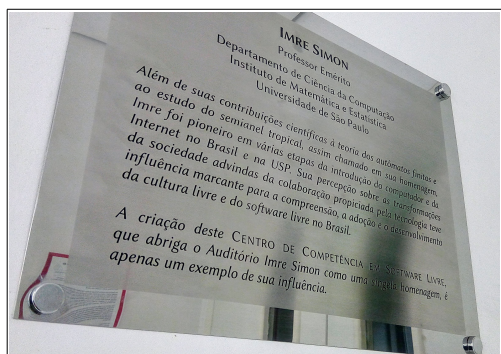


Boletim Lavrense de Matemática

Edição 22, 15 de outubro de 2025



Quando o “máximo” substitui a soma

Uma Geometria que trabalha com operações diferentes das usuais e consegue atingir resultados importantes. Entre retas quebradas e curvas poligonais, nessa edição vamos trabalhar com essa fascinante geometria e entender um pouco sobre seu funcionamento. A palavra tropical é uma homenagem a um dos importantes matemáticos, brasileiro de coração, que contribuiu para o desenvolvimento dessa área da Matemática trabalhando na USP.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Geometria Tropical: Uma nova perspectiva Matemática

Apesar do nome, a Geometria Tropical não estuda o clima, tampouco se limita à medição da terra, como a etimologia da palavra geometria sugere. Na verdade, a Geometria Tropical é uma área da Matemática que une conceitos da álgebra com ideias da com-

binatória para resolver problemas de maneira mais simples. De rotas de transporte à Física teórica, descubra na seção Curiosidades como a Geometria Tropical está presente em diversas áreas da ciência.

BIOGRAFIA

Imre Simon, um “brasileiro” genial.

Vamos conhecer um pouco da história do brilhante professor Imre Simon, precursor dos estudos sobre a Geometria Tropical. Simon iniciou e terminou sua trajetória acadêmica na Universidade de São Paulo (USP) e, nesta instituição, também somou contribuições importantes na área da informática, como o incentivo ao uso da internet nos estudos e pesquisas e no movimento pelo software livre no Brasil.



Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

Índice

Geometria Tropical [pág. 2](#)

Imre Simon [pág. 3](#)

Curiosidades [pág. 4](#)

Desafios Matemáticos [pág. 4](#)

Eventos [pág. 5](#)

EDITORES

DMM/UFLA

Ana Claudia Pereira
Graziane Sales Teodoro
Ricardo Edem Ferreira
Thais Presses Mendes

Geometria Tropical

A Geometria Tropical trabalha com operações tropicais. A adição tropical $\oplus$ entre a e b é definida como o máximo entre a e b , $a \oplus b = \max\{a, b\}$, e a multiplicação tropical $\otimes$ entre a e b é definida como a soma usual entre a e b , $a \otimes b = a + b$.

A adição tropical entre dois elementos a e b também pode ser definida como o mínimo entre a e b . As operações tropicais têm muitas propriedades como por exemplo a comutatividade e a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Existem algumas diferenças importantes quando trabalhamos com as operações tropicais, por exemplo, não existe um número real que tenha as propriedades do elemento neutro da adição usual, para contornar esse ponto usamos o espaço estendido $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Assim, $a \oplus (-\infty) = \max\{a, -\infty\} = a$, para qualquer $a \in \mathbb{T}$. A adição tropical não tem simétrico, ou seja, não está definida uma subtração tropical. O elemento neutro da multiplicação tropical é o 0, pois $a \otimes 0 = a + 0 = a$, para qualquer $a \in \mathbb{T}$.

Na álgebra usual, um polinômio de segundo grau é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, onde as operações de soma e multiplicação são as usuais. Um polinômio tropical usa operações tropicais. Um exemplo de polinômio tropical é $Q(x) = a \otimes x^2 \oplus b \otimes x \oplus c$. A operação de potência é entendida da seguinte forma $x^2 = x \otimes x = x + x = 2x$.

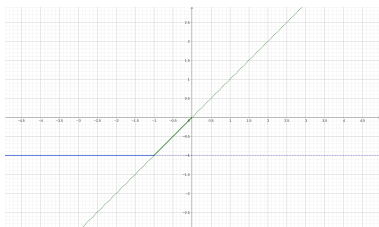


Gráfico do polinômio tropical
 $P(x) = -1 \oplus x = \max\{-1, x\}$

Os polinômios tropicais $P(x) = -1 \oplus x$, $Q(x) = -1 \oplus x \oplus x^2$ são estudados considerando as operações

tropicais, dessa forma, temos o seguinte $P(x) = -1 \oplus x = \max\{-1, x\}$ e $Q(x) = -1 \oplus x \oplus x^2 = \max\{-1, x, 2x\}$.

O gráfico do polinômio $P(x)$ é construído por partes utilizando as funções $y = -1$ e $y = x$.

O gráfico do polinômio $Q(x)$ é construído por partes utilizando as funções $y = -1$, $y = x$ e $y = 2x$.

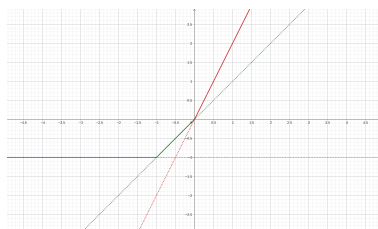


Gráfico do polinômio tropical
 $Q(x) = -1 \oplus x \oplus x^2 = \max\{-1, x, 2x\}$

Em Geometria Tropical a função $f(x, y) = 2 \otimes x \oplus (-3) \otimes y \oplus 1$ é uma reta tropical. Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem ao gráfico da reta tropical devem satisfazer as seguintes condições:

1. $2 + x = -3 + y$ e $2 + x \geq 1$, ou seja, $y = x + 5$ e $x \geq -1$;
2. $2 + x = 1$ e $1 \geq -3 + y$, ou seja, $x = -1$ e $y \leq 4$;
3. $-3 + y = 1$ e $1 \geq 2 + x$, ou seja, $y = 4$ e $x \leq -1$.

Observe que o gráfico da função $f(x, y) = 2 \otimes x \oplus (-3) \otimes y \oplus 1$ é a região do plano $z = 2 + x$ que está acima dos planos $z = -3 + y$ e $z = 1$, união com a região do plano $z = -3 + y$ que está acima dos planos $z = 2 + x$ e $z = 1$, união com a região do plano $z = 1$ que está acima dos planos $z = 2 + x$ e $z = -3 + y$.

Uma reta tropical é um grafo com um único vértice e com três arestas infinitas¹. O gráfico da reta tropical $f(x, y) = 2 \otimes x \oplus (-3) \otimes y \oplus 1$ está na figura a seguir.

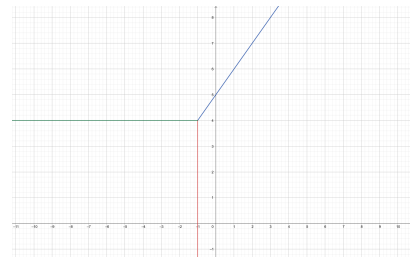


Gráfico da reta tropical
 $f(x, y) = 2 \otimes x \oplus (-3) \otimes y \oplus 1$

Observamos que mesmo não se parecendo com uma reta usual da geometria euclidiana as retas tropicais possuem algumas características das retas usuais. Duas retas tropicais que não tem infinitos pontos em comum se cortam em apenas um ponto e por dois pontos distintos passa pelo menos uma reta tropical.

A figura abaixo mostra o gráfico da função tropical $g(x, y) = (-1) \otimes x^2 \oplus (-1) \otimes y^2 \oplus 1 \otimes x \otimes y \oplus x \oplus y \oplus 0 = \max\{-1 + 2x, -1 + 2y, 1 + x + y, x, y, 0\}$.

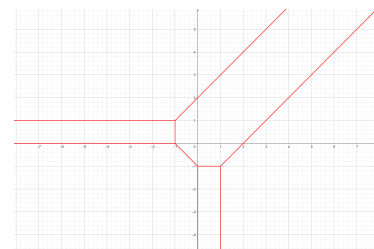


Gráfico da curva tropical
 $g(x, y) = (-1) \otimes x^2 \oplus (-1) \otimes y^2 \oplus 1 \otimes x \otimes y \oplus x \oplus y \oplus 0$

Referências:

Ramos, V. G. B., **Curvas Algébricas e Geometria Tropical**, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Souza, V. P. R., **Uma Introdução à Geometria Tropical**, Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2015.



¹Para mais informações sobre grafos veja a próxima edição do Boletim Lavrense de Matemática em www.dmm.ufla.br

Imre Simon

Imre Simon nasceu em Budapeste, na Hungria, em 1943, período em que ocorreu a Segunda Guerra Mundial. Simon viveu na Hungria até os 13 anos de idade, mas a Revolução Húngara de 1956, que ocasionou uma grave crise política no país, levou sua família a emigrar para o Brasil. Segundo um dos três filhos de Simon, Nataniel Simon, o pai fazia questão de se apresentar como brasileiro. Por esse motivo, a comunidade científica criou o termo Geometria Tropical para designar suas pesquisas e contribuições neste campo e em homenagem à sua “nacionalidade” brasileira.



Imre Simon

Fonte: *Wikipedia*

A carreira acadêmica de Simon começou em 1962, quando ele entrou para o curso de engenharia eletrônica na Escola Politécnica da USP. Nesta universidade, desenvolveu seu interesse pela Matemática e pela Computação. Ele teve a oportunidade de trabalhar com o primeiro computador adquirido pela USP, um IBM1620, lembra Tomasz Kowaltowski (1942), professor aposentado do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas (IC-Unicamp) e amigo de Simon. Ele também se dedicou à construção do que hoje é conhecido como Centro de Computação Eletrônica (CCE).

Simon fez mestrado e doutorado em ciência da computação na Universidade de Waterloo, no Canadá, no início dos anos 1970. Seu pós-doutorado foi concluído na Universidade Paris Diderot, em 1980. Simon se tornou professor titular do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática e Estatística da USP.

Na metade dos anos 90, quando surgiu a internet, ele presidiu a Comissão Central de Informática da USP e foi um visionário ao destacar a importância da internet como ferramenta acadêmica e de pesquisa. Sob sua liderança, os campi da USP foram prontamente interligados e sua infraestrutura foi atualizada para se beneficiar dos recursos advindos da internet. Essa iniciativa teve grande impacto no meio acadêmico, no acesso à informação e na disseminação do conhecimento em toda a universidade.

Em 1965, ele ajudou a implementar o primeiro exame vestibular computadorizado do país, um marco significativo na educação. Dois anos depois, foi convidado pelo então ministro da Fazenda para escrever um programa de computador que calculasse os índices de inflação, em uma época em que os níveis de inflação estavam alarmantes. Essa conquista foi notável, considerando as limitações dos computadores da época. Também foi coordenador da Incubadora Virtual de Conteúdos Digitais, um projeto da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

Presidiu a Sociedade Brasileira de Matemática e coordenou o grupo de Estudos de Informação e Comunicação (EdIC), do Instituto de Estudos Avançados da USP. Foi também membro titular da Academia Brasileira de Ciências e membro da Ordem Nacional do Mérito Científico.

Simon desempenhou um papel significativo no movimento de software livre no Brasil. Ele entendia que esse era um instrumento para capacitar as pessoas por meio da tecnologia e em promover a liberdade de compartilhamento e modificação de software. Na USP, Simon foi um defensor entusiasta do uso e desenvolvimento de software livre. Ele reconheceu a importância de disponibilizar o conhecimento e as ferramentas tecnológicas de forma livre e acessível a todos. Como professor, ele promoveu a utilização de software livre em suas atividades acadêmicas e encorajou seus alunos a explorar e contribuir para esse movimento.

Ao longo de sua carreira, recebeu diversos prêmios e reconhecimentos, destacando-se o Prêmio Científico da Union des Assurances de Paris (UAP), em conjunto com Misha Gromov (1943) e Joseph Stiglitz (1943), a Ordem Nacional do Mérito Científico, Prêmio Jabuti de Ciências Exatas e o Prêmio de Mérito Científico da Sociedade Brasileira de Computação.

Simon morreu em casa na madrugada de 13 de agosto de 2009, um dia antes de completar 66 anos. Um câncer de pulmão abreviou sua brilhante trajetória. Logo após o seu falecimento, ele foi nomeado Professor Emérito do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática e Estatística da USP, uma honra que celebrou sua trajetória e contribuições excepcionais para a academia.

Referências:

www.pt.wikipedia.org/wiki/Imre_Simon

www2.ufjf.br/matematica

www.revistapesquisa.fapesp.br/o_homem_que_calculava/



Geometria Tropical: soluções mais simples para problemas complexos

Apesar do termo geometria do grego significar medida da terra, a Geometria Tropical não se restringe à terra, ela aplica conceitos algébricos para modelar problemas do dia a dia, como os encontrados em sistemas de transporte, onde a minimização de tempo ou custos é relevante. Ela não é um ramo da geometria, mas sim da álgebra tropical. Ao contrário da geometria euclidiana ², a Geometria Tropical não lida diretamente com formas e figuras geométricas.

A Geometria Tropical reformula problemas complexos de geometria algébrica e outras áreas para a lin-

guagem da combinatória, considerada mais simples. Diferentes aplicações dela podem ser encontradas na Matemática, na Física, na análise de redes neurais, na resolução de problemas de otimização ou na simplificação de cálculos em teoria de cordas.

A Geometria Tropical é usada para resolver problemas em redes de transporte, por exemplo, para encontrar os caminhos mais curtos entre diferentes pontos, sendo uma ferramenta valiosa na gestão logística e no planejamento de rotas. Já na área de análise de redes, é possível modelar situações onde se deseja en-

contrar a rota ótima para minimizar custos ou tempo, usando as operações da álgebra tropical. Na Física teórica a Geometria Tropical simplifica cálculos em teoria de cordas e na Matemática permite demonstrar teoremas clássicos, como o Teorema de Bézout tropical, de maneira mais direta. Portanto, a Geometria Tropical é uma ferramenta poderosa que oferece uma perspectiva nova e mais simples para problemas complexos em diversas áreas da ciência.

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Chamamos de raiz tropical do polinômio tropical $P(x)$ qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{T}$ para o qual o gráfico de $P(x)$ tem uma “quina” em x_0 . Por exemplo, o polinômio tropical $-5 \oplus (-2) \otimes x \oplus x^4$ tem as raízes $x_0 = -3$ e $x_1 = -\frac{2}{3}$.

De fato,

$$\begin{aligned} -5 \oplus (-2) \otimes x \oplus x^4 &= \max\{-5, x-2, 4x\} = \\ \begin{cases} -5, & \text{se } x \leq -3 \\ x-2, & \text{se } -3 < x \leq -\frac{2}{3} \\ 4x, & \text{se } x > -\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Determine o resultado da multi-

plicação tropical das raízes do polinômio

$$-1 \oplus 2 \otimes x \oplus (-3)x^2.$$

2) Um triângulo tropical é uma região de $\mathbb{R}^2$ delimitada por três retas tropicais. Quais são as formas possíveis de um triângulo tropical?

Referência:

Brugallé, E., *Um pouco de geometria tropical*. Université Pierre et Marie Curie. Tradução: Edem Amorin (UFMG) e Nicolas Puignau (UFRJ).

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 21ª edição)

Desafio 1: Note que o lado do primeiro losango construído na figura é $\sqrt{2}$, assim o lado do quadrado inscrito no primeiro losango é $1/2$. Logo, podemos encontrar a soma das áreas dos quadrados resolvendo o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{2i}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Portanto a soma das áreas é igual a $\frac{4}{3}$.

Desafio 2: Note que no n -ésimo passo teremos 2^{2n} círculos, cada um com raio $\frac{1}{2^{n+1}}$. Assim, a soma das áreas

dos círculos é igual a $\frac{2^{2n}\pi}{(2^{n+1})^2} = \frac{\pi}{4}$.

²Para mais informações veja a 17ª edição do Boletim Lavrense de Matemática em www.dmm.ufla.br

Eventos

IX Semana de Matemática da UFLA

A Semana da Matemática da UFLA (SEMAT) é um evento regional e aberto ao público em geral, organizado pelos professores do Departamento de Matemática e Matemática Aplicada (DMM) e do Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática (DFM). Seu objetivo é divulgar a Matemática realizada na UFLA e em outras instituições, através de atividades que envolvam o Ensino, a Pesquisa e a Extensão. A IX SEMAT será realizada presencialmente, entre os dias 10 e 14

de novembro de 2025. Esta edição contará com diversas atividades, como palestras e minicursos nas áreas de Ensino de Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, sessão de pôsteres e atividades de recreação envolvendo Matemática.

Para mais informações acesse: <https://sites.google.com/ufla.br/ixsemat-ufla2025>

X Workshop de Matemática e Matemática Aplicada

O Workshop de Matemática e Matemática Aplicada (WMMA) é um

evento regional que tem como objetivo fortalecer os grupos de pesquisa em Matemática existentes nas instituições que o promovem através do aumento da interação entre eles. O evento visa também divulgar resultados recentes de pesquisa em diversas áreas de Matemática e Matemática Aplicada. Em 2025 o evento conta com a participação das instituições UFLA, UFSJ, UNIFAL e UFOP, e será realizado na cidade histórica de Congonhas, nos dias 22, 23 e 24 de outubro.

Para mais informações, acesse: <https://dmm.ufla.br/wmma/xwmma/>

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.
