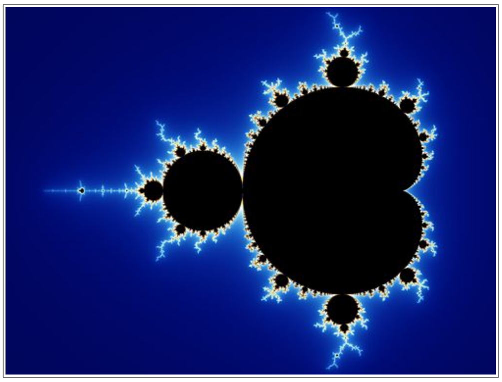
Boletim Lavrense de Matemática

Edição 21, 6 de maio de 2025



Fractais: de monstros à impressão digital de Deus

O ano de 1975 é importante para a história da Geometria Fractal, pois foi nesse ano que Mandelbrot criou o termo fractal. Antes da definição apresentada de fractais, alguns objetos matemáticos já possuíam tais características, dentre eles o Conjunto de Cantor, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski. Estes objetos eram conhecidos como "demônios"e acreditava-se que não tinham grande valor científico. Os fractais só se desenvolveram a partir de 1960 com a ajuda dos computadores. Há muitos fractais na natureza: flocos de neve, árvores, galáxias, ramificações dos vasos sanguíneos, nuvens, montanhas, o formato dos litorais, dentre muitos outros exemplos.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Fractais e Medicina

Na Seção Curiosidades desta edição veremos que a Geometria Fractal está presente em diversos órgãos do corpo humano e tem sido utilizada em estudos da Medicina para a compreensão de doenças e seus respectivos tratamentos.

BIOGRAFIA

Mandelbrot - o pai dos fractais

Na 21ª Edição do Boletim Lavrense de Matemática vamos conhecer um pouco sobre a vida de Benoît Mandelbrot, o matemático que cunhou o termo Fractal, e ver como sua trajetória de vida influenciou a sua forma de pensar e trabalhar com Matemática.

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

EDITORES
DMM/UFLA
Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Ricardo Edem Ferreira
Thais Presses Mendes

ESPECIAL

Geometria Fractal: de monstros à impressão digital de Deus

Muitas das formas encontradas na natureza não são conforme definidas na geometria clássica de Euclides, não são como por exemplo círculos, triângulos, esferas ou retângulos. Modelos matemáticos euclidianos às vezes se apresentam incompletos e, em determinadas situações, inadequados para reproduzir a geometria da natureza, sendo assim, nesta edição do Boletim Lavrense de Matemática conheceremos um pouco de mais uma geometria não euclidiana, a Geometria Fractal.

A Geometria Fractal é um ramo da Matemática que estuda as propriedades dos fractais. Um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala é alterada, mantendo a estrutura idêntica à original, podendo ser dividido em partes e cada uma delas é semelhante ao objeto original. O termo Fractal, que do latim significa quebrar, foi criado no ano de 1975 por Benoit Mandelbrot (1924-2010). O desenvolvimento da computação permitiu a criação e visualização de fractais complexos, mostrando a sua riqueza e beleza, que antes eram difíceis de apreciar. Mandelbrot foi um dos primeiros a utilizar computadores para gerar e explorar fractais. Ele passou grande parte da sua vida procurando uma base matemática para as formas irregulares do mundo real.

Os fractais são usados em diversas áreas, desde a modelagem de fenômenos naturais até a criação de arte e animações, são utilizados em campos da Medicina, da Geografia e da Economia. Padrões fractais são amplamente observados na natureza, como por exemplo, nas samambaias, cujas folhas remetem à samambaia inteira, conforme Figura 1, a folha da samambaia se parece com a samambaia inteira. O mesmo pode ser observado em outras plantas, como brócolis, couve-flor e abacaxi.

Figura 1: Exemplo de fractais na natureza, samambaia.
Fonte: *nnart.org*

Outro exemplo de fractal na natureza são os relâmpagos, conforme Figura 2. O padrão fractal é gerado quando a eletricidade passa pelo ar, que não conduz bem a eletricidade.

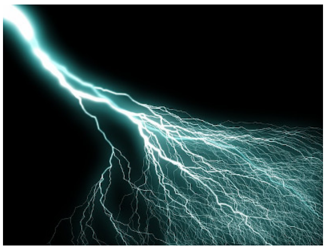


Figura 2: Exemplo de fractais na natureza, relâmpago.
Fonte: *nnart.org/history-of-fractals*

O formato de uma árvore também é um fractal, ela se ramifica em galhos cada vez menores, e neles nascem galhos que por sua vez tem seus próprios galhos e assim sucessivamente, assim à medida que a árvore cresce o formato fractal se repete. A Figura 3 nos mostra esse fato.

Figura 3: Exemplo de fractais na natureza, árvore.
Fonte: *bbc.com/portuguese*

Agora que já sabemos o que é fractal iremos conhecer a história da Geometria Fractal.

No século XVII, Gottfried Leibniz (1646-1716), contemplou a autossimilaridade recursiva. Ele acreditava que apenas uma linha reta era autossimilar, apesar dos estudos modernos não a considerarem um fractal. Após Leibniz o interesse por fractais diminuiu e os poucos que o estudaram os chamaram de "monstros matemáticos".

Em 18 de julho de 1872, Karl Weierstrass (1815-1897) descobriu uma função especial que leva seu nome. Esta função é contínua em todos os lugares, mas não diferenciável em nenhum lugar. Georg Cantor assistiu às palestras de Weierstrass e estudou subconjuntos da reta real que hoje chamamos de conjuntos de Cantor, que é um padrão fractal. Este pode ser o primeiro objeto fractal na história da Matemática. Sua construção é simples: dado um segmento, retiramos sua terça parte central. Aplicamos o mesmo processo aos dois segmentos resultantes, e repetimos o processo para todos os outros segmentos produzidos indefinidamente. A Figura 4 mostra os primeiros passos para a construção do conjunto de Cantor.

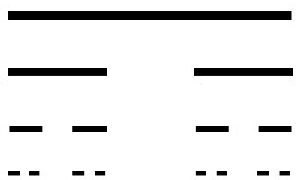


Figura 4: Primeiros passos da construção do conjunto de Cantor
Fonte: *epsilones.com*

No final do século XIX, Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925) descobriram os fractais auto-inversos. Fractais auto-inversos, são aqueles que, quando invertidos, permanecem idênticos ou muito semelhantes ao original. Um exemplo clássico é o Tapete de Sierpinski, conforme Figura 5.

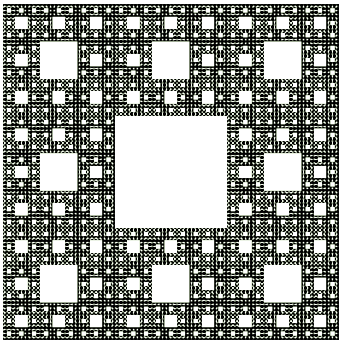


Figura 5: Tapete de Sierpinski.
Fonte: *legauss.blogspot.com*

Em 1904, Helge von Koch (1870-1924) sugeriu uma nova definição para fractais. Ele criou imagens desenhadas à mão de um padrão repetitivo idêntico que hoje conhecemos como o floco de neve de Koch, conforme Figura 6.

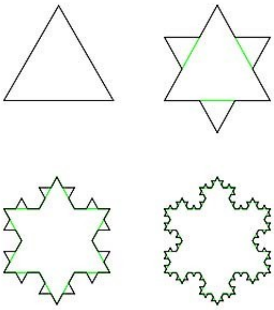


Figura 6: Primeiras quatro iterações do floco de neve de Koch.
Fonte: *matematica.seed.pr.gov.br*

O floco de neve de Koch é obtido através de infinitas adições de triângulos a um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e se aproxima do infinito.

E em 1915, Waclaw Sierpinski (1882-1969) criou o que hoje chamamos de Triângulo de Sierpinski, conforme Figura 7.

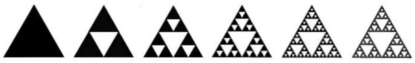


Figura 7: Primeiras seis iterações do triângulo de Sierpinski.
Fonte: *epsilones.com*

Gaston Julia (1893-1978) e Pierre Fatou (1878-1929) investigaram estruturas fractais no plano complexo, eles trabalharam, de forma independente e chegaram a resultados essencialmente idênticos. O desenho dos fractais eram limitados pelas tecnologias da época. Alguns fractais, como os de Cantor e Sierpinski, podem ser criados com desenhos, no entanto, alguns estudos fractais requerem o auxílio de computação gráfica. Apenas na segunda metade do século XX, quando aconteceu o desenvolvimento dos computadores, foi possível uma melhor visualização dos fractais. Mandelbrot além de criar o nome fractal, explorou a presença de estruturas fractais tanto no mundo natural, quanto nos sistemas artificiais. Outros matemáticos tiveram contribuições para os fractais antes dele, porém não possuíam o recurso computacional para investigar mais a fundo o assunto. Em 1979, Mandelbrot descobre e descreve matematicamente o conjunto de Mandelbrot, um exemplo de fractal muito conhecido nos dias de hoje, devido à sua beleza hipnotizante conforme apresentamos na Figura 8.

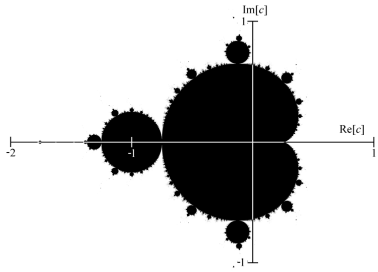


Figura 8: Conjunto de Mandelbrot.
Fonte: *Wikipedia*

A autossimilaridade era a base de um tipo completamente novo de geometria, a que Mandelbrot deu o nome de Geometria Fractal, mas que também costuma ser chamada de ”a impressão digital de Deus?.

Referências:

www.nnart.org/history-of-fractals

www.pt.wikipedia.org/wiki/Fractal

■

BIOGRAFIA

Benoît Mandelbrot

Em 20 de novembro de 1924 nascia em Varsóvia, capital da Polônia, Benoît Mandelbrot. Filho de uma médica e de um comerciante de roupas, Mandelbrot foi apresentado à Matemática por seus tios, em particular seu tio Szolem Mandelbrojt que era professor de Matemática no *Collège de France*.

Como aconteceu com muitos judeus, a família de Mandelbrot fugiu dos nazistas. Primeiro para Paris, em 1936, e depois para o sul da França.

Em Paris, Mandelbrot frequentou o *Liceu Rolin* até o início da Segunda Guerra Mundial, quando sua família se mudou novamente. Para sobreviver à guerra, Mandelbrot não frequentou a escola de modo regular, ele foi em grande parte autodidata.

Benoît Mandelbrot
Fonte: *Wikipedia*

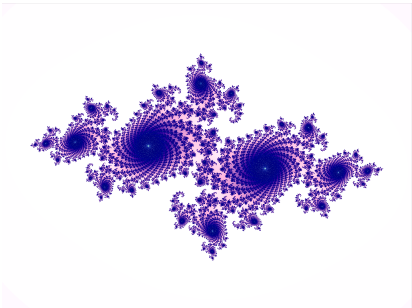
Em 1944, ele iniciou seus estudos na *École Polytechnique*, sob a orientação do matemático francês Paul Lévy (1886 - 1971). Em 1945, seu tio o apresentou o artigo do matemático francês Gaston Julia (1893 - 1978) de 1918, “Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles”, trabalho que não atraiu sua atenção naquele momento.

Obteve um mestrado em aeronáutica no Instituto de Tecnologia da Califórnia, retornou a Paris para o doutorado em matemática em 1952 e, em seguida, ingressou no Instituto de Estudos Avançados em Princeton, Nova Jersey, onde realizou pesquisas.

Mandelbrot retornou à França em 1955 e trabalhou no *Centre National de la Recherche Scientifique*.

Em 1958 ele partiu para os Estados Unidos permanentemente e começou sua jornada com a *International Business Machines Corporation* (IBM), local que lhe proporcionou um ambiente livre para que ele pudesse explorar uma ampla variedade de ideias diferentes. No mesmo ano, ele assumiu um cargo no Centro de Pesquisa Thomas J. Watson, onde foi convidado a examinar o problema de um "ruído" estranho nas linhas de transmissão eletrônica da IBM. Ele descobriu que o ruído tendia a aparecer em grupos, com padrões que permaneciam constantes, fossem plotados por segundo ou por hora.

Durante a década de 1960, Mandelbrot estudou aglomerados de galáxias, aplicando suas ideias sobre escala à própria estrutura do universo, e também se interessou por trabalhos sobre o comprimento das linhas costeiras.



Exemplo de um conjunto de Julia
Fonte: *Wikipedia*

Em 1970, os caminhos traçados por Mandelbrot o levaram de volta ao artigo de Julia. Com o auxílio da computação gráfica, Mandelbrot conseguiu demonstrar como o trabalho de Julia é a fonte de alguns dos mais belos fractais conhecidos atualmente.

Na IBM, em 1973, Mandelbrot desenvolveu um algoritmo para gerar imagens que imitavam formas de relevo naturais. Esse tipo de atividade ? medir estruturas e dar sentido ao caos aparente ? se tornou o trabalho da vida de Mandelbrot. O resultado final foi uma nova geometria, conhecida hoje como Geometria Fractal.

Além de membro da IBM no *Watson Research Center*, Mandelbrot foi professor de Prática de Matemática na Universidade de Harvard, professor de Engenharia em Yale, professor de Matemática na *École Polytechnique*, professor de Economia em Harvard e professor de Fisiologia na Faculdade de Medicina Einstein.

Uma característica de Mandelbrot é que ele se interessava por diferentes assuntos, e por se envolver em vários ramos da ciência conhecia muitas pessoas. Cada vez que ele dava uma palestra era sobre algo diferente.

Minha vida parecia ser uma série de eventos e acidentes. Mas, quando olho para trás, vejo um padrão.

Ele frequentemente atribuía seu trabalho pioneiro em Geometria Fractal ao padrão aparentemente caótico de sua própria vida.

Ao longo de sua vida recebeu vários prêmios, dentre eles:

1. Medalha Barnard - 1985
2. Medalha Franklin - 1986
3. Prêmio Alexander von Humboldt - 1987
4. Medalha Steinmetz - 1988
5. Medalha de Nevada - 1991
6. Prêmio Wolf de Física - 1993
7. Prêmio Japonês de Ciência e Tecnologia - 2003.

Mandelbrot gostava de xadrez, e também de mapas. Certa vez admitiu que não pensava em xadrez logicamente, mas geometricamente. Ele foi casado com Aliette Kagan e teve dois filhos, Laurent e Didier, e faleceu em 14 de outubro de 2010, aos 85 anos, em Cambridge, Massachusetts, de câncer no pâncreas.

Referências:

Bernhard Riemann —— Britannica

Bernhard Riemann (1826 - 1866) - Biography - MacTutor History of Mathematics

■

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Aplicação de fractais na Medicina

Os fractais são figuras geométricas sem fim cujas formas se repetem ininterruptamente proporcionando padrões fascinantes em diversas formas da natureza, tais como plantas, montanhas, nuvens e conchas do mar. Além disso, eles estão presentes no corpo humano na estrutura de alguns órgãos, como pulmões, ramificações dos neurônios e vasos sanguíneos. Por isso, a Medicina tem utilizado a Geometria Fractal para estudo de diversas doenças e tratamentos.

Segundo alguns estudos, quando o ser humano possui alguma doença, nota-se uma grande perda de sua estrutura fractal. Quando uma pessoa é diagnosticada com hipertensão arterial pulmonar, por exemplo, que de modo genérico é descrita como uma pressão alta nos vasos sanguíneos do pulmão, os fractais que descrevem as ramificações sanguíneas sofrem redução e amputação das partes.

Estudos mais recentes também mostram que a Geometria Fractal pode ser utilizada para a compreensão do diagnóstico de câncer, uma vez que o órgão cancerígeno apresenta uma característica fractal diferente de um órgão não cancerígeno.

Outro exemplo importante da utilização de fractais na medicina é na medição dos batimentos cardíacos através do tacograma, gráfico utilizado para a análise e o controle desses batimentos. Quando o tacograma possui grande variabilidade de fractais, a pessoa é considerada saudável, mas se houver um baixo índice de variabilidade nos fractais ou uma sequência linear, o diagnóstico é de anomalia ou problema no coração.

Referência:

amchagas,+6.pdf

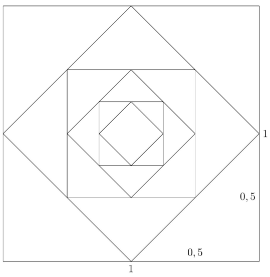
■

DESAFIOS

Desafios da Edição

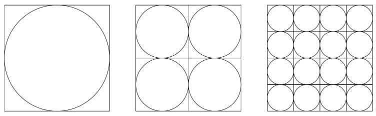
Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Na figura a seguir começamos com um quadrado de lado 1. Neste quadrado inscrevemos uma losango com vértice no ponto médio de cada lado do quadrado. No losango construímos um quadrado com vértice no ponto médio de cada lado do losango. Continuamos esse processo indefinidamente. Qual a soma das áreas dos quadrados construídos?



Fonte: Do autor

2) Considere um quadrado de lado 1 e um círculo inscrito no quadrado. Divida o quadrado em quatro quadrados iguais, cada um com um círculo inscrito. No terceiro passo dividimos cada quadrado em quatro quadrados iguais e colocamos um círculo inscrito em cada quadrado. A figura ilustra esses três passos. Continue o processo indefinidamente. Qual o valor da soma das áreas dos círculos no n-ésimo passo de construção?



Fonte: Do autor

Referências:

www.osfantasticosnumerosprimos.com.br
www.vestiprovas.com.br

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 20ª edição)

Desafio 1: A pessoa que está próxima do pólo anda mais devido a forma da terra.

Desafio 2: A aeronave que viaja ao longo do paralelo percorre $10148,68$ milhas. Para encontrar esse valor consideramos que a aeronave viaja 180 e que no equador cada 1 corresponde a 60 milhas náuticas, considerando ainda que $\cos(20) = 0,9396$, temos $180.60.0,9396 = 10148,68$. Enquanto a aeronave que voa via pólo cobre 8400 milhas. O deslocamento é de 70 até o polo Sul e mais 70 até o ponto indicado.

■

Evento

Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - 2025

O ERMAC, Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, tem como objetivo congregar pesquisadores/as, estudantes de graduação e pós-graduação, docentes, professores e professoras da rede básica, além de demais pessoas interessadas em aplicações de conteúdos matemáticos nas mais diversas áreas de conhecimento.

O ERMAC 2025 será sediado pela Universidade Federal de Lavras, em uma parceria de organização com a Universidade Federal de Alfenas e ocorrerá nos dias 12 e 13 de junho. A programação conta com palestras, apresentações de trabalhos, mesa redonda, minicursos e um ERMACquinho, um espaço cheio de ciência e diversão pensado para participantes na companhia de suas crianças.

Para maiores informações acesse: https://ermac.ufla.br/

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.