Boletim Lavrense de Matemática

Edição 12, 14 de março de 2023

Nave ORION. Fonte: *NASA*

O Surgimento da Álgebra Abstrata

Muitas teorias matemáticas surgem da necessidade de resolver problemas práticos. Outras, no entanto, surgem da curiosidade dos amantes da matemática, que desejam muitas vezes generalizar teorias já estabelecidas. Foi assim, tentando generalizar o conjunto dos números complexos, que o matemático irlandês, William Rowan Hamilton, deu origem à Álgebra Abstrata. Na reportagem especial desta edição o leitor pode acompanhar como o problema de resolver equações cúbicas deu origem ao primeiro exemplo de álgebra não comutativa.

CURIOSIDADES

Do passeio ao Royal Canal à NASA

Mal sabia Hamilton que ao caminhar, juntamente com sua esposa, ao longo do Royal Canal, em 16 de outubro de 1843, estaria desempenhando um papel revolucionário em muitas das missões espaciais da NASA. Ele mudou o curso da álgebra moderna com a descoberta dos quatérnios, inspiração que teve durante o passeio.

Na seção Curiosidades apresentamos como os quatérnios tem um papel importante nas missões espaciais.

Uma caminhada inesquecível

Se você tiver a oportunidade de caminhar pela Ponte Broome, na Irlanda, terá a possibilidade de ver a placa comemorativa em homenagem ao grande matemático irlandês, William Rowan Hamilton. Escrita em inglês, a placa traz os seguintes dizeres: "Aqui, em 16 de outubro de 1843, Sir Willian Rowan Hamilton, em um lampejo de gênio, descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quatérnios

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

e esculpiu-a em uma pedra desta ponte." A 12ª Edição do Boletim Lavrense de Matemática apresenta uma breve biografia deste tão talentoso matemático.

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: `boletimdamatematica.dmm@ufla.br`
Instagram: www.instagram.com/boletimlavrensedematematica

ESPECIAL

Das Equações Algébricas à Álgebra Abstrata

No século XVI os matemáticos italianos Niccolò Fontana (1501 - 1559), mais conhecido como Tartaglia, e Girolamo Cardano (1501 - 1576) travaram uma disputa pelo título de inventor de uma fórmula geral para resolver equações cúbicas. Tartaglia mostrou que a fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

fornecia raiz para equações da forma

$$x^3+px+q=0.$$

Embora pareça um caso particular de equação cúbica, a fórmula descoberta pode ser usada para resolver equação cúbica na forma geral, ou seja,

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

visto que a mudança de variável

$$x=y+m,$$

escolhendo m de modo a anular o coeficiente do termo de grau dois, transforma a equação geral numa equação como aquela estudada por Tartaglia. A fórmula descoberta por Tartaglia recebe o nome de Fórmula de Cardano, porque foi Cardano que a apresentou pela primeira vez em uma de suas publicações[1]. Após a publicação, a fórmula de Cardano começou a gerar dúvidas quanto à sua veracidade. O problema surgiu ao se perceber que a fórmula não exibia todas as raízes da equação cúbica.

Comparando com a fórmula de Bhaskara para resolver equações do segundo grau, algo muito estranho acontecia com a fórmula de Cardano. Sabendo que uma dada equação do terceiro grau possuia mais de uma raiz, por que as outras soluções não apareciam explicitamente na fórmula de Cardano?

Ao contrário, a já conhecida fórmula de Bhaskara exibia de maneira clara todas as raízes de equações do segundo grau. Como, no século XVI, raiz quadrada de números negativos não era considerada número, a existência de discriminante negativo significava que a equação do segundo grau não possuia solução.

Para entender melhor o problema encontrado, vamos analisar a equação do terceiro grau

$$x^3-7x+6=0.$$

Esta equação possui três raízes reais, a saber, 1, 2 e -3. No entanto, ao substituir os coeficientes da equação na fórmula de Cardano obtém-se

$$x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2}+\sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2}-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

que envolve a raiz quadrada de um número negativo e a raiz cúbica deste objeto que até então era utilizado como justificativa para a inexistência de raízes. Deste modo, como explicar que uma equação cúbica que tem claramente três raízes reais não podia ser totalmente resolvida usando a fórmula de Cardano? Esse fato mostrava a insuficiência do que se entendia por número até aquele momento.

O primeiro matemático a publicar algumas operações com expressões envolvendo raiz quadrada de número negativo foi o próprio Cardano em seu livro *Ars Magna*. No entanto, Cardano deu pouca, ou nenhuma, importância a esses novos objetos matemáticos, se referindo a eles como algo inútil.

Ainda no século XVI, pouco antes da morte de Cardano, o engenheiro hidráulico e matemático italiano Rafael Bombelli (1526 - 1572) na tentativa de trabalhar com a nova categoria de números que envolvia raiz quadrada de números negativos e a fórmula de Cardano, assumiu que existiam números reais a e b satisfazendo

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = a+\sqrt{-b}$$

e

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = a-\sqrt{-b}$$

e que

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1,$$

e observou que tal suposição era bastante plausível.

No século XVII, o matemático e filósofo francês René Descartes (1596 - 1650), fez grandes contribuições à matemática ao considerar aceitas as raízes de números negativos como soluções para equações. É devido a Descartes que atualmente usa-se o termo número imaginário para $\sqrt{-1}$ e números complexos para números da forma $a+bi$, com a e b números reais e $i=\sqrt{-1}$. O uso da letra i para denotar o número $\sqrt{-1}$ deve-se ao matemático e físico suiço Leonhard Euler (1707 - 1783), e foi utilizada pela primeira vez em 1777. Euler é considerado o matemático que dominou os números complexos, ele descobriu entre tantas outras propriedades que qualquer número complexo não nulo tem exatamente n raízes enésimas. Por exemplo, existem sete números complexos que satisfazem a equação

$$z=\sqrt[7]{2+i},$$

ou seja, há sete números complexos que elevados ao expoente 7, resulta em $2+i$. Essa descoberta resolvia o mistério que envolvia a fórmula de Cardano.

Leonhard Euler
Fonte: *Wikipedia*

[1]Para saber mais sobre a disputa de Tartaglia e Cardano veja a Edição 11 do Boletim Lavrense de Matemática

Em 1799, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) apresentou em sua tese de doutorado o resultado conhecido por Teorema Fundamental da Álgebra. O resultado afirma que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz. Como consequência imediata desse resultado, todo polinômio de grau n tem exatamente n raízes. Outro importante resultado é que se o número complexo $z = a + bi$ é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o complexo $\overline{z} = a - bi$ também o é. O número $\overline{z}$ é chamado conjugado de z. Isso mostra que raízes complexas de polinômios com coeficientes reais existem em número par, e portanto uma equação de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Carl Friedrich Gauss
Fonte: *Wikipedia*

Os trabalhos de Euler e Gauss no campo dos números complexos representava um enorme avanço na resolução de equações de terceiro grau, mas ainda existia um certo mistério que rondava os números complexos.

Em 1833, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 - 1865) apresentou uma nova abordagem para os números complexos. Ele comunicou à Academia Real Irlandesa um trabalho no qual cada número complexo $a + bi$ era representado pelo par ordenado de números reais (a, b). Com essa representação em pares ordenados o número imaginário i passou a ser representado por $(0, 1)$ e cada número real r passou a ser representado por $(r, 0)$. Ele definiu igualdade, adição e multiplicação de números complexos da seguinte forma

$$(a, b) = (c, d) \;\Leftrightarrow\; a = c \text{ e } b = d,$$

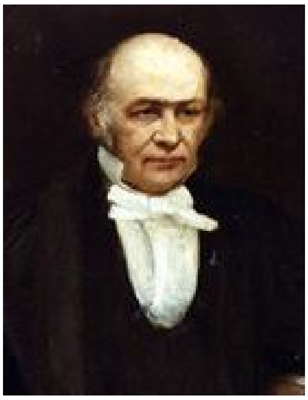
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

respectivamente. Com essa representação e a definição de igualdade, adição e multiplicação, ficou claro que o conjunto dos números reais está imerso nos sistema de números complexos, que a soma e multiplicação de números complexos são uma generalização das operações no conjunto dos números reais, que preservam as propriedades comutativa e associativa, e também a distributividade da multiplicação em relação à adição. Observa-se também que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

A representação proposta por Hamilton pôs fim a aura misteriosa que envolvia os números complexos e sedimentou a álgebra do novo conjunto numérico. O sistema de números complexos se mostrou muito útil para o estudo de vetores e rotações no plano. Sabemos hoje que números complexos podem ser aplicados em circuitos elétricos, processamento de sinais, mecânica quântica, eletromagnetismo, entre tantas outras áreas de conhecimento.



William Rowan Hamilton
Fonte: *Wikipedia*

Na tentativa de construir um sistema de números para estudar vetores e rotações no espaço tridimensional, Hamilton deu continuidade a seu artigo de 1833, e por um longo período pesquisou álgebras de ternos e quádruplos de números reais, sempre buscando construir um sistema que generalizasse a álgebra dos números complexos, porém encontrava osbtáculos quanto à maneira de definir uma multiplicação que preservasse a associatividade e a comutatividade. Em 1843 ele decidiu construir uma álgebra no conjunto dos quádruplos ordenados reais, desprezando a propriedade comutativa da multiplicação. Assim, ele definiu as operações de adição e multiplicação de modo que os números complexos ficassem imersos no novo conjunto numérico, e que as propriedades da adição fossem todas preservadas. O conjunto dos quádruplos ordenados munido dessas operações recebeu o nome de quatérnios, e se tornou a primeira álgebra não comutativa a ser estudada. Os quatérnios unitários $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ foram denotados por 1, i, j e k, respectivamente, e deste modo cada quatérnio (a, b, c, d) pode ser escrito na forma $a + bi + cj + dk$. A descoberta dos quatérnios deu origem ao que hoje conhecemos como álgebra abstrata.

Em 1844, Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877) desenvolveu classes de álgebras de maior generalidade do que a álgebra dos quatérnios. Ele considerou conjuntos ordenados de n números reais e verificou que nesse caso podem-se criar álgebras diferentes construindo tábuas de multiplicação diferentes, levando em consideração as propriedades que se desejam preservar.

Referências:

Introdução à História da Matemática, Howard Eves. Tradução Higyno H. Domingues. Editora Unicamp, 2004.

O Romance das Equações Algébricas, Gilberto G. Garbi. Livraria da Física, 2010.

■

O passeio de Hamilton

William Rowan Hamilton foi um matemático, físico e astrônomo irlandês nascido em Dublim, capital da Irlanda, em 1805. Dentre suas diversas contribuições nestas áreas, a mais relevante para a matemática é a descoberta dos quatérnios.

William Rowan Hamilton
Fonte: *Wikimedia commons*

Hamilton iniciou sua educação com o tio, reverendo James Hamilton, com quem aprendeu a falar vários idiomas, como italiano, francês, árabe e persa. Sempre foi uma criança prodígio e, aos treze anos, interessou-se pelo estudo da matemática, em especial, álgebra de Clairaut e as teorias de Newton e Laplace. Ele ingressou no *Trinity College* de Dublim aos 18 anos, onde teve progressos incomuns para o nível de graduação. Ao final de 1824, apresentou seu primeiro trabalho à Academia Real Irlandesa, intitulado *Sobre Cáusticos*. Em seu último ano de graduação, apresentou um livro de memórias da *Teoria dos Sistemas de Raios* também à Academia Real Irlandesa, trabalho no qual foi introduzida a função característica da óptica.

Mais tarde, em 1827, o conselho nomeou-o professor de astronomia no *Trinity College* no observatório de Dunsinque, quando ainda era graduando aos 21 anos. Mas, Hamilton não tinha muita experiência com observação e logo perdeu o interesse pela astronomia, dedicando-se apenas à matemática.

Em julho de 1830, se casou com Helen Maria Bayly, que vivia do outro lado dos campos do observatório. Em 4 de novembro de 1833, Hamilton apresentou um artigo à Academia Real Irlandesa expressando números complexos como pares ordenados. Neste trabalho deu sua primeira declaração da função característica aplicada à dinâmica e escreveu um segundo artigo sobre o tópico no ano seguinte. No mesmo ano, nasceu seu primeiro filho, William Edwin. Sua esposa Helen, juntamente com seu filho, se afastaram por nove meses e, para amenizar a solidão, Hamilton jogou-se no trabalho. Em 1835, publicou *Álgebra como a Ciência do Tempo Puro*.

Hamilton foi condecorado em 1835 e neste mesmo ano nasceu seu segundo filho, Archibald Henry. No entanto, a busca por estender sua teoria tornou-se uma obsessão que o atormentou por muitos anos, o que o afastou de Helen e seus dois filhos. Helen foi embora para a Inglaterra deixando as crianças para trás após o nascimento de uma filha, Helen Eliza Amelia. Hamilton, então, ficou deprimido e desenvolveu problemas com álcool.

Aqui, em 16 de outubro de 1843, Sir Willian Rowan Hamilton, em um lampejo de gênio, descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quatérnios

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

e esculpiu-a em uma pedra desta ponte.

Helen retornou em 1842. Em 16 de outubro de 1843, estavam caminhando ao longo do Royal Canal e Hamilton esculpiu as fórmulas para os quatérnios na pedra da Ponte Broome (ou Ponte Brougham, como a chamava) quando ele e sua esposa a cruzaram. Em 1958, a Academia Real Britânica ergueu uma placa comemorativa sobre este fato.

Placa sobre a ponte
Fonte: *Flickr*

Hamilton sentiu que essa descoberta foi uma revolução para a física e a matemática e passou o resto de sua vida trabalhando nisso. O ano de 1847 trouxe a morte de seus tios, James e Willey, e o suicídio de seu colega no *Trinity College*, James MacCullagh, o que o deixou muito deprimido.

Determinado a produzir um trabalho de qualidade duradoura, Hamilton começou a escrever outro livro, *Elementos dos Quatérnios*, que estimava ter 400 páginas e levar dois anos para ser escrito. O livro acabou dobrando o tamanho pretendido e levou sete anos para ser escrito. Na verdade, o capítulo final estava incompleto quando Hamilton morreu em 1865 e o livro foi finalmente publicado com um prefácio de seu filho William Edwin.

Hamilton morreu de um grave ataque de gota logo após receber a notícia de que havia sido eleito o primeiro membro estrangeiro da Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos.

Referências:

www.ufabcdivulgaciencia.proec.ufabc.edu.br

www.matematica.br/historia

■

CURIOSIDADES

O uso de quatérnios em missões espaciais

Hamilton mudou o curso da álgebra moderna com a descoberta dos quatérnios. A fórmula

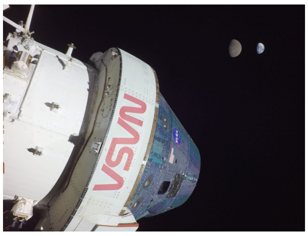
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

veio a ele em um lampejo de inspiração enquanto caminhava com sua esposa ao longo do Royal Canal e a gravou numa pedra da ponte de Brougham. Tal fórmula foi fundamental para levar o homem à lua.

Sua contribuição, os quatérnios, foi e é muito importante na exploração espacial. Os quatérnios fornecem uma notação matemática para representar orientações e rotações de objetos em três dimensões que são essenciais para o voo espacial e são empregados rotineiramente pela NASA. Embora os quatérnios tenham sido sugeridos em 1958 para simulações de voo, a NASA usou pela primeira vez em 1981 no lançamento do ônibus espacial.

Ônibus espacial dos EUA
Fonte: *Wikipedia*

Os quatérnios agora são fundamentais em versões modernas do software de navegação da NASA para determinação e controle de altitude de espaçonaves e também para simulações de voo, e voo.



Nave Orion
Fonte: *NASA*

Embora os métodos matriciais tradicionais possam ser usados para realizar rotações, eles geram enormes problemas de estabilidade numérica e eficiência. Por isso os quatérnios são uma ferramenta útil em programação, já que para rotacionar algum objeto em três dimensões é mais prático realizar a multiplicação por um quatérnio do que por uma matriz 3×3, uma vez que o quatérnio é representado por, no máximo, quatro termos, e, por isso, ocupa menos memória do que a matriz. Além do mais, o uso de quatérnios evita o chamado *gimbal lock*, que consiste na perda de um grau de liberdade na rotação de um objeto em 3 dimensões que ocorre devido ao alinhamento de um dos eixos de rotação com o outro.

Um incidente famoso com *gimbal lock* aconteceu na missão lunar Apollo 11, um voo espacial norte-americano tripulado, responsável pelo primeiro pouso na Lua em 20 de julho de 1969.

Apollo 11
Fonte: *Wikipedia*

O *gimbal lock* pode fazer com que o computador da nave perca sua orientação no espaço, sendo impossível determinar a altitude.

Hoje, incidentes como esse são impensáveis graças ao uso de quatérnios.

Referências:

www.tcd.ie/library/manuscripts/blog/tag/apollo-11/

www.ufabcdivulgaciencia.proec.ufabc.edu.br

■

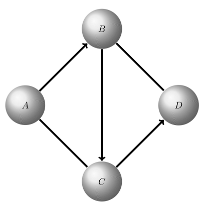
DESAFIO

Desafio da Edição

Envie sua resolução do desafio desta edição para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

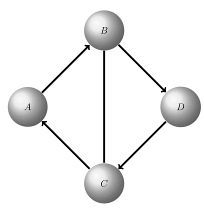
Um grafo $G(V, E)$ é um conjunto de pontos, finito e não vazio V, e um conjunto E de pares não ordenados de elementos distintos de V. Os elementos de V são denominados vértices e os elementos de E são as arestas. Podemos pensar nos vértices como pontos distintos no plano com posições arbitrárias e nas arestas como as ligações entre os pontos.

Uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que (v_j, v_{j+1}) é uma aresta, para $1 \leq j \leq k-1$, é denominada caminho ou passeio.



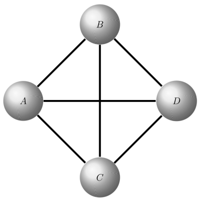
Exemplo de caminho de Hamilton

Um caminho Hamiltoniano é um caminho entre os vértices, que permite passar por cada vértice uma única vez utilizando as arestas.



Exemplo de ciclo de Hamilton

Um ciclo Hamiltoniano é um caminho Hamiltoniano que começa e termina em um mesmo vértice, logo é um caminho fechado.



Exemplo de grafo totalmente conectado

Um grafo totalmente conectado é um grafo onde entre qualquer par de vértices existe uma aresta.

Quantos ciclos Hamiltonianos existem em um grafo totalmente conectado com n vértices?

Referência:

www.mathsireland.ie/hamiltons-ireland

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 11ª edição)

Desafio 1: O desafio apresenta mais de uma solução possível, por exemplo: 370, 371 e 407.

Desafio 2: Na notação de hoje temos que:

$$\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x\right) + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x.$$

Resolvendo encontramos $x = 84$.
■

SUGESTÃO DE LEITURA

O Romance das Equações Algébricas

Se você gostou dos temas abordados nas edições 11 e 12 do Boletim Lavrense de Matemática e quer saber mais sobre a história das Equações Algébricas, e ainda conhecer um pouco sobre a vida e as contribuições de grandes matemáticos como Tartaglia, Cardano, Euler, Gauss, Galois, entre muitos outros, sugerimos a leitura do livro "O Romance das Equações Algébricas". O Romance das Equações Algébricas foi o ganhador do 40° Prêmio Jabuti realizado em 1998 premiando obras literárias referentes aos lançamentos de 1997.

O Romance das Equações Algébricas
Fonte: *Livraria da Física*

O livro é composto por 23 capítulos que abordam de maneira extremamente interessante o desenvolvimento da Álgebra ao longo dos séculos. Como o próprio autor menciona em sua obra, este é também um livro de suspense. E como todo bom livro de suspense prende a atenção do leitor do início ao fim.

O autor, Gilberto G. Garbi, é Engenheiro Eletrônico e um amante da Matemática que a cultiva como hobby. É também autor dos livros "A rainha das ciências" e "C.Q.D".

■

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.