + 89$$
$$100 = 17 + 83$$
$$100 = 29 + 71$$
$$100 = 41 + 59$$
$$100 = 47 + 57$$

■

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.