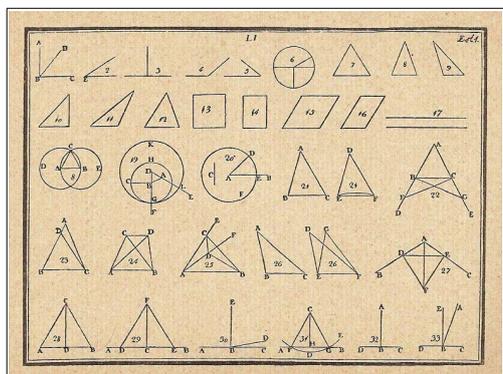


Boletim Lavrense de Matemática

Edição 17, 6 de maio de 2024

A Geometria Euclidiana



Fonte: Biblioteca escolar esjp

Basta olharmos ao nosso redor para nos depararmos com várias figuras geométricas: telhados que lembram triângulos, portas retangulares, moedas em forma de discos, e assim por diante. Essas figuras geométricas são objetos estudados em Geometria Euclidiana. A palavra Geometria significa medida da terra (*geo* significa terra e *metria* significa medida), porque foi assim que esse ramo da matemática surgiu, atualmente a Geometria estuda questões de forma, tamanho, posição relativa de figuras e propriedades dos espaços. Confira nesta e nas próximas edições como se deu o desenvolvimento da Geometria.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

O mais famoso livro matemático

A seção Curiosidades dessa edição será dedicada ao livro *Os Elementos*. Tal obra, a seguir à Bíblia, é a mais reproduzida e estudada na história do mundo ocidental, é considerada um dos maiores best-sellers. É admirada

pelos matemáticos e filósofos. São raros os livros que têm sido tão editados e traduzidos como *Os Elementos* de Euclides. Para saber mais sobre essa importante obra acompanhe a seção Curiosidades.

Índice

Geometria Euclidiana [pág. 2](#)

Euclides de Alexandria [pág. 4](#)

Curiosidades [pág. 5](#)

Sugestão de leitura [pág. 5](#)

Desafios Matemáticos [pág. 6](#)

BIOGRAFIA

Euclides de Alexandria

Na seção Biografia vamos conhecer o matemático Euclides, conhecido como “Pai da Geometria”. Embora sua história seja um enigma, alguns estudiosos e filósofos dedicaram-se a procurar informações e detalhes sobre a vida de Euclides e suas obras!



Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletindamatematica.dmm@ufla.br

EDITORES
DMM/UFLA
Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Ricardo Edem Ferreira
Thais Presses Mendes

Geometria Euclidiana

É impossível dizer quando surgiu a Geometria. As figuras deixadas pelo homem neolítico¹ sugerem uma preocupação com as relações espaciais, congruências e simetrias, que são partes da Geometria elementar que se estuda na escola atualmente.

Por isso, assim como o historiador grego Heródoto (séc. V a.e.c.) e o filósofo grego Aristóteles (séc. IV a.e.c.), que não se arriscaram a falar de Geometria com origens mais antigas que a civilização egípcia, este texto também seguirá o mesmo caminho.

Para entender a grandiosidade das descobertas matemáticas apresentadas nesta reportagem é importante esvaziar a mente do que já conhecemos de Geometria cartesiana, e lembrar que a época aqui retrata não compreende a Geometria como a conhecemos hoje, onde pontos no plano ou espaço podem ser representados por pares ou trincas ordenadas, e que curvas podem ser representadas por equações, que não existia uma linguagem matemática universal como a existente hoje.

Para Heródoto, a cobrança de impostos parece ter sido o pontapé inicial para o desenvolvimento da Geometria. Para Aristóteles, questões ligadas à rituais e lazer sacerdotal conduziram ao estudo da Geometria. O fato é que todos os anos havia uma inundação no vale do rio Nilo, e ap os os quatro meses de inundação era necessário medir a altura da enchente e a área de superfície das propriedades para determinar os impostos. Para calcular as áreas, os egípcios desenvolveram métodos bastante confiáveis que serviam para calcular áreas de quadrados, retângulos e trapézios. Para determinar a área de um círculo, eles o consideravam semelhante a um quadrado com lados iguais a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Essa aproxima o usada pelos egípcios equivale a usar para π um valor de aproximadamente 3,16.

Na realiza o de seus levantamentos topográficos os egípcios utilizavam um esticador de corda. O esticador de corda era um homem que utilizava escravos para segurar uma corda com n os em determinadas distâncias, de modo que ao esticar a corda, os n os desempenhavam o papel de v rtices para formar triângulos, em particular triângulos retângulos.

Para entender como a Geometria egípcia era bem desenvolvida basta observar que as pirâmides do Egito, são pirâmides de bases quadradas e faces triangulares, tem aproximadamente 140 metros de altura e foram construídas com blocos de 2 toneladas cada, por volta de 2500 a.e.c., sem serem deformadas.

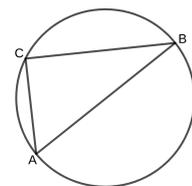
Por outro lado, tábuas de argila dos babil nios, datadas de 1800 a 1600 a.e.c., continham tabelas com trincas numéricas que hoje conhecemos como ternos pitagóricos, ou seja, três números inteiros positivos que satisfazem a rela o dada pelo Teorema de Pit goras², como por exemplo (3, 4, 5) que são as medidas dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa 5 e catetos medindo 3 e 4 unidades.

Egípcios e babil nios estavam interessados em questões práticas e concretas. Eles não se importavam com as rela es matemáticas em si, e nem mesmo em como us -las para obter maior conhecimento. Essa visão mais concreta e prática da matemática são começou a mudar com os gregos, em particular com Tales de Mileto (séc. VII a.e.c.), considerado por muitos o primeiro matemático do mundo.

Tales viajou para a Babil nia e o Egito, onde estudou matemática e conseguiu extrair de aplica es práticas o princípio abstrato. Assim Tales buscou explica es teóricas para fatos que haviam sido descobertos de forma empírica, e deste modo deu os primeiros passos para a sistematiza o da Geometria. Ele foi o pri-

meiro a considerar o conceito de congruência de figuras espaciais, e a entender a ideia de igualdade numérica para objetos espaciais, o que foi um grande salto na matematiza o do espaço. Também foi o primeiro a perceber a importância de se ter um sistema de raciocínio lógico, e o primeiro a criar um tal sistema. Tales acreditava que, pela observa o e raciocínio, o homem seria capaz de explicar tudo o que acontece na natureza. Muitos são os fatos geométricos cujas demonstra es são atribuídas a Tales. Segue abaixo alguns desses fatos:

1. Os ângulos da base dos triângulos isósceles são iguais.
2. Se dois triângulos tem dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então são iguais.
3. Todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais.
4. Ao unir-se qualquer ponto C de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obt m-se um triângulo retângulo em C .
5. Se duas retas se cortam, então os ângulos opostos pelo v rtice são iguais.



Exemplo do resultado 4

Por volta do ano 300 a.e.c., o matemático grego Euclides entrou em cena e revolucionou a forma de pensar matemática. Em sua obra mais conhecida, chamada *Os Elementos*³, Euclides organizou e sistematizou toda a Geometria da época, conforme compreendida pelos gregos. A mais importante contribui o desta obra foi o método lógico inovador de tornar

¹O período neolítico é o período compreendido aproximadamente entre 10.000 a.e.c. a 3000 a.e.c.

²Para informa es e curiosidades sobre o número π e sobre Pitágoras veja as Edi es 4 e 13 do Boletim Lavrense de Matemática, respectivamente.

³Veja a se o Curiosidades desta edi o.

⁴Axiomas são afirma es autoevidentes comuns a vários ramos da ciência. Postulados são afirma es adicionais que são aceitas sem demonstra o e referem-se a um ramo específico da ciência.

explícitos os termos, formulando definições precisas e garantindo a compreensão das palavras e símbolos utilizados, depois tornar explícitos os axiomas e postulados⁴, e por fim deduzir as consequências lógicas do sistema empregando somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas⁵ previamente demonstrados.

Euclides não reivindicou ter sido original em relação à qualquer dos teoremas apresentados em seu livro. O objetivo de Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições baseadas na intuição, em conjecturas⁶ e na inexatidão. Ele formulou 23 definições, cinco postulados geométricos e cinco postulados adicionais que chamou de noções comuns. A partir dessa base, ele demonstrou 465 teoremas - essencialmente todo o conhecimento geométrico de seu tempo.

As definições incluíam termos como ponto, linha (a palavra linha refere-se a qualquer curva), linha reta, círculo, ângulo reto, superfície e plano. As noções comuns eram proposições lógicas não geométricas consideradas serem de senso comum. São elas:

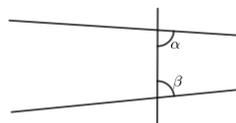
1. Duas coisas que são iguais a uma terceira são também iguais entre si.
2. Se duas coisas iguais são adicionadas a outras iguais, os totais são iguais.
3. Se coisas iguais forem subtraídas de coisas iguais, os restos serão iguais.
4. As coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
5. O todo é maior do que a parte.

Já os postulados eram de conteúdo geométrico, e formam o fundamento da Geometria que hoje é conhecida como Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides. São eles:

1. Dados quaisquer dois pontos, pode ser traçada uma linha tendo estes pontos como suas extremidades.

2. Qualquer linha pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção.
3. Dado qualquer ponto, pode ser desenhado um círculo com qualquer raio, com aquele ponto no centro.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Dada uma linha que cruze duas linhas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar.

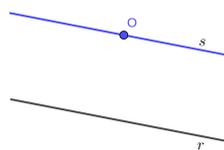
Diferente dos quatro primeiros postulados, o quinto postulado foi invenção do próprio Euclides. Os matemáticos que vieram depois de Euclides, e aparentemente o próprio Euclides, não se sentiam confortáveis com esse postulado. Eles acreditavam que o quinto postulado, que atualmente é conhecido como *Postulado das Paralelas*, não era algo simples o suficiente para ser considerado um postulado, e portanto deveria ser demonstrado como um teorema.



Postulado das Paralelas
 $\alpha + \beta < 180^\circ$

Um modo equivalente de formular o *Postulado das Paralelas* é:

“Dada uma linha e um ponto externo, há exatamente uma outra reta que passa pelo ponto externo e é paralela à linha dada.”



Forma equivalente do
 Postulado das Paralelas

Apesar dos questionamentos, por dois milênios, a ideia de que existe uma e somente uma paralela passando

pelo ponto dado, foi universalmente aceita.

Com sua extraordinária obra *Os Elementos*, o professor de matemática da Academia de Alexandria, Euclides, ganhou notoriedade dentro e fora da Academia. É importante ressaltar que a cidade de Alexandria foi planejada cuidadosamente durante o império de Alexandre, o Grande, por volta de 332 a.e.c., com o objetivo de ser um centro cultural, comercial e governamental. Após a morte de Alexandre, sob o comando de Ptolomeu I e posteriormente seu filho Ptolomeu II a cidade tornou-se um centro da matemática, ciência e filosofia gregas. Uma grande biblioteca, conhecida como Biblioteca de Alexandria, e um museu, conhecido como Museu ou Academia de Alexandria, foi construída. O Museu de Alexandria foi o primeiro instituto estatal de pesquisas do mundo. A Biblioteca de Alexandria chegou a guardar mais de 200.000 papiros, o que representava a maioria do conhecimento mundial daquela época. Neste lugar os maiores sábios contemporâneos de Euclides e também os que vieram depois dele, estudaram Geometria e espaço, e também trabalharam na Biblioteca.

Em 212 a.e.c. Eratóstenes de Cirena, o bibliotecário principal de Alexandria tornou-se a primeira pessoa na história a medir a circunferência da Terra. E para tal feito ele utilizou o comprimento de sombras e resultados do livro *Os Elementos*, em outras palavras ele usou a Geometria, e obteve um resultado muito próximo ao que sabemos ser hoje o comprimento da circunferência da Terra. Arquimedes, outro matemático atraído para Alexandria, descobriu que o volume de uma esfera inscrita num cilindro é $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro. A astronomia também atingiu seu ápice em Alexandria. Hiparco (2 a.e.c.) desenvolveu um modelo geométrico do nosso sistema solar. A descrição do movimento dos cinco planetas conhecidos, o sol e a lua, permitiram a ele prever eclipses lunares com um erro de apenas duas horas, o que foi um feito incrível para a época.

O último intelectual a trabalhar na

⁵Teoremas são afirmações que podem ser provadas por meio de outras afirmações já demonstradas e afirmações anteriormente aceitas, como axiomas e postulados.

⁶Uma conjectura é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado.

Biblioteca de Alexandria foi Hipácia, uma incrível mulher erudita, que nasceu aproximadamente em 370, e aprendeu matemática com o seu pai, o também matemático Téon. Perto da virada do século V, houve uma grande luta por poder entre a Igreja e o Estado. Nessa disputa por poder, a Biblioteca de Alexandria foi queimada, e Hipácia foi atacada e morta, bem como toda a cultura grega. Após esse período veio a Idade das Trevas⁷,

na Europa. Toda a tradição de abstração e demonstração iniciada pelos gregos parecia perdida. Mas essa fase chegaria ao fim, e o mundo conheceria séculos mais tarde brilhantes matemáticos que revolucionariam a Geometria e a compreensão do espaço.

A história da Geometria não acaba aqui, na próxima edição, veremos como a Geometria Analítica mudou o modo de pensar e ver o espaço.

Referências:

A janela de Euclides. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço, Leonard Mlodinow. Tradução de Enézio de Almeida. Geração Editorial. 5ª edição, 2010.

História da Matemática, Carl B. Boyer. Tradução de Elza F. Gomide. Editora Blucher. 3ª edição, 2010.



BIOGRAFIA

Euclides de Alexandria

Euclides de Alexandria foi um professor, matemático e escritor grego, conhecido como “Pai da Geometria”. Sua principal obra *Os Elementos* reúne resultados importantes sobre Geometria, álgebra e aritmética. Euclides também escreveu sobre teoria dos números, proporções e astronomia.

Assim como no caso de muitos matemáticos gregos antigos, há poucas referências sobre a vida de Euclides. As datas de nascimento e morte são desconhecidas e estimadas pela comparação com figuras contemporâneas mencionadas em referências. Nenhuma imagem ou descrição da aparência física de Euclides foi feita durante sua vida, então as representações de Euclides em obras de arte são imaginárias.

Acredita-se que Euclides de Alexandria nasceu por volta do ano 300 a.e.c. em pleno florescimento da cultura helenística⁸ no Egito.

Segundo o filósofo Proclo Lício (412 - 485), Euclides viveu depois do filósofo Platão (427 - 347 a.e.c.) e antes do matemático Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.e.c.). O matemático Pappo de Alexandria (290 - 350) relata que Euclides foi marcante em Alexandria e fundou uma tradição

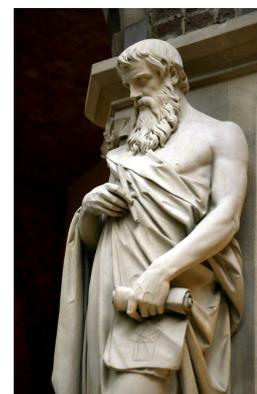
matemática. Em uma referência sobre a vida de Euclides, Pappo mencionou brevemente que o filósofo Apolônio de Tiana (15 - 100) “passou muito tempo com os alunos de Euclides, e foi assim que ele adquiriu o hábito do pensamento científico”. Também acredita-se que Euclides tenha estudado na Academia de Platão, na Grécia.

Euclides foi convidado por Ptolomeu I para compor o quadro de professores da Escola Real de Alexandria, uma academia recém fundada que fez de Alexandria o centro do saber da época. Desde então, ele tornou-se o mais importante autor de trabalhos matemáticos da antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos, com sua obra *Os Elementos*.

Após a queda do Império Romano, os seus livros foram recuperados por estudiosos e entregues à sociedade europeia. Euclides também escreveu outros livros sobre matemática, tais como *Lugares de superfície* e *Divisão de figuras* (sobre a divisão geométrica de figuras planas), sobre astronomia com a obra *Fenômenos* e sobre óptica. Ainda há alguns resquícios destas obras que hoje são os mais antigos tratados científicos gregos existentes.

Pela sua didática e forma de es-

crever nas obras deduz-se que Euclides tenha sido um excelente professor. Foi com Euclides que a Geometria do Egito tornou-se importante fazendo de Alexandria o centro mundial do compasso e do esquadro. Além disso, os preceitos euclidianos são estudados e ensinados até os dias de hoje e há uma estátua em sua honra no Museu da Universidade de Oxford.



Estátua de Euclides

Fonte: Wikipedia

Referências:

www.todamateria.com.br/cultura-helenistica

www.ebiografia.com/euclides



⁷A Idade das Trevas compreende o período entre os séculos V e IX, e enfatiza as deteriorações demográficas, culturais e econômicas que ocorreram na Europa em consequência ao declínio do Império Romano do Ocidente.

⁸O termo cultura helenística ou helenismo refere-se às transformações da cultura grega a partir do estabelecimento do Império Macedônico, sendo resultado da fusão dos elementos desta com a cultura oriental, destacando-se com elementos originais e marcantes que caracterizaram as regiões conquistadas por Alexandre Magno (356 - 323 a.e.c.).

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Os Elementos

O mais conhecido livro de matemática de todos os tempos, *Os Elementos*, foi escrito por Euclides de Alexandria no período de 320 - 260 a.e.c. É um dos livros mais importantes do mundo ocidental e também um dos mais publicados, já que apenas a Bíblia tem maior número de edições.

Os Elementos apresentam 465 proposições, além de definições, postulados e axiomas distribuídos em 13 livros. Esses livros não tratam apenas de Geometria, mas também de teoria dos números e álgebra, reunindo quase todo o conhecimento matemático daquele tempo.

Os seis primeiros livros são sobre Geometria Plana, Geometria que conhecemos hoje como Geometria Euclidiana, os três seguintes, da teoria dos números, o décimo livro, estuda uma classificação de incomensuráveis e os três últimos abordam a Geometria no espaço.

Como os textos eram escritos em rolos de papiro, cuja deterioração é

rápida, os trabalhos de Euclides que chegaram até nós são somente cópias.



Fragmento de *Os Elementos*

Fonte: **Wikipedia**

Por volta do ano 800, existiam somente fragmentos de uma tradução de *Os Elementos* em latim. A versão mais antiga de que se tem conhecimento é um manuscrito bizantino que data de 888.

Atualmente há traduções do livro *Os Elementos* em pelo menos oito línguas distintas. A primeira tradução completa para o português, diretamente do grego clássico, foi feita pelo

matemático Irineu Bicudo, e publicado pela Editora Unesp.

Em entrevista ao *Jornal Unesp*, Irineu Bicudo afirmou ter dedicado quinze anos ao trabalho de tradução.



Os Elementos

Fonte: **Editora Unesp**

Referências:

www.mat.ufrgs.br

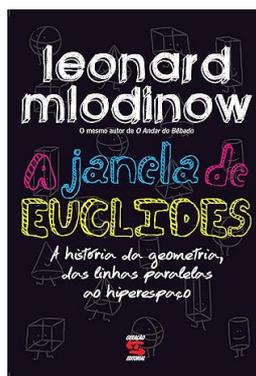
www.infoescola.com/biografias

SUGESTÃO DE LEITURA

A Janela de Euclides

Um livro fácil e cativante. Leonardo Mlodinow, físico, matemático e atualmente roteirista e consultor científico para produções como *Jornada nas Estrelas*, narra de forma clara e divertida a história da Geometria ao longo do tempo e como ela está ligada ao nosso cotidiano.

A Geometria afeta nossa percepção na arte e na música. Influencia fortemente a pintura e a escultura com sua simetria. Até o corpo humano tem uma certa beleza geométrica.



Fonte: **Geração Editorial**

Como um romance cheio de aventura e emoção, o autor apresenta uma leitura fácil e agradável sobre um tema que pode despertar algum receio quando somos estudantes.

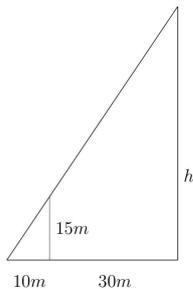
Leonard Mlodinow narra as conquistas dos cientistas desde a Antiguidade, com as descobertas de Euclides, até a teoria das cordas e do hiperespaço.

DESAFIOS

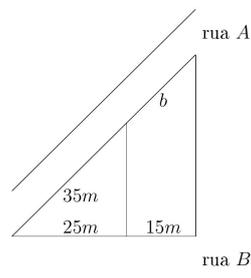
Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Suponha que um estudante queira verificar a altura de prédio. Para isso ele mede a sombra que o prédio projeta na rua em certo horário do dia. Este estudante também mede a distância da sombra projetada por um poste da rede elétrica no mesmo horário do dia. Segundo a empresa responsável pela rede elétrica o poste tem 15 metros de altura. A sombra do poste tem 10 metros e a sombra do prédio tem 30 metros. Considerando esses dados, qual é a altura do prédio?



2) Considere dois terrenos como mostrado na figura entre as ruas A e B . Vamos considerar as linhas verticais como paralelas e vamos chamar o terreno triangular de terreno 1 e o terreno com formato de trapézio de terreno 2. Conhecemos a medida dos lados dos terrenos que estão na rua B . Também conhecemos a medida do lado do terreno 1 que está na rua A . Qual a medida do lado do terreno 2 que está na rua A ?



Referência:

www.exercicios.brasilecola.uol.com.br

Resposta do desafio da edição anterior (acesse aqui a 16ª edição)

Desafio 1: O rei da Sécia tinha um duplo 6 quando o rei Olavo lançou seus dados. Um dos dois dados parou de rolar com o 6 voltado para cima. O outro caiu, bateu em uma pedra e se partiu em dois. Uma das faces mostrou o número 6 e a outra o número 1. Olavo I somou então 13 pontos e venceu a aposta.



Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.
