I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2016

NÍVEL III - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **D**

   Solução: Observemos que as respostas de Pedro e Mariana são opostas uma da outra, isto é, se um falou a verdade então o outro mentiu. Vemos assim que o mentiroso é Pedro ou Mariana. Como só existe um mentiroso, podemos concluir que Thais falou a verdade. Portanto foi a Mariana.

2. Resposta: **C**

   Solução: Observe que os exemplos indicam o seguinte padrão:

$$11 \times \underbrace{9090 \cdots 9091}_{n \text{ algarismos}} = 1\underbrace{0 \cdots 0}_{n \text{ zeros}}1$$

   Deste modo,

$$\begin{aligned} 44 \times 181818182 &= 4 \times 11 \times 90909091 \times 2 \\ &= 4 \times 1000000001 \times 2 \\ &= 8000000008 \end{aligned}$$

3. Resposta: **A**

   Solução: Sendo n o ano de nascimento de Marlon, sabemos que $1801 \leq n \leq 1850$. Além disso, sabemos que Marlon completou x anos no ano x^2. Reescrevendo isso em forma de equação temos:

$$n + x = x^2 \quad \Rightarrow \quad n = x^2 - x = x(x-1)$$

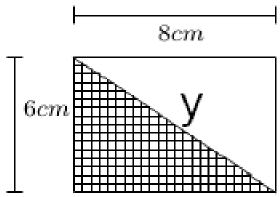
   Ou seja, n é o produto de dois números consecutivos. Observando então os seguintes produtos:

$$42 \times 41 = 1722, \quad 43 \times 42 = 1806, \quad 44 \times 43 = 1892$$

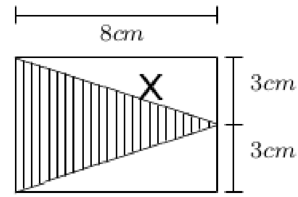
   vemos que o único número entre 1801 e 1850 que é igual ao produto de dois números consecutivos é o 1806, e assim $n = 1806$.

4. Resposta: **D**

   Solução: Sejam x e y como nas figuras abaixo.

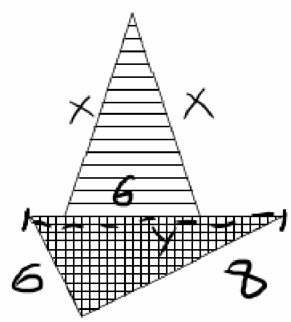


Folha quadriculada



Folha listrada

   Observando a seguinte figura:



   Podemos escrever o perímetro do barco em função de x e y. Mais especificamente:

$$P = 6 + 8 + (y - 6) + 2x = 8 + y + 2x$$

   Agora, segue do Teorema de Pitágoras que:

$$y = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \;\text{ e }\; x = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$$

   Logo,

$$P = 8 + 10 + 2\sqrt{73} = 18 + 2\sqrt{73}$$

5. Resposta: **A**

   Solução: Observe que $\tan(45°) = 1$, logo $\log_{10}(\tan(45°)) = \log_{10}(1) = 0$. Assim :

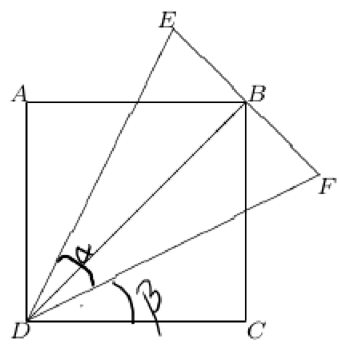
$$\log_{10}(\tan(1°)) \times \cdots \times \log_{10}(\tan(45°)) \times \cdots \times \log_{10}(\tan(89°)) =$$
$$\log_{10}(\tan(1°)) \times \cdots \times 0 \times \cdots \times \log_{10}(\tan(89°)) = 0$$

6. Resposta: **C**

   Solução: Sejam $G1, G2$ e $G3$ os gêmeos. Temos 4 possibilidades de escolha para a fileira onde $G1$ irá se sentar e mais 4 possibilidades de escolha para a coluna, ou seja, temos 16 possíveis lugares para $G1$ se sentar. Escolhida a posição de $G1$, temos $3\times 3 = 9$ possibilidades de cadeiras para $G2$ se sentar, pois este não pode se sentar na mesma fileira e coluna de $G1$. Finalmente, escolhidos os acentos de $G1$ e $G2$, sobram $2\times 2 = 4$ possibilidades de cadeiras para $G3$, de modo que ele não fique na mesma linha ou coluna de $G1$ ou $G2$. Assim, pelo princípio multiplicativo temos $16 \times 9 \times 4 = 576$ formas de sentar os gêmeos sem que dois deles estejam na mesma linha ou coluna.

7. Resposta: **B**

   Solução: Sejam $\alpha = E\hat{D}F$ e $\beta = F\hat{D}C$.



Como o triângulo EDF é isósceles e o ângulo $E\hat{F}D$ é o dobro do ângulo $D\hat{E}F$, então $E\hat{F}D = F\hat{E}D = 2\alpha$. Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que:

$$E\hat{F}D + F\hat{E}D + D\hat{E}F = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ.$$

Além disso, como DB é a mediana do triângulo EDF e este é isósceles, segue que $B\hat{D}F = \alpha/2 = 18^\circ$.

Agora, observe que o triângulo DBC é também isósceles e que o ângulo $D\hat{C}B$ é reto, isto é, $D\hat{C}B = 90^\circ$. Como $C\hat{D}B = 45^\circ$, pois BD é a diagonal do quadrado, temos $\beta = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$.

8. Resposta: **B**

   Solução: Observemos que, para sobrar um chocolate branco na caixa que Andréia escolheu, significa dizer que ela escolheu a caixa que contém dois chocolates brancos. Neste caso, queremos calcular a probabilidade de Andréia escolher a caixa com dois chocolates brancos, sabendo que ela escolheu uma caixa que contém pelo menos um chocolate branco. Temos assim um problema de probabilidade condicional. Lembremos então que a probabilidade de um evento B ocorrer dado que o evento A já ocorreu é dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

Considere então os seguintes eventos:

A- Andreia escolheu uma caixa com pelo menos um chocolate branco.

B- Andreia escolheu a caixa com dois chocolates brancos.

Neste caso, $P(A) = 2/3$, pois existem duas caixas em três que possuem pelo menos um chocolate branco.

Para calcular $P(B \cap A)$, devemos observar que se Andreia escolher a caixa com dois chocolates brancos, obviamente ela escolherá uma caixa com, pelo menos, um chocolate branco, ou seja, $P(B \cap A) = P(B)$. Como existe uma única caixa em três com dois chocolates brancos, segue que $P(B \cap A) = P(B) = 1/3$.

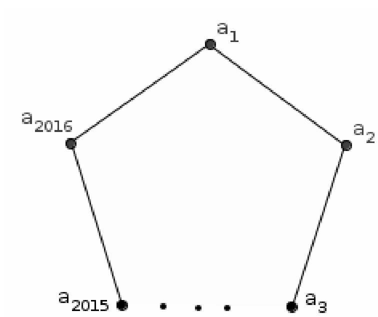
Deste modo, a probabilidade de Andreia escolher a caixa com dois chocolates brancos sabendo que ela escolheu uma caixa que contém pelo menos um chocolate branco é dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2.$$

Solução Alternativa: Sejam $C1$ a caixa com dois chocolates brancos, $C2$ a caixa com dois amargos e $C3$ a caixa com um branco e um amargo. Como Andréia escolheu uma caixa com, pelo menos, um chocolate branco, sabemos que a caixa escolhida foi a $C1$ ou a $C3$. Agora, para que na caixa que ela escolheu tenha outro chocolate branco, é necessário que ela tenha escolhido a caixa $C1$, ou seja, existe uma chance em duas de o evento em questão ocorrer. Logo, a probabilidade é $1/2$.

9. Resposta: **C**

Solução: Vamos enumerar os vértices do polígono de a_1 à a_{2016} de modo que a ordenação dos índices seja dada no sentido horário. Neste caso, para todo $1 < i < 2016$ temos que a_i está entre a_{i-1} e a_{i+1}, a_1 está entre a_{2016} e a_2, e a_{2016} está entre a_{2015} e a_1.



Por hipótese temos que se a_i está entre a_j e a_k, então $a_i = \frac{a_j + a_k}{2}$. Neste caso, para $1 < i < 2016$ temos:

$$a_i = \frac{a_{i+1} + a_{i-1}}{2} \Rightarrow 2a_i = a_{i+1} + a_{i-1} \Rightarrow a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1}.$$

Segue que:

$$a_{2016} - a_{2015} = a_{2015} - a_{2014} = \cdots = a_2 - a_1.$$

Ou seja, temos uma Progressão Aritmética (p.a.), que é caracterizada por uma sequência de números onde dois termos consecutivos possuem a mesma diferença. Essa diferença é chamada de razão (r). Cada termo da p.a. é definido da seguinte forma:

$$a_i = a_{i-1} + r \Rightarrow a_i = a_1 + (i-1)r.$$

No problema em questão, a sequência de vértices do polígono é uma p.a. de razão $r = a_2 - a_1$. Por outro lado como a_1 está entre a_{2016} e a_2 temos:

$$a_1 = \frac{a_2 + a_{2016}}{2} \Rightarrow 2a_1 = a_1 + r + a_1 + 2015r \Rightarrow 2016r = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Disso segue que $a_i = a_1$, para todo $1 \leq i \leq 2016$. E como existe um vértice que foi preenchido com o número 1, segue que $a_i = 1$, para $1 \leq i \leq 2016$. Assim, temos a soma dos valores de cada vértice que podemos representar com a notação de somatório, como nos exemplos abaixo.

$$\sum_{i=1}^{4} x = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{i=1}^{3} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

Logo, para o problema, temos:

$$\sum_{i=1}^{2016} a_i = \sum_{i=1}^{2016} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2016 \ vezes} = 2016.$$

10. Resposta: **D**

Solução: Inicialmente vamos considerar que o comprimento do seguimento $\overline{AB}$ é L. Como F, G, E e H são os pontos médios dos lados do quadrado $ABCD$, então os seguimentos $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$ e $\overline{EF}$ possuem o mesmo comprimento que é dado por:

$$FG = \sqrt{FB^2 + BG^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

Agora, como K, J, I e L são os pontos médios dos lados do quadrado $EFGH$, então repetindo o argumento acima temos que os seguimentos $\overline{JK}$, $\overline{KL}$, $\overline{LI}$ e $\overline{IJ}$ possuem o mesmo comprimento e

$$JK = \frac{\sqrt{2}}{2}FG = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{1}{2}L.$$

Observe que o raio da circunferência é dado por:

$$R = \frac{JK}{2} = \frac{L}{4}.$$

De modo que a área da circunferência é:

$$A = \pi R^2 = \frac{\pi L^2}{16}.$$

Como, por hipótese, temos $L = 32$, segue que $A = \pi(32)^2/16 = 64\pi$.