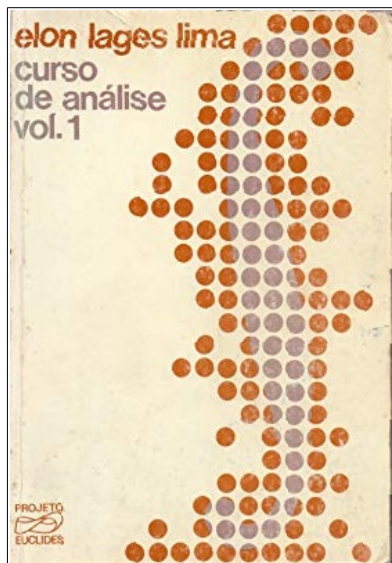


Boletim Lavrense de Matemática

Edição 26, 15 de setembro de 2026



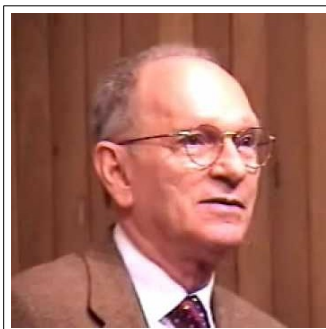
Curso de Análise — 50 anos

Há cinquenta anos era lançada a primeira edição do *Curso de Análise* do matemático e escritor brasileiro Elon Lages Lima (1929–2017), uma obra-prima da literatura matemática brasileira que, desde então, tem influenciado enormemente a formação matemática de sucessivas gerações de estudantes e professores de todo o país. Na reportagem especial deste boletim discorreremos brevemente sobre a Análise Matemática, assunto tratado pelo *Curso de Análise*, e em seguida exploramos algumas peculiaridades dessa obra-prima do Prof. Elon.

BIOGRAFIA

Elon Lages Lima (1929-2017)

Neste boletim, em comemoração ao aniversário de cinquenta anos do *Curso de Análise* do Prof. Elon, veremos uma breve biografia desse matemático brasileiro que grandes contribuições deu à pesquisa e ao ensino da Matemática no país. Abordaremos relatos de sua vida desde a sua infância em Maceió até sua vida no Rio de Janeiro como pesquisador no Instituto de Matemática Pura e Aplicada.



Elon Lages Lima
(Fonte: Google Images)

Índice

Curso de Análise [pág. 2](#)

Elon Lages Lima [pág. 4](#)

Curiosidades [pág. 5](#)

Sugestão de leitura [pág. 5](#)

Desafios [pág. 6](#)

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Elon, quando criança, já foi expulso da escola... por saber demais!

Desde jovem, Elon impressionava por seu talento e por não ter medo de questionar. Na Escola Preparatória de Cadetes, corrigia os erros de Matemática do professor com

tanta frequência que acabou sendo expulso. Para esta e outras curiosidades, veja a seção “Curiosidades Matemáticas” mais a frente.

Contatos

Site: www.dmm.ufla.br/matematicaemtodolugar
e-mail: boletimdamatematica.dmm@ufla.br

Editores (DMM/UFLA)

Ana Claudia Pereira
Andreia da Silva Coutinho
Graziane Sales Teodoro
Jamil Abreu
Thais Presses Mendes

Colaboração especial
Conrado Rigotti de Carvalho

ESPECIAL

Curso de Análise: Vol. 1 — 50 anos

A *Análise Matemática* é o ramo da Matemática dedicado ao estudo rigoroso das noções de convergência, aproximação e limite. Ela se desenvolveu sobre um substrato formado pelo próprio Cálculo Diferencial e Integral, e visa investigar conceitos fundamentais como números reais, sequências, séries, funções, continuidade, derivadas e integrais, buscando compreender não apenas como esses objetos se comportam, mas também por que os resultados obtidos são verdadeiros.

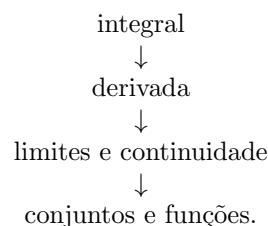
Em contraste com o Cálculo Diferencial e Integral abordado nos primeiros semestres dos cursos da área de ciências exatas, a Análise Matemática enfatiza a formulação precisa das definições e a demonstração dos teoremas, constituindo uma das bases da matemática moderna e fornecendo ferramentas essenciais para áreas como Equações Diferenciais, Análise Funcional, Teoria da Medida, Probabilidade e Física Matemática.

A história da Análise Matemática, restringindo-nos aqui apenas aos acontecimentos do século XIX, já é por demais complicada para ser esmiuçada em poucas páginas. Não menos complicada é a própria história do Cálculo Diferencial e Integral até o século XVIII^a.

Vale rememorar aqui alguns episódios relevantes, em ordem cronológica. Isto inclui, por exemplo, os trabalhos de Arquimedes com o método da exaustão^b, os trabalhos de Kepler de 1615 sobre volumes de barris de vinho, e os de Fermat nos anos 1630 sobre a quadratura das curvas $y = x^n$, todos estes relacionados ao Cálculo Integral^c. Fermat já dispunha de alguns métodos para encontrar tangentes a certas curvas e tudo isso foi posteriormente sistematizado por Newton (em 1665) e Leibniz (em 1675) dentro de uma estrutura maior, a saber, o Cálculo Diferencial e Integral mais ou menos como o conhecemos hoje^d. Em 1821, Cauchy coloca o conceito de limite (já enfatizado por D'Alembert) no centro da Análise Matemática e, nos anos seguintes, desenvolve uma abordagem mais rigorosa aos conceitos de conti-

nuidade, derivadas e integrais^e. Esse processo atingirá a maturidade com Weierstrass a partir da década de 1850. Finalmente, Dedekind propõe umas das primeiras abordagens rigorosas puramente aritméticas aos números reais em 1872 e Cantor lança a sua teoria dos conjuntos em 1875^f.

Essa linha do tempo demasiadamente simplificada, não mencionando por exemplo as contribuições de Cavalieri, Barrow, Wallis e Gregory no século XVI, ou ainda as de Taylor, Maclaurin, Bernoulli, Euler e Lagrange no século XVII, sem falar nas controvérsias em torno do conceito de “infinitesimais” (ou “infinitésimos”)^g e tampouco nas contribuições indianas do século XIV, visa apenas enfatizar que o desenvolvimento histórico da Análise Matemática se dá no sentido^h:

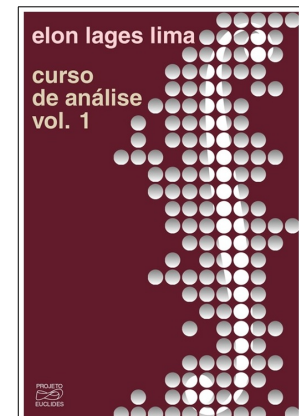


Por razões principalmente pedagógicas, grosso modo pelo fato de que muitas descobertas no Cálculo Diferencial e Integral foram feitas antes mesmo de serem plenamente compreendidas, a Análise Matemática enquanto disciplina oferecida em qualquer instituição de ensino superior progride quase sempre na ordem inversa. Um exemplo de sumário de um livro-texto de Análise Matemática apresenta-se assim:

- I. Conjuntos e Funções
- II. Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis
- III. Números Reais
- IV. Sequências e Séries de Números reais
- V. Topologia da Reta
- VI. Limites de Funções
- VII. Funções Contínuas
- VIII. Derivadas
- IX. Integral de Riemann
- X. Sequências e Séries de Funções

O sumário acima foi, de fato, extraído do *Curso de Análise: Vol. 1*

(ver [4]), do renomado matemático e escritor brasileiro Elon Lages Lima (1929–2017), a quem nos referiremos neste texto apenas como “Prof. Elon”, bem como escreveremos apenas *Curso de Análise* para nos referirmos a [4]. Há também um *Curso de Análise: Vol. 2*, publicado alguns anos depois do primeiro volume.



Capa da atual edição do *Curso de Análise: Vol. 1*.

(Fonte: <https://loja.impa.br/>)

O Prof. Elon começa o prefácio de seu *Curso de Análise* com o famoso diálogo envolvendo o músico americano Louis Armstrong e uma interlocutora anônima¹:

“What is jazz, Mr. Armstrong?”

“My dear lady, as long as you have to ask that question, you will never know.”



Louis D. Armstrong (1901–1971).

(Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_Armstrong)

Embora frequentemente atribuído a Louis Armstrong e sua interlocutora, a formulação exata do diálogo

e a circunstância em que teria sido travado parecem difíceis de verificar. A ideia, contudo, é bastante interessante: o *jazz* não seria algo que se pudesse definir satisfatoriamente por uma explicação verbal, mas algo que se reconhece pela experiência, pela escuta e pela sensibilidade. Assim, a própria necessidade de perguntar “o que é?” revelaria que a pessoa ainda não o compreendeu. Naturalmente, Armstrong não estaria simplesmente dizendo que o *jazz* é “indefinível”. A ideia é que certas coisas são melhor compreendidas pela experiência do que por uma definição intelectual.

O Prof. Elon, erudito e sábio que era, obviamente não forneceu quaisquer explicações sobre sua escolha para abertura de seu prefácio. É possível que ele estivesse aludindo a questões filosóficas e epistemológicas relativas aos fundamentos da matemática e, de fato, muitos matemáticos eminentes se dedicaram a escrever sobre o assunto. Após algumas linhas explicativas sobre a natureza do tema a ser tratado e dos requisitos necessários à sua leitura, vem uma de suas mais famosas pérolas, reproduzida por sucessivos autores em livros, teses, etc:

Matemática não se aprende passivamente.

E o que vem a seguir fornece uma pista sobre o diálogo de Armstrong, mostrando-nos ser mais razoável pensar que o Prof. Elon tivesse objetivos mais concretos em mente, entre eles o de comunicar aos seus leitores a ideia de que a matemática, seja lá o que for, só se aprende fazendo:

Os exercícios ensinam a usar conceitos e proposições, desfazem certos mal-entendidos, ajudam a fixar na mente ideias novas, dão oportunidade para explorar as fronteiras da validade das teorias expostas no texto e reconhecer a necessidade das hipóteses, apresentam aplicações dos teoremas demonstrados e informam o leitor sobre resultados adicionais, alguns dos quais não figuram no texto apenas por uma questão de gosto.

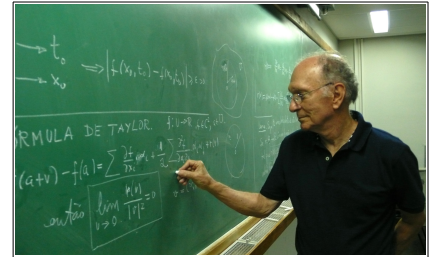
Melhor descrição sobre a importância de se trabalhar os exercícios, provavelmente não há. E o Prof. Elon, de forma muito apropriada, adverte seus leitores:

Não se desencoraje se não conseguir resolver alguns (ou muitos) deles. É que vários são difíceis mesmo. Volte a eles depois, quando tiver lido mais do livro e se sentir mais confiante.

Um tal conselho não viria melhor a calhar. Se por uma mera “questão de gosto”, ou por não encontrar melhor lugar no texto principal (um desafio que qualquer autor de livros compreende bem) ou por alguma outra razão, fato é que o Prof. Elon deixou alguns “desafios” pelo caminho, espalhados entre seus exercícios. Talvez um dos mais emblemáticos seja o seu Exercício 29 do Capítulo II¹: mostrar que se existem funções injetivas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ então existe uma bijeção $h : A \rightarrow B$. O Prof. Elon acrescenta ao final, entre parênteses, a informação de que o resultado se trata do *teorema de Cantor-Bernstein-Schröder*, ao menos indicando que, sendo um resultado nomeado em referência a três grandes matemáticos, sua resolução não será, muito provavelmente, uma tarefa corriqueira. Outros exercícios curiosos incluem, por exemplo, seus Exercícios 30 e 46 do Capítulo IV, resultados conhecidos por *lema de Stolz-Cesàro* e *teste da condensação de Cauchy*, respectivamente, aí enunciados sem esses rótulos mas que, contudo, são plenamente acessíveis ao leitor dedicado. E como não mencionar seu Exercício 64 do Capítulo V sobre o conceito de *ponto de condensação* e contendo um roteiro elegante para a dedução do *teorema de Bendixson* sobre a estrutura dos fechados da reta? Ou ainda, seu Exercício 52 do Capítulo VIII, que conclui uma sequência de exercícios anteriores sobre o conceito de *conexidade* com uma aplicação à *desigualdade da média*?

Há muitos outros pontos interessantíssimos no *Curso de Análise* do Prof. Elon, tantos e tão variados que é impossível abordá-los todos aqui. Tal qual a própria história da Análise Matemática, um livro

que começa por discutir conjuntos e funções em seu primeiro capítulo e conclui seu décimo primeiro tratando do *teorema de Ascoli-Arzelá*, um resultado profundo sobre convergência de sequências de funções, não pode ser esmiuçado em tão poucas linhas.



Prof. Elon “em ação”.

(Fonte: Google Images)

O Prof. Elon assinou o prefácio da primeira edição de seu *Curso de Análise* no Rio de Janeiro, em agosto de 1976. Não sabemos a data exata de seu lançamento, nem quando o livro chegou às mãos de seu primeiro leitor, mas podemos afirmar com certeza que, há cinquenta anos, o *Curso de Análise* vem formando e inspirando várias gerações de estudantes e professores, não apenas no Brasil, mas em toda a América Latina.

Notas

^aAlguns elementos desta história foram abordados em edições anteriores do Boletim Lavrense de Matemática (BLM); ver, por exemplo, as edições 4, 6 e 7.

^bVer edição 4 do BLM e também [1, págs. 103–106] e/ou [2, págs. 192–196].

^cVer [1, págs. 228–230, 247–248] e/ou [2, pág. 356–359].

^dVer edição 7 do BLM e também [1, págs. 246–247, 271–279, 286–290] e/ou [2, págs. 428–431, 436–445].

^eVer [1, págs. 334–339] e/ou [2, págs. 530–532].

^fVer [1, págs. 390–399] e/ou [2, págs. 611–618].

^gVer edição 6 do BLM.

^hVer [3].

ⁱO que é jazz, Sr. Armstrong? Minha cara senhora, enquanto você tiver de fazer essa pergunta, jamais saberá.

^jA numeração deste e demais exercícios aqui informada refere-se à edição [4].

Referências

- [1] BOYER, CARL; MERZBACH, UTA C. *História da Matemática*, Tradução da terceira edição americana, Editora Edgard Blücher, 2012.

- [2] EVES, HOWARD. *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, 2004. (Tradução de Hygino H. Domingues, 843p.)
- [3] HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.
- [4] LIMA, ELON LAGES. *Curso de Análise: Vol. 1*, 11ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2004.



BIOGRAFIA

Elon Lages Lima (1929-2017)

Elon Lages Lima nasceu em Maciço, Alagoas, no dia 09 de julho de 1929 e faleceu, no Rio de Janeiro, no dia 07 de maio de 2017, aos 87 anos. Foi filho de Manoel de Albuquerque Lima e Adelaide Lages Lima.



Elon Lages Lima.
(Fonte: Google Images)

No ginásio, foi aluno do professor Benedito de Moraes, que lhe despertou o interesse pela Matemática. Aos dezessete anos ingressou na Escola Preparatória de Cadetes de Fortaleza, de onde saiu um ano depois. Logo em seguida iniciou sua carreira como professor no Ginásio Farias Brito, e depois no Colégio Estadual do Ceará, em cujo corpo docente foi admitido por concurso no qual obteve o primeiro lugar, aos dezenove anos. Fez os dois primeiros anos da Licenciatura em Matemática na Faculdade Católica de Filosofia do Ceará. Graças a uma bolsa de estudos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), transferiu-se em 1952 para a Universidade do Brasil, onde obteve o Bacharelado em Matemática, em dezembro de 1953. Logo após sua chegada ao Rio de Janeiro,

presenciou a fundação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Ainda em 1954, Elon viajou para Chicago para trabalhar com Análise Funcional por sugestão de Leopoldo Nachbin. Elon, ao constatar que os matemáticos Paul Halmos, Irving Kaplansky e Irving Seagal, indicados por Nachbin, já haviam direcionado suas pesquisas para outras áreas, encontrou em Edwin Spanier uma oportunidade de retomar um contato com a Topologia já iniciado no Brasil. Foi então, na Universidade de Chicago, em 1955, que obteve o grau de Mestre e, em 1958, o de Doutor, com uma tese sobre Topologia Algébrica sob a orientação de Spanier.

Na sua dissertação de doutoramento, introduziu a noção de espectro de um espaço topológico, que hoje se constitui numa das ideias avançadas mais fundamentais para a pesquisa na área. Regressando ao Brasil, foi admitido como pesquisador do IMPA, porém, manteve seu interesse pelo desenvolvimento da Matemática na Universidade Federal do Ceará, tendo colaborado com a organização da licenciatura, do bacharelado e posteriormente da pós-graduação.

De 1962 a 1964 desfrutou de uma bolsa Guggenheim, primeiro no *Institute for Advanced Study* em Princeton e depois na *Columbia University* em Nova Iorque. Sob a influência de Stephen Smale dedicou-se à Topologia Diferencial, tendo obtido nessa época importantes resultados pioneiros sobre campos de vetores comutativos. Regressando ao Brasil, participou, junto com Roberto Salmerón, Otto Gottlieb, Jaime Tiomno e outros, da fase inicial da Universidade de Brasília. Junto com a maioria dos

professores daquela universidade, pediu demissão em 1965, seguindo pouco depois para os Estados Unidos. Em 1968 voltou para o IMPA e permaneceu lá por muitos anos.

O interesse do Prof. Elon pela divulgação da matemática no país o levou a escrever mais de 40 livros, a criar as coleções “Projeto Euclides” e “Coleção Matemática Universitária”, mantidas pelo IMPA e dirigidas por ele, bem como a escrever vários artigos expositivos, publicados pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), da qual foi presidente no período de 1973 a 1975. Foi também o criador do Programa de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio (PAPMEM) em 1990, que continua ativo e já beneficiou milhares de professores do país.

Elon recebeu vários prêmios ao longo de sua carreira, entre os quais o Prêmio Anísio Teixeira, do MEC, em 1991, e a Ordem do Mérito Científico na Classe Grã-Cruz, da Presidência da República, em 2000. Seus livros *Espaços Métricos* e *Álgebra Linear* receberam o prêmio Jabuti em 1978 e 1996, respectivamente.

Com seus livros, o Prof. Elon influenciou muitos estudantes de forma tão clara e didática, com todo o rigor que a Matemática exige; influenciou pesquisadores com seu conhecimento e experiência e, principalmente, influenciou muitas pessoas com sua história. Sorte a nossa de ter vivido no mesmo tempo do Prof. Elon Lages Lima!

Para saber mais:

➤ ABC. *Elon Lages Lima*.¹

➤ IMPA. *Morre no Rio o matemático Elon Lages Lima, ex-diretor do IMPA*.²



¹Disponível em <https://www.abc.org.br/membro/elon-lages-lima/>

²Disponível em <https://impa.br/notices/morre-no-rio-o-matematico-elon-lages-lima-ex-diretor-do-impa-aos-87-anos/>

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Elon já foi expulso da escola por saber demais. Anos depois, já adulto, ignoraria o César Lattes!

Desde muito jovem, Elon Lages Lima já demonstrava uma habilidade extraordinária para a Matemática e uma personalidade bastante questionadora.

Quando ele estudava na Escola Preparatória de Cadetes, em Fortaleza, costumava corrigir o professor quando percebia algum erro matemático.

As interrupções foram tantas que o diretor resolveu conversar com ele. O diretor, que já conhecia o excelente desempenho acadêmico do estudante, fez uma comparação curiosa:

“O último estudante que tivemos com notas tão altas foi Luis Carlos Prestes. Então, o senhor está expulso!”

Esse episódio mostra uma característica do Prof. Elon: a coragem de questionar, investigar e buscar sempre a resposta correta, uma atitude que se tornaria uma marca de sua carreira como um dos grandes matemáticos brasileiros.

No começo dos anos 1950, o jovem Elon organizava alguns “Seminários de Análise e Álgebra Linear” com Manfredo Perdigão do Carmo (à época estudante de engenharia em Recife) e Newton de Almeida Braga, à época estudante de física no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), no Rio de Janeiro, do qual César Lattes era diretor. Após conversas com Newton, César escreve ao Elon oferecendo-lhe uma bolsa de estudos no CBPF.

Esse episódio foi descrito pelo próprio Elon, em entrevista a César Camacho (ver segunda referência abaixo), em que diz não se recordar de ter sequer respondido ao César, embora este lhe tenha escrito novamente ao final do mesmo ano, incluindo toda a papelada para a tal bolsa. Foi assim que, em 1952, Elon saiu de Fortaleza em direção ao Rio de Janeiro.

Para saber mais:

■ IMPA. *Histórias sobre o admirável professor Elon Lages Lima*, 03 de agosto de 2017. ³

■ IMPA. *Entrevista com Eméritos II – Elon Lages Lima*. Entrevista realizada em 2010. Youtube, 17 de maio de 2017. ⁴

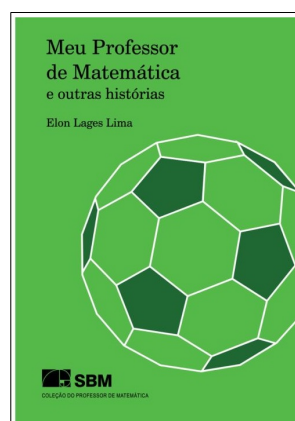


SUGESTÃO DE LEITURA

Elon e seu professor de Matemática

Entre os muitos livros escritos por Elon Lages Lima, sugerimos a leitura de *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática. A primeira edição foi publicada em 1991. A sétima e última edição foi publicada em 2025.

O livro começa com um belo texto, no qual o Prof. Elon descreve de forma extraordinária o seu professor de Matemática na escola secundária (o equivalente ao atual Ensino Fundamental II), Benedito de Moraes. Esse texto fascinante serve de inspiração para as pessoas que exercem ou desejam exercer o magistério, e desperta no leitor o desejo de ter sido seu aluno.



Capa de *Meu Professor de Matemática e outras histórias*.
(Fonte: <https://loja.sbm.org.br/>)

O livro reúne doze artigos sobre variados temas de Matemática, como geometria, equações, médias, e outros. No último artigo, o Prof. Elon tece

comentários sobre o livro *O Ensino da Matemática na Escola Secundária por Meio de Aplicações* de Herbert Freymont, publicado em 1979. Cada artigo é permeado de fatos históricos, conceitos e raciocínios matemáticos.

O livro termina com textos sobre temas controversos e recorrentes no estudo da Matemática, por exemplo:

**Qual o valor de 0^0 ?
O que é o número π ?
 0 é um número natural?**

Trinta e cinco anos após a publicação da primeira edição, *Meu Professor de Matemática e outras histórias* continua relevante para professores e estudantes de Matemática.



³Disponível em: <https://impa.br/notices/historias-sobre-o-matematigo-admiravel-elon-lages-lima/>

⁴Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=LM-YUVBrCKA>

DESAFIOS MATEMÁTICOS

Desafios da edição

Envie sua resolução dos desafios desta seção para nosso e-mail. A mais criativa será divulgada na próxima edição do Boletim.

- 1) Um resultado básico da teoria de conjuntos afirma que:

**Se os conjuntos A e B têm, respectivamente, n e m elementos então existem n^m funções de A em B .
(Ver [1, pág. 48, Cor. 4].)**

Pergunta-se: de quantas formas 5 flores podem ser colocadas em 4 vasos, sendo possível deixar alguns destes vasos vazios?

- 2) (O valor absoluto de uma sequência consegue revelar seu verdadeiro limite?) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1$. É possível determinar o limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- 3) Um resultado básico de Análise Matemática sobre sequências de números reais afirma que:

Toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente.
(Ver [1, pág. 111, Teo. 4].)

Imagine uma pessoa subindo uma escada de um prédio infinitamente alto. A caminhada dessa pessoa segue duas regras rígidas:

- a) Ela só anda para cima, ou seja, a cada passo, a altura em que ela se encontra é maior ou igual à altura do passo anterior. Ela nunca desce um único degrau.
- b) Existe um teto no prédio: uma placa no andar 100 avisa que é impossível passar dali.

Se a pessoa dá infinitos passos sem nunca descer e está impedida de passar do teto, a altura dela precisa convergir para um valor limite exato, ou ela pode "acumular" passos para sempre sem se aproximar de lugar algum?

Referências

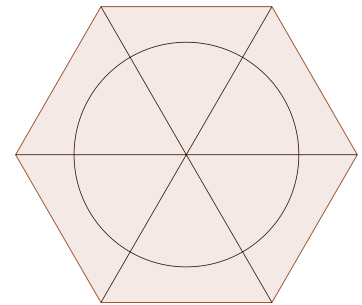
- [1] LIMA, ELON LAGES. *Curso de Análise: Vol. 1*, 11ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2004.

Respostas dos desafios da Edição 25 (acesse-a aqui):

- 1) Pedro teve um prejuízo de R\$160,00, pois se o prejuízo com a venda para Cecília foi de 25% então a bicicleta de Cecília custava R\$1600,00 já que 75% de

R\$1600 é R\$1200. Assim, nessa venda ele perdeu R\$400,00. Por outro lado, a bicicleta vendida à Geisi custava R\$960,00, porque 25% de R\$960,00 é R\$240,00, o que somando com o valor da bicicleta resulta em R\$1200,00, logo ele ganhou R\$240,00 com a venda para Geisi. No total ele perdeu R\$160,00 que é a diferença entre o que ele ganhou e o que ele perdeu nas vendas.

- 2) Para simplificar o problema, faça 6 cópias do campo, conforme a figura a seguir:



Queremos que o círculo tenha a metade da área do hexágono. A área do círculo é πr^2 , onde r é o raio do setor. O hexágono tem 100m de lado, portanto o raio é aproximadamente 64,3037m.



Participação

O Boletim Lavrense de Matemática quer ouvir você. Envie-nos sugestões de reportagem, sua opinião, correções e dúvidas através de nosso e-mail.