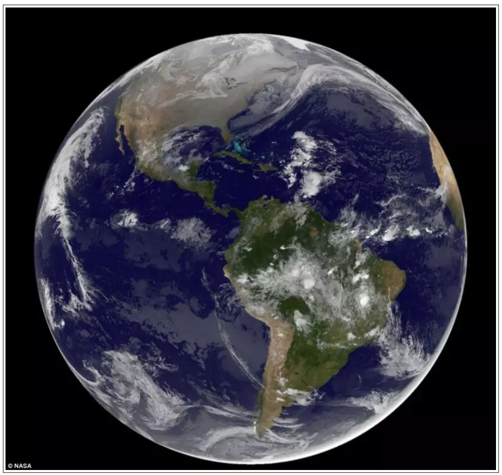
Boletim Lavrense de Matemática

Edição 20, 14 de março de 2025



A geometria do globo

O Postulado das Paralelas de Euclides rendeu muitos trabalhos em Matemática. Entre eles o nascimento da geometria hiperbólica de Bolyai e Lobachevsky, conforme vimos na edição anterior desse boletim, mas também uma nova geometria não euclidiana, diferente da hiperbólica, surgiu a partir da negação do quinto postulado de Euclides. Essa geometria, conhecida como Geometria Elíptica, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Matemática, e de outras ciências. E embora não tenha surgido a partir da necessidade de resolver um problema real, ao longo dos anos ela tem se mostrado aplicável em outras áreas do conhecimento.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

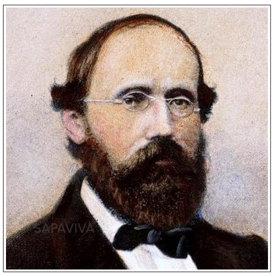
Navegação Marítima e Aviação

Na seção Curiosidades dessa edição veremos uma importante aplicação prática da Geometria Elíptica na navegação marítima e na aviação. Veremos que ao traçar as rotas mais curtas para economizar tempo e combustível, devido ao formato esférico da Terra, eles não seguem uma linha reta, mas sim uma curva chamada geodésica.

BIOGRAFIA

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Vamos conhecer a história do matemático alemão Georg Riemann, responsável por várias teorias na Matemática, com destaque para a Geometria Elíptica, também conhecida como geometria de Riemann ou ainda geometria riemanniana. Riemann foi professor titular da Universidade de Göttingen e teve contato com vários estudiosos famosos de sua época, o que rendeu resultados importantíssimos para a Matemática.



Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

ESPECIAL

Geometria Elíptica

Em 10 de junho de 1854, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) realizou a última etapa para conquistar a posição de conferencista em Göttingen. Essa última etapa consistia de uma palestra onde Riemann explicou como uma esfera poderia ser interpretada como um espaço bidimensional, o que daria origem a uma nova geometria não euclidiana. Os conceitos de plano, reta e ponto da geometria euclidiana, foram substituídos nessa nova abordagem por superfície esférica, círculo máximo e posição considerada a partir de pares de números ou coordenadas, respectivamente.

Georg Riemann
Fonte: Wikipédia

O modelo proposto por Riemann, assim como qualquer outra teoria proposta, precisava ser baseado em postulados consistentes. No entanto, quando comparado à geometria euclidiana e à geometria hiperbólica[1] o modelo de Riemann apresentava alguns problemas. Por exemplo,

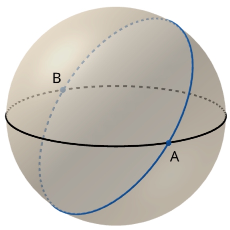
1. Não existem retas paralelas.
2. Retas não podem ser prolongadas infinitamente.
3. Retas distintas se cruzam em mais de um ponto.

Para entender essas divergências em relação às outras geometrias, é importante observar que elas surgem a partir da substituição do Postulado das Paralelas de Euclides pela afirmação de que *não existem retas paralelas a uma reta dada.* A partir dessa afirmação Riemann deu origem à geometria batizada em 1871, pelo também matemático alemão Felix Christian Klein (1849 - 1925), de Geometria Elíptica.

Felix Klein
Fonte: Wikipédia

Se dada uma reta r não existem retas paralelas a r, isso significa que quaisquer duas retas têm um ponto em comum, o que não faz sentido no espaço euclidiano. Portanto, o postulado proposto por Riemann precisava de um novo espaço, um espaço não euclidiano, hoje conhecido como espaço elíptico.

Desse modo, para compreender como duas retas sempre se cruzam, considere uma superfície esférica, e nessa superfície os objetos que desempenham o papel de retas na geometria euclidiana serão os círculos máximos, ou seja, os círculos que tem como centro o centro da esfera.

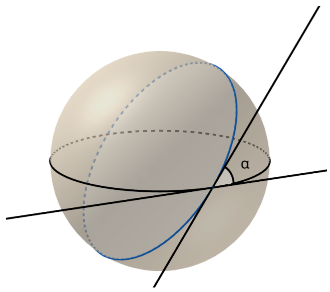


Círculos Máximos tem dois pontos em comum

Como dois círculos máximos sempre se interceptam em dois pontos, na Geometria Elíptica considera-se os dois pontos de intersecção como pontos idênticos. Na figura anterior, por exemplo, considera-se A e B idênticos.

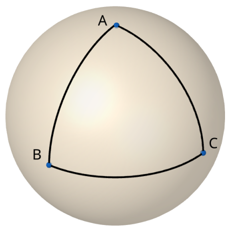
Embora o comprimento de uma reta na Geometria Elíptica seja finito, visto que é o comprimento da circunferência, um círculo máximo não está contido em nenhuma curva da superfície, e portanto é considerado ilimitado. Por exemplo, um círculo máximo não está contido em um triângulo ou em um quadrilátero da superfície esférica, por isso não é limitado.

Na superfície esférica, ângulos são obtidos a partir da interseção de dois círculos máximos, e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes ao círculos máximos no ponto de interseção.



Ângulo formado por duas círculos máximos

No espaço elíptico, um triângulo é a figura obtida por arcos de círculos máximos que unem três pontos da esfera. A figura abaixo ilustra o triângulo ABC, construído a partir de três pontos distintos A, B e C, sobre a esfera e não pertencentes a um mesmo círculo máximo.



Triângulo formado no espaço Elíptico

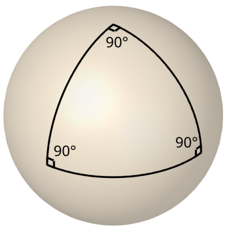
Um fato curioso na Geometria Elíptica é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que

[1]Para mais informações sobre a geometria hiperbólica veja a Edição 19 do Boletim Lavrense de Matemática.

180^o. Pode-se mostrar que dado um triângulo esférico ABC, a soma dos seus ângulos internos, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, satisfaz

$$180^o < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^o.$$

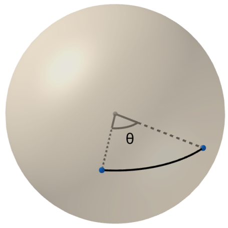
Triângulos esféricos podem ser classificados com relação à quantidade de ângulos retos que possuem. Se o triângulo possui um ângulo reto, ele é chamado triângulo retângulo, se possui dois ângulos retos é chamado birretângulo, e caso possua três ângulos retos é chamado trirretângulo.



Triângulo trirretângulo

Como consequência das propriedades de triângulos esféricos, a soma das medidas dos ângulos de qualquer quadrilátero é sempre maior do que 360^o.

E, a distância entre dois pontos A e B é dada pela medida do menor arco do círculo máximo que contém esses pontos, assim a medida dos lados de um triângulo esférico são os ângulos subentendidos por eles no centro da esfera.



Medida entre dois pontos

A soma dos lados de um triângulo esférico, os quais são denotados por a, b e c, satisfazem

$$180^o < a + b + c < 360^o.$$

Com relação às medidas dos lados, um triângulo pode ser classificado como retilátero, caso tenha um lado medindo 90^o, birretilátero ou trirretilátero, caso tenha dois ou três lados medindo 90^o, respectivamente.

Em 1871, Klein exibiu correções para as contradições da Geometria Elíptica apresentada por Riemann. As contribuições de Klein foram além da Geometria Elíptica, contribuindo também no entendimento da geometria euclidiana.

Sem sombra de dúvida, a apresentação de Riemann, em 1854, revolucionou a Matemática, e para se ter uma ideia da grandiosidade do seu trabalho, é importante saber que sua teoria abriu caminho para que anos mais tarde o físico alemão Albert Einstein (1879 - 1955) pudesse apresentar ao mundo a teoria da relatividade.

Referências:

A janela de Euclides. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço, Leonard Mlodinow. Tradução de Enézio de Almeida. Geração Editorial. 5ª edição, 2010.

Convite às Geometrias Não-Euclidianas, Lázaro Coutinho. Editora Interciência, 2001.

■

BIOGRAFIA

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826, em Breselenz, na Alemanha. Foi um matemático alemão reconhecido por suas contribuições na geometria, teoria de funções, análise complexa e teoria dos números. Suas ideias forneceram a base matemática para a geometria quadridimensional do espaço-tempo na teoria da relatividade geral de Albert Einstein (1879 - 1955).

O pai de Riemann, Friedrich Bernhard Riemann, era um pastor luterano. Friedrich Riemann se casou com Charlotte Ebell e eles tiveram seis filhos, dois meninos e quatro meninas. Riemann foi o segundo dos seis filhos. Seu pai foi o responsável pela sua educação até os 10 anos de idade. Em 1840, Riemann entrou diretamente na terceira classe do *Lyceum*, na cidade de Hannover, na Alemanha. Morou um tempo com sua avó, mas ela faleceu em 1842 e Riemann mudou-se para o *Johanneum Gymnasium*, em Lüneburg. Neste local, um professor reconheceu suas habilidades matemáticas e lhe emprestou alguns livros avançados para ler, incluindo a “Teoria dos Números” de Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), publicado em 1830. Riemann leu o livro em uma semana e então afirmou que o sabia de cor.

Em 1846, Riemann entrou para a Universidade de Göttingen, na Alemanha, onde iniciou um curso de Teologia, encorajado por seu pai. No entanto, logo desistiu e iniciou o curso de Filosofia, no qual dedicou-se ao estudo da Matemática.

Universidade de Göttingen
Fonte: www.britannica.com

Em 1847, Riemann mudou-se de Göttingen para a Universidade Humboldt de Berlim, onde estudou com Rudolf Steiner (1861 - 1925), Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1851), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) e Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 - 1852). Este foi um momento importante para Riemann. Ele aprendeu muito com Eisenstein e discutiu o uso de variáveis complexas na teoria da função elíptica. No entanto, Dirichlet foi sua principal influência nesta época, visto que ambos tinham pensamentos muito semelhantes.

Na Universidade Humboldt de Berlim, Riemann elaborou sua teoria geral sobre variáveis complexas que formaram a base de alguns de seus trabalhos mais importantes. Em 1849, ele retornou a Universidade de Göttingen e sua tese de doutorado, supervisionada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi submetida em 1851. Em sua tese, Riemann introduziu uma maneira de generalizar o estudo de equações polinomiais de duas variáveis reais para o caso de duas variáveis complexas. No caso real, uma equação polinomial define uma curva no plano. Como uma variável complexa $z = x + iy$ (onde i é a raiz quadrada de -1), pode ser considerada como um par de variáveis reais (x, y), uma equação envolvendo duas variáveis complexas define uma superfície real, agora conhecida como superfície de Riemann, espalhada pelo plano. Mais tarde, em 1857, Riemann escreveu um artigo e mostrou como tais superfícies podem ser classificadas por um número, chamado gênero, que é determinado pelo número máximo de curvas fechadas que podem ser desenhadas na superfície sem dividi-la em partes separadas.

Em 1854, Riemann apresentou suas ideias sobre geometria para a qualificação oficial de pós-doutorado em Göttingen. Gauss foi um dos examinadores e ficou muito impressionado. Riemann argumentou que os ingredientes fundamentais para a geometria são um espaço de pontos, chamado hoje de variedade, e uma maneira de medir distâncias ao longo de curvas no espaço. Ele explicou que o espaço não precisa ser um espaço euclidiano comum e que poderia ter qualquer dimensão, inclusive dimensão infinita. Tal geometria hoje é conhecida como Geometria Elíptica ou Geometria de Riemann.

Riemann também estudou como as funções se comparam com sua representação trigonométrica ou com séries de Fourier, o que desenvolveu os estudos sobre funções descontínuas. Ele também foi um dos primeiros matemáticos a estudar equações diferenciais envolvendo variáveis complexas. Apresentou uma generalização do conceito de integrabilidade, conhecido como integral de Riemann, o que abriu caminho para outros resultados importantes.

Após vários empregos mal pagos, Riemann iniciou sua carreira acadêmica tornando- se professor titular na Universidade de Göttingen, em 1859. Embora haja tantas teorias atribuídas a Riemann, sua influência foi menor do que poderia ter sido. Göttingen era uma universidade pequena e, infelizmente, vários de seus melhores alunos morreram jovens. Seus poucos artigos também são difíceis de ler, mas seu trabalho conquistou o respeito de matemáticos importantes, incluindo seu amigo Richard Dedekind (1831 - 1916), Karl Weierstrass (1815 - 1897) e David Hilbert (1862 - 1943). Este último, considerou Göttingen como um centro mundial de pesquisa em Matemática, destacando Gauss e Riemann como suas figuras icônicas.

Em 1862, logo após seu casamento com Elise Koch, Riemann adoeceu gravemente com tuberculose. Viagens repetidas à Itália em busca de tratamento não conseguiram conter o avanço da doença e ele morreu em 20 de julho de 1866, em Selasca, Itália. A doença impediu Riemann de publicar todo o seu trabalho. Um dos mais importantes, *The edition of Bernhard Riemann's collected works: Then and now*, editado por Dedekind e Heinrich Weber (1842 - 1913), foi publicado postumamente em 1876.

Referências:

Bernhard Riemann —— Britannica

Bernhard Riemann (1826 - 1866) - Biography - MacTutor History of Mathematics

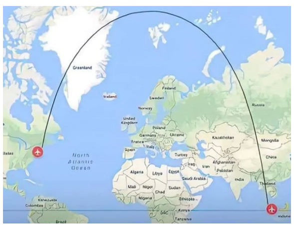
■

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Trajetória curva na navegação marítima e aviação

Existem diversas aplicações das geometrias não euclidianas, em especial a Geometria Elíptica, na Matemática, na Física, na Astronomia, na Cartografia e na navegação. Uma importante aplicação são os conceitos geográficos como: paralelos, meridianos, latitude, longitude e fusos horários. Além disso, a Geometria Elíptica apresenta ferramentas para a resolução de problemas que envolvem rotas de embarcações e aviões sobre a superfície terrestre, o que permite calcular a distância entre cidades no globo terrestre.

Sabemos que a Terra não é uma esfera perfeita, pois há um pequeno achatamento nos polos. Porém, essa deformidade não ocasiona distorções nos cálculos que são utilizados para determinação de rotas.



Exemplo de rota entre Nova York e Singapura
Fonte: deolhonaengenharia.com

Devido a esse formato do planeta Terra é necessário o estudo da Geometria Elíptica para determinar as rotas (com menor distância) tanto dos aviões quanto das navegações, uma vez que se viaja sobre um arco de circunferência. Portanto, as trajetórias realizadas pelos aviões e pelos navios em suas viagens não seguem uma linha reta, mas sim uma rota curva devido a curvatura do planeta. Pois ao considerar o formato da Terra, a menor distância entre dois pontos se torna uma curva chamada geodésica.

Referências:
deolhonaengenharia.com

■

SUGESTÃO DE LEITURA

Aprofundando os conhecimentos em geometria

Até o início do século XIX a única e verdadeira forma de entender e interpretar o espaço onde vivemos era com a Geometria Euclidiana. Não se imaginava que fosse possível uma visão diferente do espaço.

Fonte: Amazon

A descoberta das geometrias não euclidianas revolucionou a forma como vemos o espaço onde vivemos e chocou a comunidade científica.

No livro Convite às Geometrias Não-Euclidianas o leitor é apresentado a uma exposição clara e estimulante sobre duas dessas clássicas geometrias.

■

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Qual pessoa anda mais, a que percorre uma milha marítima estando bem próxima de um dos pólos, ou a que percorre a milha nas proximidades do Equador?

2) Duas aeronaves saem juntas do ponto $\phi = 20^o00'S$ e $\lambda = 44^o00'W$ em Belo Horizonte para a posição $\phi = 20^o00'S$ e $\lambda = 136^o00'E$ em algum lugar da Austrália. Uma viaja ao longo do meridiano via Pólo Sul, a outra no rumo leste, sempre sobre o paralelo de $20^o00'S$. Qual é o mais curto dos dois caminhos e de quantas milhas marítimas?

Referência:

Convite às geometrias não-euclidianas, Lázaro Coutinho, 2ª edição, Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2001.

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 19ª edição)

Desafio 1: Começamos considerando que as dimensões do triângulo que queremos determinar devem satisfazer

$$x + y + z = 48$$

Como os triângulos são equivalentes temos que

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = k$$

onde k é uma constantes. Assim, temos que $60k = 48$. Consclúımos que $x = 20$, $y = 16$ e $z = 12$.

Desafio 2: Podemos notar que a figura é parecida com um "A". Temos 13 pontos no total. Portanto o total de combinações entre eles é: $C_{13,3} = 286$. Porém, queremos apenas as que formam triângulos, então temos que subtrair todas as combinações que não formam triângulos, ou seja, as combinações em que os pontos são colineares. Temos 3 situações onde isso acontece: Na "perna esquerda" do "A", temos 6 pontos colineares que não podem ser combinados entre si, pois não formam triângulos. Na "perna direita" do "A", temos a mesma situação. E no meio temos 4 pontos colineares que também não podem ser combinados entre si. Temos que subtrair essa 3 situações do total. Então o número de triângulos que podem ser formados é:

$$C_{13,3} - C_{6,3} - C_{6,3} - C_{4,3} = 242.$$

Portanto podem ser formados 242 triângulos distintos!

Desafio 3: Considere as quatro colunas da seta. O primeiro e o quarto quadrado da primeira coluna (vermelho e azul claro) devem ser movidos para a primeira e quarta linhas da terceira coluna. Na quarta colula da esquerda para a direita temos apenas um quadrado rosa. Este quadrado deve ser colocado como único quadrado à esquerda da primeira coluna.

■

Evento

3° Dia Nacional da Matemática

O objetivo do evento é comemorar o Dia Nacional da Matemática (06/05) que foi instituído no Brasil em 2013. Neste ano, o evento será realizado no dia 06 de maio na Universidade Federal de Lavras a partir das 17h. Serão realizadas atividades e palestras com o intuito de promover uma integração e socialização entre os professores das áreas de Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada e os discentes da Graduação do Curso de Licenciatura em Matemática da UFLA.

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.