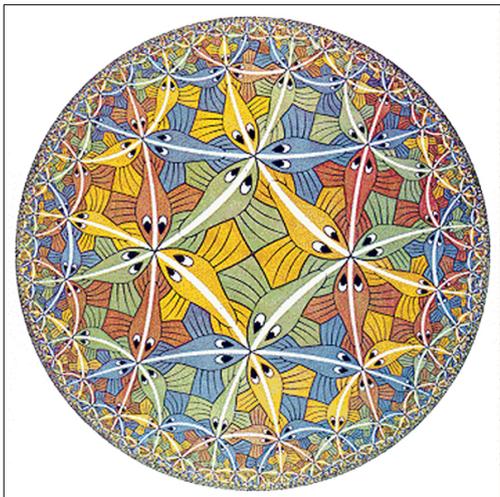


Boletim Lavrense de Matemática

Edição 19, 23 de novembro de 2024



Uma geometria diferente

Por muitos séculos, o conteúdo do Postulado das Paralelas foi considerado verdade absoluta. A inquietação com esse resultado por parte dos estudiosos surgiu porque apesar de acreditarem no resultado, eles não o viam como um Postulado, mas sim como algo a ser provado. Após séculos de discussões e tentativas de demonstrações, três grandes matemáticos, de forma independente, produziram uma geometria que parecia impossível para a época de Euclides, uma geometria na qual a soma dos ângulos internos do triângulo não resulta em 180° . A descoberta dessa nova geometria não invalidou a geometria euclidiana, na verdade as duas geometrias se mostraram consistentes. A forma como essa nova geometria se desenvolveu será apresentada na Reportagem Especial desta edição do Boletim.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Matemática e Arte

Na seção Curiosidades iremos apresentar uma série composta de quatro obras de Maurits Cornelis Escher, o artista gráfico que muitos dizem ter

alma de matemático, que utiliza conceitos de Geometria Hiperbólica em suas obras.

BIOGRAFIA

Nikolai Ivanovich Lobachevsky: um dos precursores da Geometria Hiperbólica

Vamos conhecer a história de Nikolai Ivanovich Lobachevsky, um matemático que apresentou resultados importantes da geometria não euclidiana, a Geometria Hiperbólica. Lobachevsky foi um excelente professor e pesquisador, mas também ficou reconhecido por seu excelente trabalho como reitor da Universidade de Kazan, na Rússia. Neste posto, ele demonstrou grande preocupação com a educação básica e superior e sua importância social.



Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

Índice

Geometria Hiperbólica [pág. 2](#)

Nikolai Lobachevsky [pág. 4](#)

Curiosidades [pág. 5](#)

Sugestão de leitura [pág. 6](#)

Desafios Matemáticos [pág. 6](#)

Evento [pág. 7](#)

EDITORES
DMM/UFLA
Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Ricardo Edem Ferreira
Thais Presses Mendes

Geometria Hiperbólica

O livro *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria¹ (século III a.e.c.), teve e tem um papel revolucionário e fundamental na Matemática e na maneira de trabalhar com Matemática. Euclides, em *Os Elementos*, utilizou de cinco postulados, para demonstrar uma série de resultados sobre geometria. Mas desde a publicação de sua obra, o quinto postulado de Euclides, também conhecido como Postulado das Paralelas, causou enorme estranhamento entre os estudiosos, não porque eles não acreditassem no resultado, mas porque eles não o entendiam como um postulado. Ao contrário, para eles o Postulado das Paralelas deveria ser provado, como um teorema, e por longos anos os matemáticos tentaram demonstrá-lo, sempre aceitando-o como uma propriedade verdadeira.

O Postulado das Paralelas diz que:

Dado um segmento de reta que cruze duas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar (naquele lado do segmento de reta).

Na tentativa de provar o Postulado das Paralelas, muitos matemáticos cometiam o mesmo erro: eles assumiam uma forma alternativa do postulado e deduziam a forma original a partir da forma alternativa, ou seja, caíam em um raciocínio circular. A primeira tentativa de demonstração de que se tem conhecimento é devida ao matemático alexandrino Cláudio Ptolomeu (90 - 168). Por volta de 1663, o matemático John Wallis (1616 - 1703) tentou substituir o Postulado das Paralelas pelo seguinte postulado: “*Dado qualquer lado de qualquer triângulo, esse triângulo pode ser aumentado ou diminuído, de modo que o lado escolhido tenha qualquer tamanho que você queira, mas mantendo os ângulos do triângulo inalterados*”. Com este postulado, Wallis

demonstrou o Postulado das Paralelas, mas no meio matemático o resultado não foi aceito, uma vez que novamente o que ocorreu foi a troca de um postulado por outro. Apesar disso, o raciocínio de Wallis, levou a uma conclusão interessante pois tal postulado afirma que se existe um espaço no qual o Postulado das Paralelas não vale, então não existem triângulos semelhantes nesse espaço.



John Wallis
Fonte: Wikipédia

No início do século XVIII, o padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667 - 1733), tentou provar o quinto postulado de Euclides usando o método de demonstração conhecido como Método de Redução ao Absurdo. Foi a primeira vez, que se tem registro, que esse método foi utilizado na tentativa de provar o Postulado das Paralelas. O método consiste em assumir como hipótese adicional que a proposição a ser demonstrada é falsa, e a partir dessa suposição chegar a uma contradição. Assim, Saccheri assumiu ser falso o Postulado das Paralelas. Porém, com essa suposição, Saccheri não chegou a contradição alguma. E, de fato, não teria como chegar a um absurdo porque o que ele fez foi se aproximar de uma geometria não euclidiana, assunto este que será tratado mais adiante. Trabalho semelhante ao de Saccheri foi feito pelo matemático Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777). Lambert conseguiu progredir mais na dedução de novas proposições do que Saccheri. Apesar de não terem chegado a um resultado conclusivo sobre o quinto postulado

de Euclides, esses matemáticos contribuíram muito com a Matemática, uma vez que abandonavam preconceitos baseados em noções preconcebidas sobre a geometria euclidiana, convicções sobre a hipótese de Euclides baseadas mais em observações experimentais do que em deduções rigorosas.



Johann Heinrich Lambert
Fonte: Wikipédia

Após séculos de tentativas frustradas de demonstrar o Postulado das Paralelas, um garoto de 12 anos de idade chamado Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) teve um olhar diferente sobre o problema. Gauss questionou se realmente o quinto postulado de Euclides era válido, e aos 15 anos ele já concebia a ideia de existir uma geometria logicamente consistente, na qual o Postulado das Paralelas não valeria.



Carl Friedrich Gauss
Fonte: Wikipédia

De 1813 a 1824, Gauss elaborou uma completa estrutura geométrica, em um espaço não euclidiano, ou seja,

¹Para informações sobre Euclides e *Os Elementos* veja a Edição 17 do Boletim Lavrense de Matemática.

um espaço não regido pelos cinco postulados de Euclides. Atualmente essa estrutura é conhecida como Geometria Hiperbólica. Ao invés de publicar seus resultados, Gauss preferiu compartilhar suas ideias com algumas pessoas nas quais ele confiava. Por volta de 1823, Johann Bolyai (1802 - 1860), filho de um amigo de Gauss, e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856), aluno de um amigo de Gauss, divulgaram, de forma independente, a descoberta de um espaço não euclidiano.



Johann Bolyai
Fonte: Wikipédia

Ambos os amigos de Gauss faziam parte do seletivo grupo com o qual Gauss discutia suas ideias. Segundo Leonard Mlodinow, em seu livro *A Janela de Euclides*, “a maioria dos historiadores de hoje acredita que foi mais o espírito do que os detalhes específicos da obra de Gauss que foi passado adiante, e que Bolyai e Lobachevsky não sabiam dos esforços um do outro, pelo menos naquele tempo.”

Após 14 anos Gauss tomou conhecimento dos trabalhos publicados por Bolyai e Lobachevsky. Mas Gauss preferiu não reivindicar ser o predecessor na descoberta do espaço não euclidiano. Em vez disso parabenizou Bolyai e Lobachevsky, os quais nunca mais publicaram trabalhos relevantes em Matemática.

Após a morte de Gauss, especialistas estudaram suas anotações e descobriram seus avanços na geometria não euclidiana. Os trabalhos de Bolyai e Lobachevsky tornaram-se referência entre os que trabalham com as novas geometrias.

Em 1868, o matemático italiano Eugênio Beltrami (1835 - 1900) demonstrou que se a geometria euclidiana forma uma estrutura matemática consistente, então o mesmo deve ocorrer com as geometrias não euclidianas descobertas. Beltrami foi o primeiro matemático a descobrir uma

maneira simples de visualizar o espaço hiperbólico.



Eugênio Beltrami
Fonte: Wikipédia

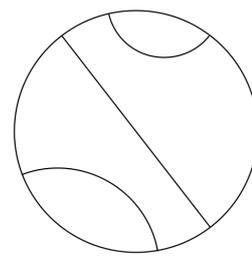
O espaço hiperbólico é o espaço que resulta ao substituir o Postulado das Paralelas pela afirmação de que, para qualquer reta, existem muitas retas paralelas a ela passando por qualquer ponto externo dado. Como consequência dessa suposição, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180° , e triângulos semelhantes não existem.

Nos anos de 1880, o matemático Henri Poincaré (1854 - 1912) descobriu uma maneira bem mais simples do que a utilizada por Beltrami, para descrever o espaço hiperbólico.



Henri Poincaré
Fonte: Wikipédia

Poincaré substituiu o plano infinito por um disco finito, e as retas do espaço euclidiano por arcos de círculos que alcançam a borda do disco formando ângulos retos.



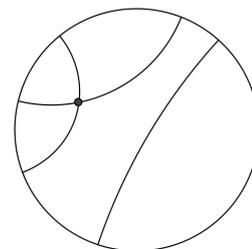
Retas de Poincaré

Ele definiu o ângulo entre duas retas de Poincaré como o ângulo entre suas linhas tangentes no seu ponto de interseção. A distância no modelo de Poincaré foi definida considerando que o espaço se comprime à medida que se aproxima da borda do disco, o que transformou uma área a princípio finita, numa área infinita².

Todas essas mudanças conceituais, geradas a partir da substituição do quinto postulado de Euclides pelo postulado

Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.

acarretaram em características peculiares na nova geometria. Por exemplo, na Geometria Hiperbólica, não existem retângulos.



Retas paralelas

Após a descoberta do espaço hiperbólico, outra mudança no Postulado das Paralelas foi feita, dando origem à geometria elíptica, que será tema da próxima edição.

Referências:

A janela de Euclides. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço, Leonard Mlodinow. Tradução de Enézio de Almeida. Geração Editorial. 5ª edição, 2010.

Geometria Hiperbólica, João Lucas Marques Barbosa. 20º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1995.



²Algumas aplicações da área infinita podem ser vistas na seção Curiosidades.

Nikolai Lobachevsky

Nikolai Ivanovich Lobachevsky nasceu em 1^o de dezembro de 1792 na cidade de Níjni Novgorod, situada às margens dos rios Volga e Oka, na Rússia. Seu pai, Ivan Maksimovich Lobachevsky, trabalhava como escriturário em um escritório de topografia e sua mãe, Praskovia Alexandrovna Lobachevskaya, teve três filhos. Quando Lobachevsky tinha sete anos, seu pai faleceu e sua mãe se mudou com ele e os irmãos para a cidade de Kazan, no oeste da Rússia. Os meninos começaram a frequentar o ginásio Kazan com o auxílio de bolsas de estudo do governo.

Neste ginásio, Lobachevsky fez um curso complexo de Matemática e de Física. Em 1807, aos 14 anos, iniciou seus estudos superiores na Universidade de Kazan. Lobachevsky concluiu o mestrado em Física e Matemática em 1811. Em 1816, foi nomeado professor extraordinário e, em 1822, professor titular da Universidade de Kazan.

Como professor, Lobachevsky ensinou várias ciências, como Física, Astronomia e Matemática. Nesta última, trabalhou particularmente com a álgebra, nas aproximações numéricas das raízes das equações algébricas. Mas ganhou fama mesmo por publicar uma descrição de uma geometria não euclidiana, a Geometria Hiperbólica.

Em 1827, foi nomeado reitor do Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kazan. Esta prosperou no período em que Lobachevsky foi reitor, devido à sua influência. Neste período, houve várias construções: uma biblioteca, um observatório astronômico, novas instalações médicas e laboratórios de

física, química e anatomia. Ele pressionou fortemente por níveis mais altos de pesquisa científica e encorajou também a pesquisa nas artes. Houve um aumento acentuado no número de alunos e Lobachevsky se esforçou muito para melhorar a educação não apenas na universidade, mas também nas escolas locais.



Universidade de Kazan

Lobachevsky ocupou o cargo de reitor durante 19 anos. Neste período, dois desastres atingiram a universidade, uma epidemia de cólera em 1830 e um grande incêndio em 1842, responsável pela destruição de quase metade da cidade de Kazan, inclusive de alguns dos grandes edifícios da universidade. Devido às medidas firmes e rápidas tomadas por ele, os danos à universidade foram reduzidos. Lobachevsky recebeu uma mensagem de agradecimento do Imperador, reconhecendo sua cooperação durante a epidemia de cólera.

Além de reitor, Lobachevsky também foi chefe do observatório e, durante um tempo, influenciou fortemente a política dentro da universidade. No ano em que deixou a reitoria da Universidade de Kazan, Lobachevsky discursou sobre educação e, segundo Boris Lukich Laptev (1905-1989) ele delineou o ideal do desenvolvimento harmonioso da personalidade, enfatizou o significado social da

criação e educação, e discutiu o papel das ciências e o dever do cientista para com seu país e seu povo.

Em 1832, Lobachevsky se casou com Lady Varvara Alexejevna Moiseeva, que pertencia a uma família rica. Na época de seu casamento, sua esposa era uma jovem, enquanto Lobachevsky já tinha quarenta anos. Eles tiveram sete filhos.

Depois que Lobachevsky foi dispensado pela Universidade de Kazan, em 1846, sua saúde piorou rapidamente. Além disso, seu filho mais velho morreu e Lobachevsky foi duramente atingido por essa perda. Sua deficiência visual agravou-se, levando-o a falecer, completamente cego, em 24 de fevereiro de 1856, aos 63 anos.

Suas realizações matemáticas não foram reconhecidas em vida e ele morreu sem ter nenhuma noção da importância que seu trabalho alcançaria. Sua principal obra, *Geometriya*, concluída em 1823, não foi publicada em sua forma original até 1909. Em 11 de fevereiro de 1826, na sessão do Departamento de Ciências Físico-Matemáticas da Universidade de Kazan, Lobachevsky solicitou que seu trabalho sobre uma nova geometria fosse ouvido e seu artigo *Um esboço conciso dos fundamentos da geometria* foi enviado aos revisores. Este artigo não foi publicado, porém as ideias contidas nele foram incorporadas em sua primeira publicação sobre Geometria Hiperbólica no Kazan Messenger, em 1829.

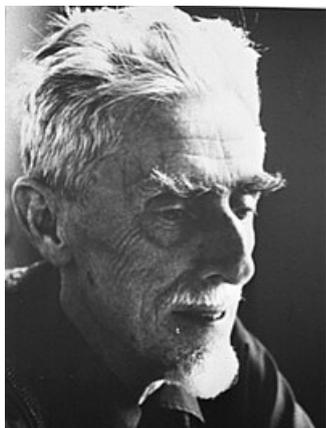
Referência:

www.mathshistory.st-andrews.ac.uk



Escher: unindo a Arte e a Matemática

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês, conhecido por desafiar as fronteiras entre a arte e a Matemática. Escher especializou-se no desenho de espaços impossíveis e na criação de ilusões de óptica através do uso da perspectiva, da divisão regular do plano, da Geometria Hiperbólica e da topologia. Embora não tenha recebido uma formação matemática substancial, Escher demonstrou um interesse profundo pela Matemática e as suas obras refletem uma compreensão notável de conceitos matemáticos complexos, os quais ele transformou em expressões artísticas acessíveis e fascinantes.



Escher (1971)
Fonte: Wikipédia

Na série *Limites Circulares*, composta de quatro obras (Limite Circular I, II, III e IV), criadas em um período de três anos, Escher através da multiplicação infinita de figuras dentro de um círculo quis representar a eternidade do universo, uma vez que sua borda nunca é alcançada. Nessas obras, as distâncias funcionam de tal forma que, todas as figuras são con-

gruentes, mas elas parecem ficar menores na borda do disco. Além disso, os triângulos hiperbólicos vão se repetindo infinitamente dentro dos limites de um círculo. Exatamente o que o gravurista estava procurando, a fim de capturar o infinito em um espaço finito.

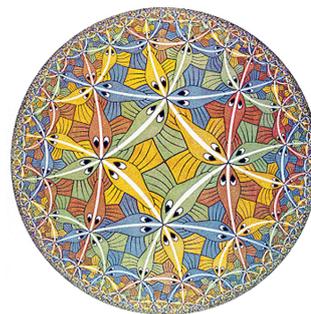
A ilustração o *Limite Circular I* foi finalizada em 1958, entretanto, o resultado da xilogravura não agradou muito o próprio artista. Usando régua e o compasso, em março de 1959, ele completou a segunda xilogravura da sua série, o *Limite Circular II*. Em dezembro de 1959, Escher apresenta a terceira ilustração da série, o *Limite Circular III*. E para finalizar essa série, em 1960 é lançado o *Limite Circular IV*.



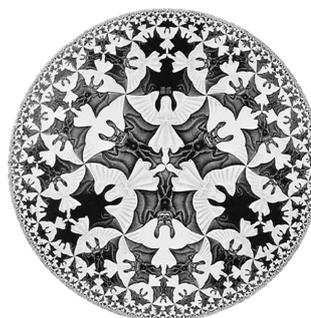
Limite Circular I
Fonte: Wikipédia



Limite Circular II
Fonte: Wikipédia



Limite Circular III
Fonte: Wikipédia



Limite Circular IV
Fonte: Wikipédia

Seu encanto por figuras geométricas o permitiu desenvolver outras tantas obras incríveis, inovadoras para a época em que foram produzidas (primeira metade do século XX).

Referência:

Santos, A. F. M.. *Introdução à construção da série limites circulares de Escher através da análise da ilustração de Coxeter*. Dissertação de mestrado. Profmat. 2013.



Aprofundando os conhecimentos em geometria

Para os amantes da Matemática, que desejam aprofundar um pouco mais nos resultados da Geometria Hiperbólica, sugerimos o livro *Geometria Hiperbólica* de João Lucas Marques Barbosa. O livro escrito para servir de livro texto para uma disciplina de Geometria Hiperbólica para alunos dos cursos de Matemática, é extremamente interessante porque de forma

bastante coesa apresenta a história do desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, mas não deixa a desejar no que se refere ao conteúdo propriamente dito. Este é um dos livros do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, que ocorreu em julho de 1995.

João Lucas é professor emérito do Departamento de Matemática,

da Universidade Federal do Ceará, e também autor do livro *Geometria Euclidiana Plana*, muito utilizado por estudantes de graduação em licenciatura ou bacharelado em Matemática. A versão em pdf do livro *Geometria Hiperbólica* pode ser obtida em www.impa.br/publicacoes/coloquios/.



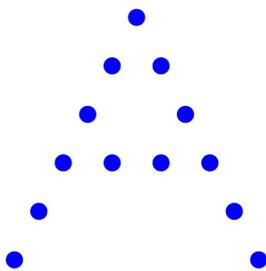
DESAFIOS

Desafios da Edição

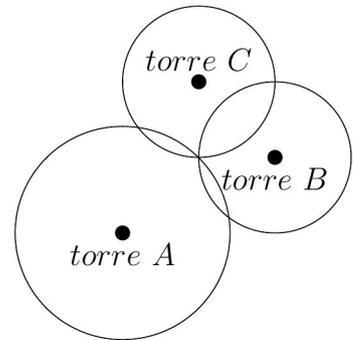
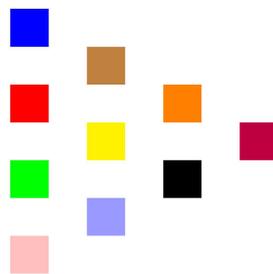
Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Dois triângulos são semelhantes e seus perímetros medem 60 cm e 48 cm. Sabendo que os lados de um deles medem 25 cm, 20 cm e 15 cm, encontre as medidas dos lados do outro triângulo.

2) Existem N triângulos distintos com os vértices nos pontos da figura. Qual é o valor de N?



3) Uma seta é formada por 10 quadrados coloridos e aponta para a direita, conforme a figura abaixo. Mudando a posição de apenas 3 quadrados, faça com que a seta aponte para a esquerda.



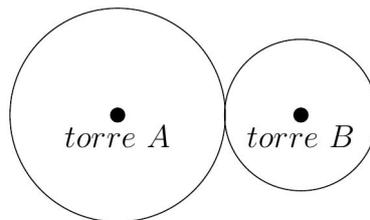
Caso 2

Referência:

www.somatematica.com.br

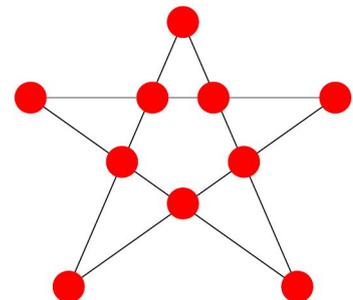
Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 18ª edição)

Desafio 1: Duas torres se a pessoa estiver no segmento de reta que liga as duas torres. Caso contrário, são necessárias pelo menos três torres. A pessoa está na interseção dos círculos.



Caso 1

Desafio 2: Os soldados são dispostos como mostrado na figura abaixo, em forma de estrela. Dessa maneira existirão 5 filas, e cada fila possuirá 4 soldados.



Evento

IX Workshop de Matemática e Matemática Aplicada

No período de 4 a 6 de dezembro, ocorrerá o IX Workshop de Matemática e Matemática Aplicada (IX WMMA), na cidade de Ouro Preto em Minas Gerais. O WMMA surgiu da parceria entre a Universidade Federal de Lavras (UFLA) e a Universidade de São João Del Rei, campus Alto Paraopeba (UFSJ-CAP), mas atualmente conta também com a participação do campus sede da UFSJ, os campi sede e Varginha da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL), e a sede da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).



IX Workshop de Matemática e Matemática Aplicada
- Dias 04, 05 e 06 de dezembro de 2024
- Departamento de Matemática - ICER - UFOP
- Ouro Preto - MG

O evento

O Workshop de Matemática e Matemática Aplicada (WMMA) tem como objetivo divulgar resultados recentes de pesquisa em diversas áreas da Matemática e Matemática Aplicada, além de promover a interação entre docentes e discentes de diferentes regiões do país com a pesquisa científica de alto nível e com pesquisadores(as) renomados(as). Em 2024, o WMMA chega à sua 9ª edição, sendo realizado pela primeira vez na cidade histórica de Ouro Preto.



Inscrição
Período de inscrições: **até o dia 04/12/2024**

Submissão de Trabalhos
- Submissão de trabalhos: **até o dia 31/10/2024**
- Os resumos devem ter até 2 páginas.
- Cada comunicação oral terá duração máxima de 20 minutos e 10 minutos para interação.

Site



<https://dmm.ufla.br/wmma/ix/>
Mais informações em: wmma.dmm@ufla.br

Plenárias

- Prof. Dr. Mário Jorge D Carneiro (UFMG-MG)
- Profa. Dra. Viviane R T da Silva (UFSJ-CAP)
- Prof. Dr. José Antônio G Miranda (UFMG-MG)
- Prof. Dr. Ricardo H C Takahashi (UFMG-MG)

Minicursos

- Soluções Numéricas para Equações Diferenciais Parciais: Método das Diferenças finitas e métodos baseados em redes neurais
- Uma introdução ao GAP
- Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Realização



Apoio



O objetivo do evento é promover momentos de discussão sobre Matemática, propiciando o fortalecimento de grupos de pesquisa já existentes, e a criação de novos grupos.

Mais informações sobre o evento podem ser obtidas em

www.dmm.ufla.br/wmma/ix/.

Siga também o instagram do evento @workshop.ufla.ufsj.unifal.

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.
