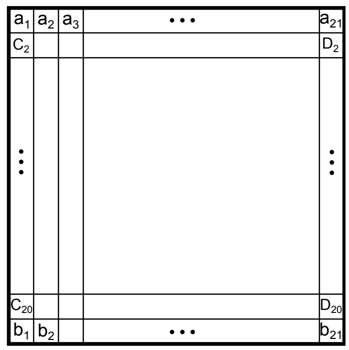
I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2016

NÍVEL III - 2ª FASE - Gabarito

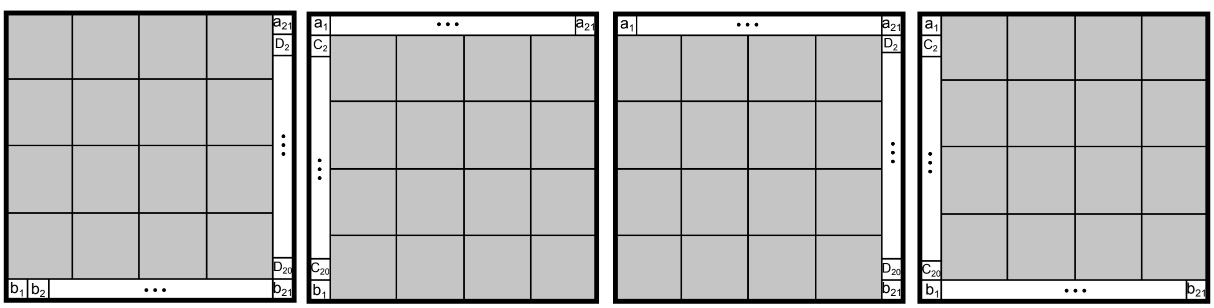
1. Considere o quadrado 21×21 da figura e seja S a soma dos números escritos em todas as casas do tabuleiro.



A soma B dos números escritos na borda do tabuleiro é dada por:

$$B = a_1 + a_2 + \cdots + a_{21} + C_2 + \cdots + C_{20} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_1 + \cdots + b_{21}. \qquad (1)$$

O tabuleiro pode ser dividido como nas figuras (I), (II), (III) ou (IV).



(I) (II) (III) (IV)

Em todos os casos, a soma dos números das regiões cinzas é igual a zero, pois estas regiões estão subdivididas em quadrados 5×5. Assim, por (I):

$$S = a_{21} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_1 + \cdots + b_{21},$$

por (II):

$$S = a_1 + \cdots + a_{21} + C_2 + \cdots + C_{20} + b_1,$$

por (III):

$$S = a_1 + \cdots + a_{21} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_{21},$$

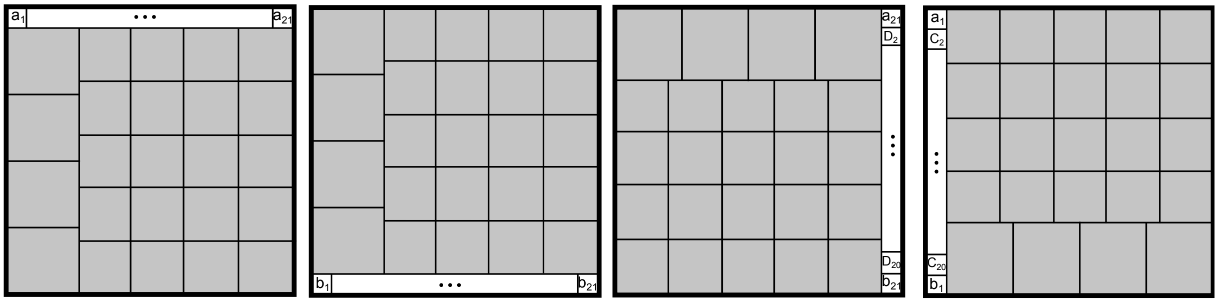
e por (IV):

$$S = a_1 + C_2 + \cdots + C_{20} + b_1 + \cdots + b_{21}.$$

Somando estas 4 equações e usando a equação (1):

$$4S = 2B + a_1 + a_{21} + b_1 + b_{21}. \qquad (2)$$

Outras maneiras de dividir o tabuleiro é como nas figuras (i), (ii), (iii) e (iv).



(i) (ii) (iii) (iv)

Novamente, a soma dos números das regiões cinzas é igual a zero, pois estas regiões estão subdivididas em quadrados 4×4 e 5×5. E desta vez temos, por (i):

$$S = a_1 + \cdots + a_{21},$$

por (ii):

$$S = b_1 + \cdots + b_{21},$$

por (iii):

$$S = a_{21} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_{21},$$

e por (iv):

$$S = a_1 + C_2 + \cdots + C_{20} + b_1.$$

Somando estas 4 equações e usando a expressão (1):

$$4S = B + a_1 + a_{21} + b_1 + b_{21}. \tag{3}$$

Subtraindo a equação (2) da equação (3) encontramos:

$$B = 0.$$

Isto é, a soma dos números escritos na borda do tabuleiro é igual a 0.

2. Primeiro, devemos notar que 2016 é divisível por 24. Portanto, podemos solucionar o problema considerando apenas o conjunto:

$$A = \{1, 2, 3, \cdots, 23, 24\},$$

pois os números restantes deixam os mesmos restos ao dividir por 24. Por exemplo, os números do conjunto $\{25, 26, \cdots, 47, 48\}$ deixam os mesmos restos que os números do conjunto $\{1, 2, \cdots, 23, 24\}$ na divisão por 24. Assim, dada uma tripla de números do primeiro conjunto, se trocarmos um deles por outro do segundo conjunto que deixa o mesmo resto na divisão por 24, a divisibilidade do produto não muda.

Considere então uma tripla de números a, b e c do conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, 23, 24\}$. E sejam P_{M24}, P_{M8} e P_{M3} as probabilidades do produto abc ser múltiplo de 24, 8 e 3, respectivamente. Para o produto abc ser divisível por 24, ele deve ser divisível por 8 e por 3. Assim,

$$P_{M24} = P_{M8} \times P_{M3}.$$

Para calcular P_{M3} encontraremos a probabilidade do produto abc não ser divisível por 3. Isso acontece se os números a, b e c não forem múltiplos de 3. A probabilidade de um número do conjunto A não ser múltiplo de 3 é $\dfrac{2}{3}$ (pois, a cada 3 números 2 não são múltiplos de 3). Assim, a probabilidade de abc não ser múltiplo de 3 é: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$. Logo,

$$P_{M3} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}.$$

Para calcular P_{M8} encontraremos a probabilidade do produto abc não ser divisível por 8. Isso ocorre em três situações:

- os três números a, b e c serem ímpares. A probabilidade de um número do conjunto A ser ímpar é $\dfrac{1}{2}$. Portanto, a probabilidade de abc ser ímpar é: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$;
- dois números serem ímpares e um número ser par, exceto 8, 16 e 24. A probabilidade do número ser ímpar é $\dfrac{1}{2}$. A probabilidade de ser par, exceto 8, 16 e 24 é $\dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$ (há 9 números pares, excluindo 8, 16 e 24, dentre os 24 elementos de A). Assim, a probabilidade de abc ser o produto de dois números ímpares e um número par (exceto 8, 16 e 24) é: $3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \dfrac{3}{8}$ (multiplicamos por 3 porque o número par pode ser a, b ou c);
- um número ser ímpar e dois números serem pares de modo que o produto não seja divisível por 8. A probabilidade de ser ímpar é $\dfrac{1}{2}$. Os números pares não podem ser múltiplos nem de 4 e nem de 8 para que o produto não seja divisível por 8. Então, eles devem ser números do conjunto $\{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$. E a probabilidade de ser um desses números é $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$. Portanto, a probabilidade de abc ser o produto de um número ímpar e dois pares de modo que o resultado não seja divisível por 8 é: $3 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ (multiplicamos por 3 porque o número ímpar pode ser a, b ou c).

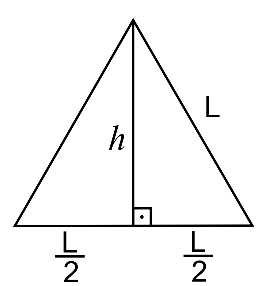
Logo,

$$P_{M8} = 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{2}.$$

E, temos por fim:

$$P_{M24} = P_{M8} \times P_{M3} = \frac{1}{2} \times \frac{19}{27} = \frac{19}{54}.$$

3. (a) Em um triângulo equilátero de lado L, a altura h divide o lado em dois segmentos de mesmo comprimento - veja figura.



Usando o teorema de Pitágoras:

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}L\ .$$

Para um triângulo de lado 2, temos: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$.

(b) Se o triângulo tivesse 2 lados ao longo das linhas da malha ele seria um triângulo retângulo, mas

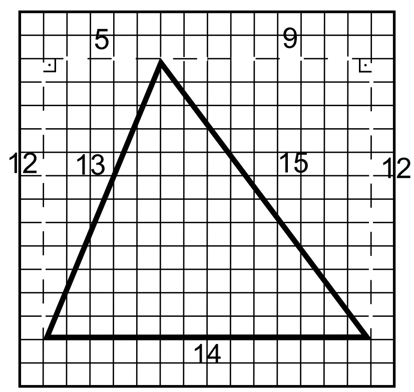
$$15^2 \neq 14^2 + 13^2$$

e, portanto, isso não pode acontecer. Então, apenas um dos lados deve estar ao longo das linhas da malha ou nenhum deles deve estar.

Se o lado não está ao longo das linhas, ele é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de medidas inteiras (lembrando que os lados de cada quadrado medem 1). Como:

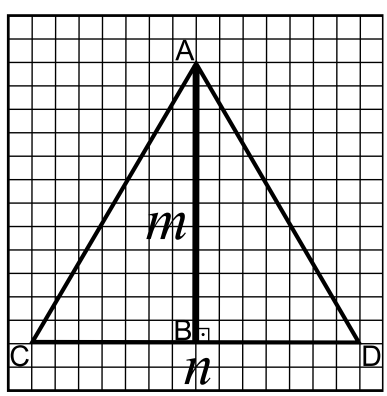
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

o triângulo será como na figura:



OBS: O lado 14 deve estar ao longo da linha, pois não existem inteiros a e b tais que $a^2 + b^2 = 14^2$.

(c) Suponha que um triângulo equilátero possa ser desenhado sobre a malha como no item (b). Isto é, como mostrado na figura:



O lado do triângulo é igual a n, sendo n um número inteiro (pois, cada lado do quadrado mede 1). Como o vértice A está sobre um cruzamento e o lado CD está sobre uma linha, de A até B há m quadrados (m também inteiro). Então, a medida da altura h do triângulo será:

$$h = m \cdot 1$$
$$h = m \ .$$

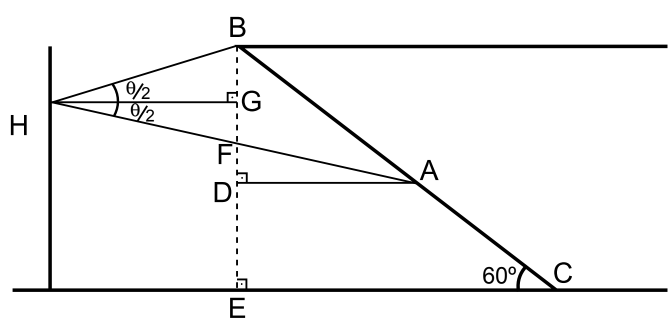
Pelo item (a), sabemos que $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$, logo:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$
$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}n$$
$$\frac{2m}{n} = \sqrt{3} \ .$$

Como m e n são inteiros, a expressão acima diz que $\sqrt{3}$ é racional, o que é falso. Portanto, não é possível desenhar um triângulo equilátero sobre a malha como feito no item (b).

<u>OBS:</u> Também pode ser mostrado (usando o cálculo de áreas, por exemplo) que, mesmo que nenhum dos três lados do triângulo equilátero esteja ao longo das linhas, é impossível desenhar um triângulo equilátero com os três vértices nos cruzamentos da malha.

4. (a) Considere a figura



Como o ângulo de incidência é igual ao de reflexão, temos $B\hat{H}G = G\hat{H}F = \frac{\theta}{2}$. O enunciado afirma que $\overline{BE} = 10$ m e que $B\hat{C}E = 60°$. Então, considerando o triângulo BEC:

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$$
$$\sqrt{3} = \frac{10}{\overline{EC}}$$
$$\overline{EC} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ m.}$$

Do enunciado, $\overline{BC} = 2\overline{BA}$ e, uma vez que os triângulos BEC e BDA são semelhantes (pois, possuem dois ângulos iguais):

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$$
$$\frac{10}{\overline{BD}} = \frac{2\overline{BA}}{\overline{BA}}$$
$$\overline{BD} = 5 \text{ m.}$$

E,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DA}}$$
$$\frac{10}{5} = \frac{10/\sqrt{3}}{\overline{DA}}$$
$$\overline{DA} = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ m.}$$

Do enunciado, $\overline{HG} = \frac{20}{\sqrt{3}}$ m. Os triângulos HGF e FDA são semelhantes, pois eles possuem um ângulo reto e $H\hat{F}G$ é oposto pelo vértice a $D\hat{F}A$. Logo,

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{FD}}$$
$$\frac{20/\sqrt{3}}{5/\sqrt{3}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{FD}}$$
$$\overline{FD} = \frac{1}{4}\overline{GF}.$$

Como os triângulos HGB e HGF são congruentes (pois, possuem os ângulos iguais e um lado correspondente comum - HG): $\overline{BG} = \overline{GF}$. E do fato que $\overline{BD} = 5$ m:

$$\overline{BD} = \overline{BG} + \overline{GF} + \overline{FD}$$
$$5 = \overline{BG} + \overline{BG} + \frac{1}{4}\overline{BG}$$
$$\overline{BG} = \frac{20}{9} \text{ m.}$$

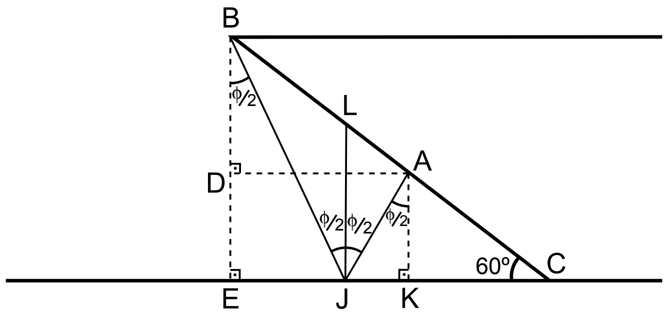
Considerando o triângulo HGB:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{BG}}{\overline{HG}}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{20/9}{20/\sqrt{3}}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Finalmente, usando a fórmula dada (com $x = \frac{\theta}{2}$):

$$\operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}$$
$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/9}{1 - \left(\sqrt{3}/9\right)^2}$$
$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{13}.$$

(b) Considere a figura:



Do item (a) sabemos que $\overline{DA} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ m $= \overline{EK}$, $\overline{EC} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ m e $\overline{DE} = 5$ m $= \overline{AK}$.

Como o ângulo de incidência é igual ao de reflexão temos $B\hat{J}L = L\hat{J}A = \frac{\phi}{2}$. Os ângulos $E\hat{B}J$ e $J\hat{A}K$ também são iguais a $\frac{\phi}{2}$, pois são alternos internos. Assim, os triângulos EBJ e KAJ são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{JK}}$$
$$\frac{10}{5} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{JK}}$$
$$\overline{EJ} = 2\overline{JK} \ .$$

Mas,

$$\overline{EJ} + \overline{JK} = \overline{EK}$$
$$2\overline{JK} + \overline{JK} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$
$$\overline{JK} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \ .$$

Considerando o triângulo KAJ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\overline{JK}}{\overline{AK}} = \frac{5/3\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Usando a fórmula dada:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{3\sqrt{3}}{13}.$$