II OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2017

NÍVEL I - 2ª FASE - Gabarito

1. Considere que Andréia irá sacar x notas de R\$ 2,00, y notas de R\$ 5,00 e z notas de R\$ 10,00. Então,
$$2x + 5y + 10z = 100,$$
com x, y e z inteiros não negativos. Note que x deve ser múltiplo de 5, pois $5y$, $10z$ e 100 também o são e que y deve ser múltiplo de 2, pois $2x$, $10z$ e 100 o são. Assim, $x = 5k$ e $y = 2q$ sendo k e q inteiros não negativos. Substituindo na equação anterior:
$$\begin{aligned} 10k + 10q + 10z &= 100 \\ k + q + z &= 10. \end{aligned}$$
Como k, q e z são inteiros, as possibilidades são:
$$\begin{aligned} &\text{se } k = 10 : q = 0 \text{ e } z = 0 \rightarrow \text{ 1 maneira;} \\ &\text{se } k = 9 : q = 0, z = 1 \text{ ou } q = 1, z = 0 \rightarrow \text{ 2 maneiras;} \\ &\text{se } k = 8 : q = 0, z = 2 \text{ ou } q = 1, z = 1 \text{ ou } q = 2, z = 0 \rightarrow \text{ 3 maneiras;} \\ &\ldots \\ &\text{se } k = 0 : q = 0, z = 10 \text{ ou } q = 1, z = 9 \ \cdots \text{ ou } q = 10, z = 0 \rightarrow \text{ 11 maneiras.} \end{aligned}$$
Assim, há $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 + 11 = 66$ maneiras diferentes que Andréia pode sacar o dinheiro.

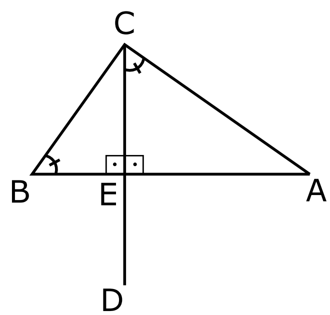
2. (a) Efetuando as contas, temos:
$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \\ 2^6 &= 64 \\ 2^7 &= 128 \\ 2^8 &= 256 \end{aligned}$$
Logo, o último dígito de 2^8 é 6.

(b) Pelo cálculo do item anterior, vemos que há um padrão no último dígito das potências de 2. Os dígitos das primeiras potências são:

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \cdots$$

Eles se repetem de 4 em 4. Assim, as potências que são múltiplas de 4 terminam em 6. Como $2016 \div 4 = 504$, concluímos que 2^{2016} termina em 6. Logo o último dígito de 2^{2017} é 2.

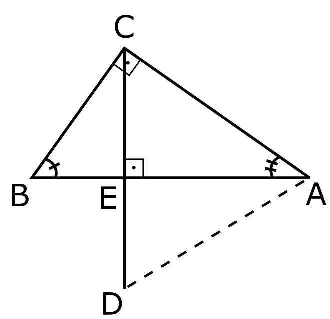
3. (a) Como CD é perpendicular a AB, temos que $B\hat{E}C = 90^{\text{o}} = A\hat{E}C$. O enunciado afirma que $A\hat{B}C = D\hat{C}A$. Logo, os triângulos BCE e CAE têm dois ângulos de mesma medida e, assim, são semelhantes.



(b) Como os triângulos BCE e CAE são semelhantes, temos $B\hat{C}E = C\hat{A}E$. Da soma dos ângulos internos do triângulo BCE: $B\hat{C}E + C\hat{B}E = 90^{\text{o}}$.
Assim, $B\hat{C}A = B\hat{C}E + E\hat{C}A = B\hat{C}E + C\hat{B}E = 90^{\text{o}}$. Concluímos que os triângulos BAC e CAE são semelhantes, pois $B\hat{C}A = A\hat{E}C$ e $C\hat{A}B = C\hat{A}E$.

(c) Considere que $CD = x = AB$ (pelo enunciado) e $EA = y$. Como os triângulos BAC e CAE são semelhantes:

$$\frac{CA}{AB} = \frac{EA}{CA}$$
$$\frac{5}{x} = \frac{y}{5}$$
$$xy = 25.$$



O segmento EA é a altura do triângulo ACD em relação ao lado CD. Portanto, a área de ACD é:

$$A_{ACD} = \frac{CD \times EA}{2} = \frac{xy}{2} = \frac{25}{2}.$$

4. (a) Temos que b e c são inteiros positivos, então $c \leq bc$ e, assim, $c < bc+1$. Então, a razão $\dfrac{c}{bc+1}$ é menor do que 1.

   (b) Efetuando a divisão, temos $2017 = 106 \times 19 + 3$. Assim,

$$\frac{2017}{19} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$$

$$\frac{106 \times 19 + 3}{19} = a + \frac{1}{\frac{bc+1}{c}}$$

$$106 + \frac{3}{19} = a + \frac{c}{bc+1}$$

Como a, b e c são inteiros positivos, e como $\dfrac{c}{bc+1} < 1$, a relação implica que:

$$a = 106$$

$$c = 3k$$

$$bc + 1 = 19k$$

sendo k um inteiro positivo. As duas últimas equações implicam que $b = \dfrac{19k-1}{3k}$ que tem solução inteira apenas[1] para $k = 1$: $b = \dfrac{19 \times 1 - 1}{3 \times 1} = 6$. Portanto, os valores são $a = 106$, $b = 6$ e $c = 3$.

[1]Não era necessário que o estudante mostrasse que a única solução inteira é para $k = 1$. Bastava chegar na solução $b = 6$ e $c = 3$. Para mostrar tal fato, é só observar que $19k - 1$ não é múltiplo de k para $k \neq 1$ ($k > 0$).