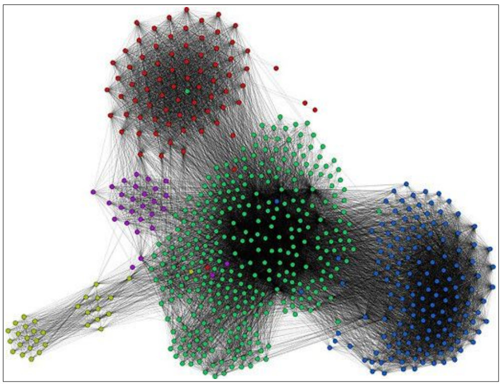
Boletim Lavrense de Matemática

Edição 23, 23 de novembro de 2025



Grafos: A matemática das conexões

Do tráfego nas ruas às redes sociais, das conexões neurais às cadeias moleculares. O mundo é uma teia de relacionamentos, e os grafos são a ferramenta que desvenda essa complexidade, revelando padrões e conexões ocultas que regem sistemas aparentemente desconexos. Nesta edição, exploramos como vértices e arestas não são apenas conceitos abstratos, mas as peças-chave para modelar, analisar e otimizar desde a logística de uma cidade até a sua próxima recomendação na internet. Descubra como essa linguagem universal das conexões não apenas descreve o mundo, mas também fornece as ferramentas para torná-lo mais eficiente e inteligente. Prepare-se para enxergar redes em tudo ao seu redor.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Das Pontes à Internet: O Poder dos Grafos

Tudo começou com um passeio aparentemente impossível pelas pontes de Königsberg. A busca pela solução, no entanto, foi muito além, dando origem a uma das ferramentas matemáticas mais versáteis da atualidade: a Teoria dos Grafos. Na seção Curiosidades, contamos essa história e revelamos o elo surpreendente entre o mapa de uma cidade do século XVIII e a estrutura que organiza desde a circulação de dados até o seu círculo de amizades. Uma ideia genial que conecta passado e futuro.

BIOGRAFIA

Leonhard Euler

A mente prodigiosa de Leonhard Euler não foi apenas brilhante, foi avassaladora: estima-se que ele seja autor de um terço de toda a produção matemática do século XVIII. Mas seu legado vai muito além dos números. Na base de muitas de suas contribuições, como a Teoria dos Grafos que exploramos neste boletim, está uma busca pela simplicidade e elegância na solução de problemas complexos. Suas ideias continuam vivas, moldando a tecnologia e a ciência atuais. Conheça a história do matemático que desbravou fronteiras do conhecimento mesmo após perder a visão.

Índice

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

ESPECIAL

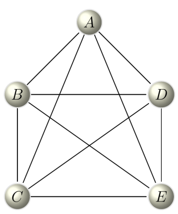
Teoria dos Grafos

Grafos são estruturas matemáticas formadas por vértices (ou nós) e arestas (ou ligações). Os vértices são os pontos de referência e as arestas indicam as relações entre esses pontos. O modelo com vértices e arestas usados para estudar o problema das pontes de Königsberg apresentada na seção Curiosidades é o que chamamos de grafo.

As aplicações da Teoria de Grafos são diversas como por exemplo na química para modelar estruturas de moléculas, na biologia para estudar as interações biológicas, na econômia na análise de relação entre mercados financeiros, no estudo do fluxo da informação e no estudo das relações sociais.

Em redes sociais, a Teoria de Grafos pode ser usada para descobrir quem é um influenciador e neste caso como pode ser direcionada uma campanha de marketing para um lançamento de produto ou serviço. Quando estamos em uma rede social como o Youtube e começamos a seguir um novo canal estamos criando uma aresta. Quando estamos no linkedln ou no Instagram cada pessoa é um vértice e cada amizade/conexão é uma aresta.

O tamanho de um grafo é representado pelo número de vértices e a densidade do grafo pelo número de arestas. Um grafo totalmente conectado é aquele que possui todas as arestas possíveis. Um grafo com k vértices pode ter no máximo $n = k(k-1)/2$ arestas.

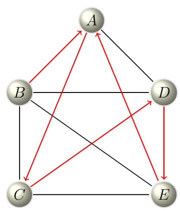


Exemplo de grafo com 5 vértices totalmente conectado
Fonte: Elaboração própria

O problema do Caixeiro Viajante é um exemplo interessante de aplicação da Teoria dos Grafos na modelagem de situações típicas da área de logística. A ideia é a seguinte: considere que um vendedor precisa visitar um certo número de cidades. Ele deve visitar cada cidade uma única vez. Como podemos determinar a melhor rota para o vendedor considerando que queremos encontrar o caminho onde teremos o menor custo de combustível, de tempo, etc.

Chamamos de caminho euleriano aquele no qual cada aresta é percorrida uma única vez. Chamamos de caminho hamiltoniano (em homenagem a W. R. Hamilton (1805 - 1860)) o caminho onde se visita cada nó uma única vez.

Observe que se o número de cidades é N podemos modelar esse problema construindo um grafo com N vértices onde as arestas são as estradas que ligam as cidades. A solução para o problema está relacionada com a procura de um caminho hamiltoniano no grafo. Se o grafo que representa esse modelo é totalmente conectado, ou seja, tem o número máximo de arestas possível então qualquer rota escolhida tem o mesmo custo se não considerarmos diferenças entre as arestas. Na prática as distâncias entre as cidades podem ser diferentes então a escolha de um caminho implica em um certo custo para a viagem.



Exemplo de caminho hamiltoniano
Fonte: Elaboração própria

A complexidade desse problema cresce rapidamente com o número de cidades envolvidas. Sua solução, na maioria das vezes, devido à complexidade, é computacionalmente cara, assim são usados métodos heurísticos (como a procura pelo vizinho mais próximo) para encontrar soluções boas ou aproximadas.

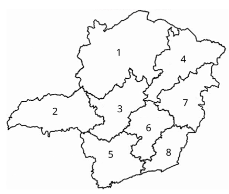
O chamado Teorema das Quatro Cores é um dos resultados mais famosos da Teoria dos Grafos. O teorema diz que qualquer mapa plano pode ser colorido com no máximo quatro cores, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Kenneth Appel
Fonte: Wikipédia

Em 1852, Francis Guthrie (1831 - 1899) propôs o problema sobre o número de cores necessárias para colorir o mapa dos condados da Inglaterra. O Teorema das Quatro Cores foi provado por Kenneth Appel (1932 - 2013) e Wolfgang Haken (1928 - 2022) usando processos computacionais para verificar milhares de casos, essa foi a primeira prova assistida por computador aceita na Matemática.

Wolfgang Haken
Fonte: Wikipédia

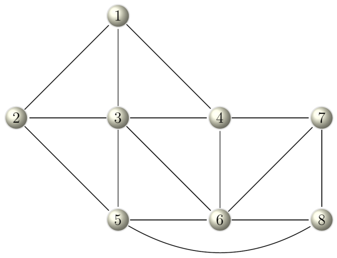
A próxima figura mostra algumas regiões do estado de Minas Gerais numeradas de 1 a 8. Vamos usar esse mapa para ilustrar a aplicação do Teorema das Quatro Cores.



Fonte: Elaboração própria

O teorema afirma que é possível colorir esse mapa usando apenas quatro cores de maneira que regiões vizinhas tenham cores diferentes. Regiões são consideradas vizinhas quando existe uma linha entre elas não apenas um ponto.

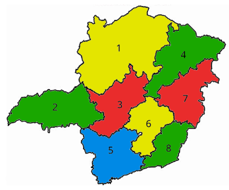
Vamos construir uma grafo para modelar o problema. As regiões serão os vértices e as fronteiras entre as regiões serão as arestas.



Fonte: Elaboração própria

Com os vértices do grafo representando as regiões do mapa podemos colorir o vértice 3 com a primeira cor. Os vizinhos desse vértice devem ser coloridos com cores diferentes. Podemos usar a primeira cor nos vértices 7 ou 8. Vamos colorir o vértice 7 com a primeira cor.

Seguindo esse procedimento vamos usar a segunda cor para colorir os vértice 1 e 6. Com a terceira cor vamos colorir os vértices 2 e 4. E com a quarta cor vamos colorir o vértice 5. O resultado desse construção é mostrado na próxima figura.



Fonte: Elaboração própria

Referências:

Monteiro, L. H. A., *Sistemas Dinâmicos Complexos.* Editora Livraria da Física, 2014, 2ª edição, São Paulo.

www.super.abril.com.br

■

BIOGRAFIA

Leonhard Paul Euler

Leonhard Paul Euler nasceu em 15 de abril de 1707 na Basileia, Suiça. Foi um estudioso que se dedicou a vários ramos da Matemática, como o cálculo diferencial e integral e a Teoria dos Grafos. Uma de suas contribuições teve como base a introdução à análise dos infinitos, teoria que constitui um dos fundamentos da matemática moderna. Euler também é conhecido por seus trabalhos na mecânica, dinâmica dos fluidos, astronomia e música.

Filho de Paul Euler, um ministro protestante e Margaret Brucker, Euler se mudou com a família com um ano de idade para a cidade de Riehen, onde passou grande parte de sua infância. Ele foi educado por seu pai, que lhe ensinou os primeiros conceitos da Matemática.

Em 1720, com 13 anos de idade, Leonhard Euler retornou para a Basileia para estudar Teologia na universidade local. Esse, no entanto, era um desejo de sua família, pois Euler não tinha interesse em Teologia. Em 1723, com 16 anos, recebeu o grau de mestre em Artes, com uma dissertação em latim que comparava as filosofias de Isaac Newton (1643-1727) e de René Descartes (1596-1650). Neste período, também estudava com Johann Bernoulli (1667-1748), um dos matemáticos mais influentes da época, que rapidamente descobriu seu talento na mesma área e convenceu seus pais de que sua vocação não era Teologia e sim, Matemática.

Euler ingressou no curso de Matemática e o concluiu em 1726. No ano seguinte, foi convidado pela imperatriz Catarina I da Rússia (1684-1727) para ser um membro da Academia de Ciências de São Petersburgo. Em 1730, Euler assumiu o cargo de professor de Física da Academia, e em 1733 substituiu Daniel Bernoulli como professor de Matemática.

Em 1734, Euler se casou com a suíça Katharina Gsell e juntos tiveram 13 filhos, mas apenas cinco sobreviveram. Nessa época, Euler publicou diversos textos, entre eles, o livro *Mecânica* (1736-37), quando apresentou extensivamente a dinâmica newtoniana na forma de análise matemática.

Em 1741, o rei Frederico II da Prússia (1712-1786) convidou-o para lecionar em Berlim. Euler assumiu então a cadeira de Matemática da Academia de Berlim, onde permaneceu durante 25 anos e escreveu mais de 200 artigos sobre Física, Matemática e Astronomia. Em 1744, foi nomeado diretor da seção de Matemática da Academia. Durante esse período, deu aulas de Física à princesa de Anhalt-Dessau (1837-1906), sobrinha do rei. Euler escreveu mais de 200 cartas dirigidas à princesa, que mais tarde foram compiladas num volume best-selling intitulado Cartas de Euler sobre diferentes assuntos da Filosofia natural para uma princesa alemã. Este trabalho trata sobre vários assuntos da Física e da Matemática e também revela as perspectivas religiosas e a personalidade do seu autor. Este livro foi o mais lido de todas as suas obras matemáticas.

Outra grande realização de Euler foi o desenvolvimento do método dos algoritmos com o qual conseguiu, por exemplo, fazer a previsão das fases da lua, com a finalidade de obter informações para a elaboração de tabelas para ajudar o sistema de navegação.

Em 1738, três anos após sofrer uma febre quase fatal, Euler tornou-se quase cego do olho direito. Mais tarde, desenvolveu uma catarata no olho esquerdo, deixando-o quase totalmente cego. No entanto, esses problemas não afetaram sua produtividade, pois suas habilidades de cálculo mental o ajudaram e, com a ajuda de suas escribas, produziu, em média, um artigo matemático durante todas as semanas do ano de 1775.

Em 1773, sua esposa Katharina faleceu após 40 anos de casamento. Três anos depois, Euler casou com sua meia-irmã, Salome Abigail Gsell (1723-1794). Este casamento durou até o fim de sua vida. Em 1782, foi eleito membro honorário estrangeiro da Academia de Artes e Ciências dos Estados Unidos. Em Santo Petersburgo no dia 18 de setembro de 1783, depois de um almoço com sua família, Euler sofreu uma hemorragia cerebral e morreu. Foi enterrado próximo a Katharina no cemitério luterano de Smolensk, na Ilha de Vassiliev.

Referências:

www.pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

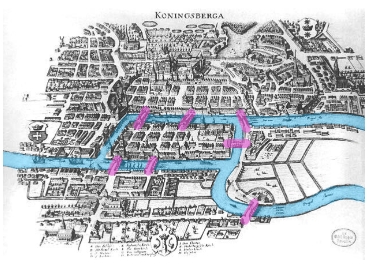
www.ebiografia.com/leonhard_euler

■

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

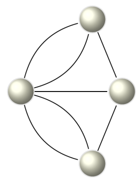
Do Século XVIII à Era Digital

O conceito de Grafos surgiu por causa de um problema curioso do século XVIII, o problema das sete pontes de Königsberg. Na cidade de Königsberg (atual Kaliningrado, na Rússia), havia sete pontes que ligavam partes da cidade separadas por um rio. As pessoas se perguntavam se era possível fazer um passeio que cruzasse cada ponte exatamente uma vez e voltasse ao ponto de partida.



Pontes de Königsberg
Fonte: www.en.wikipedia.org

O matemático Leonhard Euler (1707-1783) ouviu falar desse problema e decidiu analisá-lo de forma abstrata. Ele ignorou o mapa real e transformou a cidade em algo mais simples: Euler representou as ilhas e margens como vértices, e as pontes como arestas.



Fonte: Elaboração própria

Euler estudou esse problema em 1736 e percebeu que, para existir um caminho que cruze cada ponte uma única vez, cada vértice precisaria ter um número par de pontes ligadas a ele, mas em Königsberg, todas as regiões tinham um número ímpar de pontes. Por isso, não existe um caminho possível que atenda à condição. Ao fazer isso, criou o primeiro teorema da Teoria dos Grafos.

Muitas vezes, sem mesmo perceber, estamos usando Grafos em nosso dia a dia, seja fazendo uma pesquisa no Google ou usando redes sociais. As redes sociais são essencialmente grafos gigantes: cada pessoa é um vértice (nó), e cada amizade, curtida ou conexão é uma aresta (ligação). O Facebook, por exemplo, chegou a ter mais de um trilhão de conexões, formando um grafo tão grande que precisou de sistemas matemáticos especiais só para ser armazenado e analisado. Graças a essa estrutura, foi possível provar o "6 graus de separação". Tal expressão significa que, em média, qualquer pessoa no mundo pode ser conectada a qualquer outra em apenas 6 passos através das conexões de amizade nas redes. Ou seja: você, eu, e até o presidente de outro país estamos provavelmente separados por menos de 6 pessoas.

Quando Larry Page e Sergey Brin criaram o Google, eles precisavam de uma forma de avaliar quais páginas da internet eram mais importantes. Então, usaram um conceito matemático que vem diretamente da Teoria dos Grafos.

O uso de Grafos não se limita apenas a redes sociais e pesquisas. Estradas, linhas de trem, internet, circuitos elétricos, mapas de voos, moléculas químicas e até genes podem ser representados como grafos. Grafos estão ao nosso redor, mesmo que a gente nem perceba.

Referência:

www.pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos

■

SUGESTÕES AUDIOVISUAIS

O Poder e o Perigo das Redes Sociais

A Teoria dos Grafos tem um papel importante nas redes sociais. Pensando nessa direção sugerimos um filme e um documentário. O documentário "O Dilema das Redes", lançado em 2020, disponível na Netflix, nos faz refletir sobre o impacto das redes sociais no comportamento humano e na sociedade.

O dilema das redes
Fonte: www.datapolicy.co

O documentário mostra como as plataformas utilizam inteligência artificial para capturar a atenção, influenciar emoções e personalizar conteúdos com base em dados pessoais.

O filme "A rede social", lançado em 2010, disponível na Netflix, conta a história de como Mark Zuckerberg criou o Facebook, explorando os desafios de se tornar uma rede social global.

A Rede Social
Fonte: www.pt.wikipedia.org

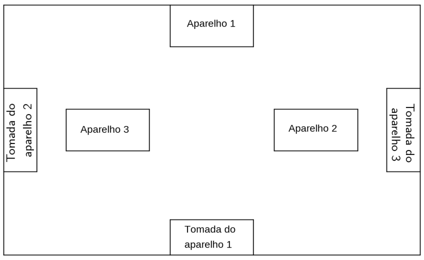
■

DESAFIOS

Desafios da Edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

1) Em uma sala há três aparelhos eletrônicos e as três tomadas correspondentes, como representado na figura a seguir.



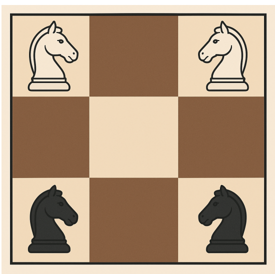
É possível conectar cada aparelho à sua específica tomada de modo que os cabos não se cruzem, não cruzem as paredes e nem os outros aparelhos?

2) No jogo de xadrez os possíveis movimentos de um cavalo são:

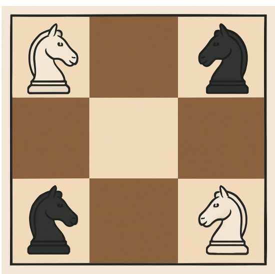
(a) Duas casas na vertical seguido de uma casa na horizontal;

(b) Duas casas na horizontal seguido de uma casa na vertical.

É possível que os cavalos que estão inicialmente na posição (I) fiquem na posição (II)?



Posição (I)



Posição (II)

Referências:

Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I., *Círculos Matemáticos: A experiência russa.* IMPA, 2012.

Stewart, I., *Almanaque das Curiosidades Matemáticas.* . Zahar, 2009.

Respostas dos desafios da edição anterior (acesse aqui a 22ª edição)

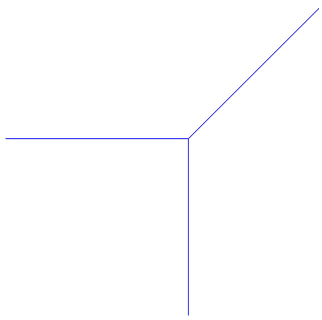
Desafio 1: Observe que

$$\begin{aligned} &-1 \oplus 2x \oplus (-3)x^2 \\ &= \max\{-1, x+2, 2x-3\} \\ &= \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x \leq -3 \\ x+2, & \text{se} \quad -3 < x \leq 5 \\ -3+2x, & \text{se} \quad x > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo as raízes são $x_0 = -3$ e $x_1 = 5$ e a multiplicação tropical de x_0 e x_1 é

$$x_0 \otimes x_1 = (-3) \otimes 5 = (-3) + 5 = 2$$

Desafio 2: Devemos lembrar que uma reta tropical é formada por 3 semirretas usuais, de direções $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e $(1, 1)$, emanando de um ponto qualquer do plano. Veja figura abaixo



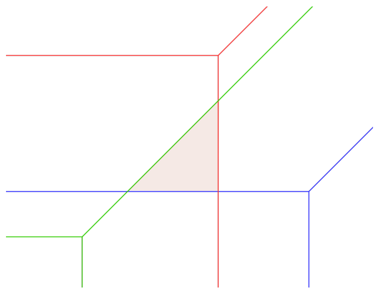
Assim, temos as seguintes possibilidades:

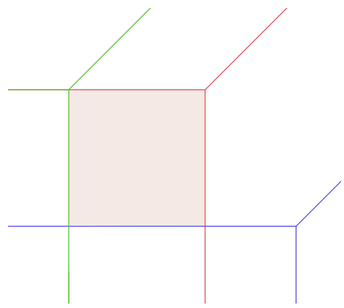
a) O triângulo é a região delimitada por segmentos que unem os três pontos de interseção.

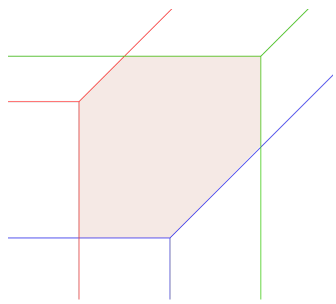
b) O triângulo é a região delimitada por segmentos que unem os pontos de interseção e o ponto de encontro das semirretas que constituem uma das retas tropicais.

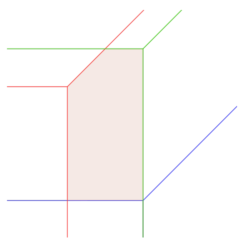
c) O triângulo é a região delimitada por segmentos que unem os pontos de interseção e os pontos de encontro das semirretas que constituem duas das retas tropicais.

d) O triângulo é a região delimitada por segmentos que unem os pontos de interseção e os pontos de encontro das semirretas que constituem as três retas tropicais.









■

Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.