I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2018

NÍVEL III - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **A**

   Solução: Primeiro notemos que 355 é um número primo. Como só podemos escrever $355 = p+q$ se os números naturais p e q não forem ambos pares ou ambos ímpares e como 2 é o único número primo par, segue que $355 = 2 + q$, o que implica em $q = 353$, que de fato é um número primo ímpar.

2. Resposta: **C**

   Solução: Observemos que $1234n679 \times 54 = 666666666$ então

$$\begin{aligned} 1234n679 &= 666666666 \div 54 \\ &= 12345679 \end{aligned}$$

   e assim $n = 5$.

3. Resposta: **D**

   Solução: Como o grupo de 6 pessoas elaborou as 50 questões, então podemos assumir que cada membro do grupo elaborou pelo menos uma questão e toda questão foi elaborada por alguém.

   Afirmação: Alguém elaborou pelo menos 9 questões. De fato, caso contrário cada um teria elaborado no máximo oito questões, o que nos daria um total de 48 questões. Isto implicaria na sobra de duas questões que não teriam sido elaboradas por ninguém, o que é um absurdo.

4. Resposta: **A**

   Solução: Primeiramente devemos nos lembrar que as operações que não estão dentro de parênteses devem ser efetuadas na ordem em que aparecem, isto é, as operações são efetuadas da esquerda para a direita. Deste modo, de acordo com as tabelas de operações apresentadas temos:

$$\begin{aligned} (\bigstar + \bigcirc) * \bigstar + (\bigstar * \bigcirc) * \triangle &= \triangle * \bigstar + \bigcirc * \triangle \\ &= \triangle + \bigcirc * \triangle \\ &= \bigcirc * \triangle \\ &= \triangle \end{aligned}$$

5. Resposta: **C**

   Solução: O faturamento F do posto em um dia é dado por

$$F = (\textit{Litros vendidos}) \times (\textit{Custo de cada litro após desconto})$$

   Se o dono do posto, em um determinado dia, der x centavos de desconto, então o custo de cada litro, em reais, será

$$\textit{Custo de cada litro após desconto} = 5 - \frac{x}{100}.$$

   Por outro lado, com um desconto de x centavos, a quantidade de litros vendidos, além dos 5000, será igual a $200x$. Assim, temos que

$$\textit{Litros vendidos} = 5000 + 200x.$$

   Portanto, o faturamento diário será

$$F = \Big(5000 + 200x\Big)\left(5 - \frac{x}{100}\right).$$

6. Resposta: **B**

   Solução: Se considerarmos um plano cartesiano cuja origem é a posição de Neimar, sabemos que a trajetória da bola é uma parábola do tipo $y = -x^2 + ax$. Para obter o valor de a, devemos levar em consideração três coisas: o gol está a uma distância de 6 metros do jogador; a trave possui 2 metros de altura; a bola bate no travessão. Concluímos então que, no instante que a bola bate no travessão, sua posição é $x = 6$ e $y = 2$, ou seja, $y(6) = 2$. Deste modo:

$$\begin{aligned} y(6) = 2 \quad &\Rightarrow \quad -36 + 6a = 2 \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

   Ou seja, a trajetória da bola é descrita pela parábola $y = -x^2 + \frac{19}{3}x$.

   Observemos então que a altura máxima atingida pela bola é dada pelo y do vértice da parábola acima descrita e que o y do vértice de uma parábola dada pela equação $y = ax^2 + bx + c$ é dado por

$$y_{\text{vértice}} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

   Deste modo, a altura máxima da bola é

$$y_{\text{vértice}} = \frac{-\left[\left(\frac{19}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0\right]}{4 \cdot (-1)} = \frac{361}{36} \text{ metros.}$$

7. Resposta: **C**

   Solução: Temos que $143 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3$. Logo, para todo inteiro positivo n, temos que os números 143 e 3 devem ter o mesmo último dígito. Em particular, podemos descobrir o último dígito de 143^{143} via o último dígito de 3^{143}. Agora, note que os últimos dígitos das potências de 3 ocorrem de forma periódica com período 4.

$$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81$$
$$3^5 = 243,\ 3^6 = 729, 3^7 = 2187,\ 3^8 = 6561$$

   Assim, o último dígito de 3^{143} é o mesmo último dígito de 3^3 pois 143 dividido pelo período 4 deixa resto 3. Concluímos assim, que os números 143^{143}, $3^{143}e$ 3^3 têm todos o mesmo último dígito 7.

8. Resposta: **B**

   Solução: Seja S o valor da soma de todos os números da forma abc, onde a, b e c pertencem ao conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Observemos ainda que para quaisquer algarismos $a, b, c, a', b', c' \in X$ temos:

$$\begin{aligned} abc + a'b'c' &= (100a + 10b + c) + (100a' + 10b' + c') \\ &= 100(a + a') + 10(b + b') + (c + c') \end{aligned}$$

   De maneira geral, se R_1 é o valor da soma de todos os algarismos que aparecem na casa das centenas, R_2 é o valor da soma de todos os algarismos que aparecem na casa das dezenas e R_3 é o valor da soma de todos os algarismos que aparecem na casa das unidades, então $S = 100R_1 + 10R_2 + R_3$.

   Observemos ainda que fixado $a \in X$, temos 5 possibilidades de escolha para o algarismo b e também 5 possibilidades para c, de modo que existem 25 números cujo algarismo da centena é igual a a. Como isso é válido para todo $a \in X$ temos que

$$R_1 = \sum_{a \in X} 25a = 25 \sum_{a \in X} a = 25 \times 15 = 375.$$

   O somatório é um símbolo matemático que indica a soma de uma sequência de números. Exemplo:

$$\sum_{i=1}^{4} x = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$\sum_{i=1}^{3} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

   Repetindo este argumento vemos que $R_1 = R_2 = R_3 = 375$, de modo que

$$S = 100 \times 375 + 10 \times 375 + 375 = 41625.$$

9. Resposta: **A**

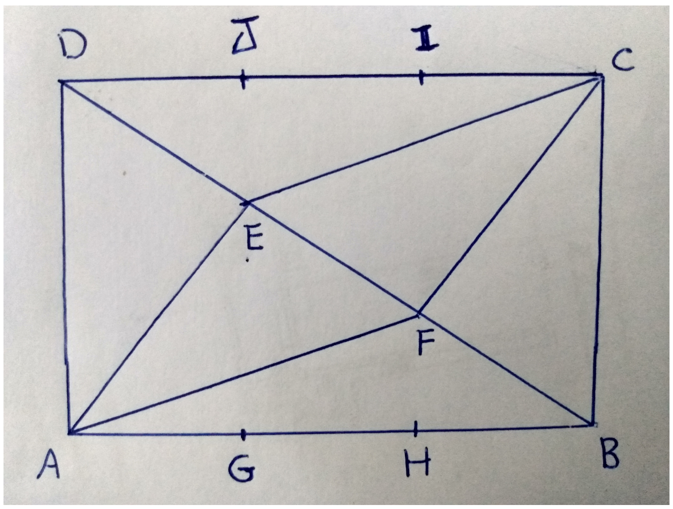
   Solução: Vamos usar a figura abaixo para orientar nosso raciocínio. Denote por E e F os dois pontos da diagonal que são conectados ao vértice A. Depois denote por G, H , I e J os pés das alturas dos subtriângulos ΔBFA, ΔBEA, ΔAEC e ΔDFC, respectivamente.

   Queremos comparar as áreas dos 6 subtriângulos obtidos pelo Elon. Do enunciado do problema obtemos que:

$$\frac{DE}{BD} = \frac{EF}{BD} = \frac{BF}{BD} = \frac{1}{3} \tag{1}$$

   Agora, note que os triângulos ΔBAD, ΔBGE, ΔBHF são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Isto implica que

$$\frac{FH}{AD} = \frac{BF}{BD} \quad \frac{EG}{AD} = \frac{BE}{BD} \quad \frac{FH}{EG} = \frac{BF}{BE} \tag{2}$$



   Usando (1) e (2) deduzimos que

$$HF = \frac{GE}{2} = \frac{AD}{3} \tag{3}$$

   Como os triângulos ΔBFA, ΔBEA *e* ΔBDA tem mesma base $\overline{BA}$, usamos essa informação junto com (3) para obter que os triângulos ΔBFA, ΔFEA e ΔEDA têm todos a mesma área.

   De modo inteiramente análogo, podemos usar (1) mais semelhança dos triângulos ΔDJE, ΔDIF e ΔDCB para deduzir que os triângulos ΔCED, ΔFEC e ΔFBC têm todos a mesma área.

   Afirmação: Os triângulos ΔBFA e ΔDEC têm áreas iguais.

   De fato, basta ver que as bases $\overline{BA}$ e $\overline{CD}$ são iguais e que $HF = \dfrac{AD}{3} = \dfrac{BC}{3} = JE$, ou seja, os triângulos têm mesma base e mesma altura.

   Portanto, todos os 6 subtriângulos têm áreas iguais.

10. Resposta: **B**

   Solução: Sejam V o número de jogos que terminaram com vitória de alguma das equipes e E o número de jogos que terminaram empatados. Como foram disputados 7 jogos, então

$V+E=7$. Além disso, como cada jogo com um vencedor (independente de quem seja) dá um total de 5 pontos, enquanto um jogo que terminou empatado dá um total de 4 pontos, temos $5V+4E=33$. Obtemos então um sistema linear

$$\begin{cases} 5V+4E &= 33 \\ V+E &= 7 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} V &= 5 \\ E &= 2 \end{cases}$$

e assim 2 jogos terminaram empatados.

11. Resposta: **D**

Solução: Como $\overline{CE}$ é bissetriz do ângulo $D\hat{C}B$, então os ângulos $D\hat{C}E$ e $B\hat{C}E$ são congruentes. Por outro lado, como os ângulos $D\hat{C}E$ e $B\hat{E}C$ são alternos internos, também são congruentes. Isto implica que $B\hat{E}C \cong E\hat{C}B$. Logo o triângulo ΔECB é isósceles, o que implica em

$$EB = CB = DA = 14.$$

Portanto, $DC = AB = AE + EB = 6 + 14 = 20$. Isto significa que o perímetro é $AB + BC + CD + DA = 20 + 14 + 20 + 14 = 68$.

12. Resposta: **C**

Solução: Como a é um expoente bom para 7 então $2^a = 7$. Deste modo:

$$2^{(2a-1)} = \frac{(2^a)^2}{2} = \frac{7^2}{2} = \frac{49}{2}$$

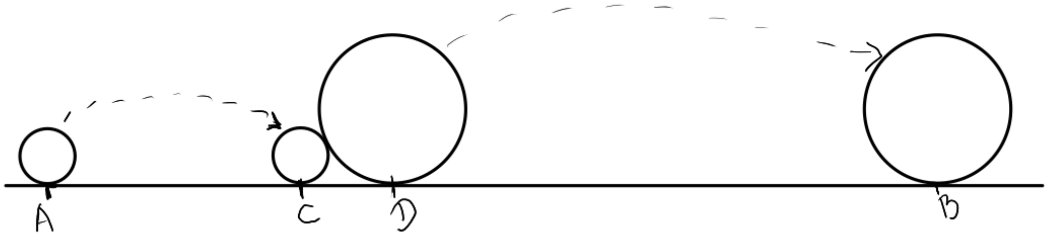
Ou seja, $2a-1$ é um expoente bom para $\frac{49}{2}$.

13. Resposta: **A**

Solução: Partindo do vértice inferior à esquerda e no sentido horário, some duas vezes e em seguida subtraia para obter o número do centro do triângulo. Mantendo esse padrão, no quarto triângulo teremos que o número no centro do triângulo é $7+18-5=20$.

14. Resposta: **D**

Solução: Seja C o ponto onde a roda 1 toca a superfície plana no instante em que a roda 1 toca a roda 2. Além disso, seja D o ponto onde a roda 2 toca a superfície plana inicialmente. A figura abaixo ilustra esta situação.



Observamos que $d(A,B) = d(A,C) + d(C,D) + d(D,B)$.

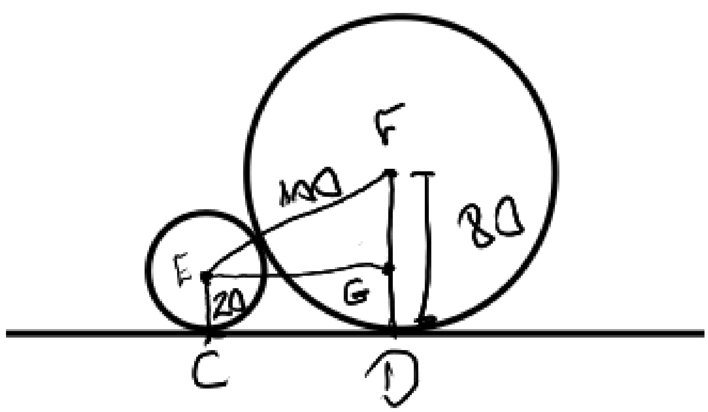
Como a roda 1 gira exatamente 3/8 de volta antes de tocar a roda 2, então $d(A,C)$ é igual a 3/8 do comprimento da circunferência, isto é

$$d(A,C) = \frac{3}{8} 2\pi r_1 = \frac{3}{8} 2\pi 20 = 15\pi \,\text{cm}.$$

Ao ser tocada pela roda 1, a roda 2 se desloca exatamente duas voltas e para sobre o ponto B, logo

$$d(D,B) = 2 \times 2\pi r_2 = 2 \times 2\pi 80 = 320\pi \,\text{cm}.$$

Finalmente, para encontrar a distância entre os pontos C e D, consideremos novamente o instante em que a roda 1 toca a roda 2. Sendo E e F os centros da rodas 1 e 2, respectivamente, e G o ponto de interseção da reta paralela ao segmento $\overline{CD}$ que passa por E e o segmento $\overline{FD}$. Deste modo os vértices E, F e G formam um triângulo retângulo. A figura abaixo ilustra essa situação.



Notemos que a diagonal do triangulo $\triangle EFG$ é o segmento $\overline{EF}$ cujo comprimento é $d(EF) = 20 + 80 = 100\,\text{cm}$, pois é a soma dos comprimentos dos raios das rodas 1 e 2. Além disso, por construção, o cateto $\overline{EG}$ tem comprimento $d(F,G) = 80 - 20 = 60\,\text{cm}$ pois é da diferença entre os comprimentos dos dois raios. Finalmente, notemos que $d(E,G) = d(C,D)$ por construção e que, pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned} d(E,G) &= \sqrt{d^2(E,F) - d^2(F,G)} \\ &= \sqrt{100^2 - 60^2} \\ &= 80. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(C,D) = 80\,\text{cm}$. Deste modo:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= d(A,C) + d(C,D) + d(D,B) \\ &= 15\pi + 80 + 320\pi \\ &= 335\pi + 80\,\text{cm}. \end{aligned}$$

15. Resposta: **B**

Solução: Denote por x a probabilidade de sair um número par e por y a probabilidade de sair um número ímpar. O espaço amostral é $\Big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\Big\}$. Deste modo devemos ter que

$$\begin{aligned} P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) &= 1 \\ P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) &= 1 \\ y + x + y + x + y + x &= 1 \\ 3x + 3y &= 1 \\ x + y &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Agora note que, pelo enunciado do problema, temos $y = 4x$. Segue que $x + y = x + 4x = \dfrac{1}{3}$, o que nos leva a $x = \dfrac{1}{15}$ e $y = \dfrac{4}{15}$.
O evento *sair um número menor ou igual a 3* é $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

Logo,

$$\begin{aligned} P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) &= \\ P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) &= \\ y + x + y &= \\ 2y + x &= \\ 2 \times \frac{4}{15} + \frac{1}{15} &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$