III OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2018

NÍVEL III- 2ª FASE - Gabarito

1. Fatorando temos:
$$q^2 - r^2 = (q+r)(q-r) = p.$$
Como p é primo,
$$q + r = p \text{ e } q - r = 1 \textbf{ ou } q + r = 1 \text{ e } q - r = p.$$
Essa última opção não ocorre pois $q+r > 1$, uma vez que q e r são primos. Assim, $q-r = 1$ e $q + r = p$. A igualdade $q - r = 1$ implica que q e r têm paridades diferentes, e, como eles são primos, só podemos ter $r = 2$ e $q = 3$. Portanto, $p = q + r = 5$.

2. (a) Temos vários exemplos possíveis.
   • Tomando $p = 5$ e $a = 2$, temos que $2^{5-1} = 2^4 = 16$ e $16 = 3 \times 5 + 1$, ou seja, 2^4 deixa resto 1 na divisão por 5.
   • Agora, com $p = 3$ e $a = 5$, temos que $5^{3-1} = 5^2 = 25$ e $25 = 3 \times 8 + 1$, ou seja, 5^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

   (b) Primeiro observe que 131 é primo, pois não é divisível por $2, 3, 5, 7$ e 11. Pelo Pequeno Teorema de Fermat 3^{130} deixa resto 1 na divisão por 131. Podemos escrever,
$$3^{130} = 131k + 1,$$
   para algum número inteiro k. Assim,
$$3^{133} = 3^{130} \times 3^3 = (131k + 1)3^3 = (3^3 \times 131k + 3^3),$$
   Portanto, 3^{133} deixa resto $3^3 = 27$ na divisão por 131.

3. (a) Em cada estapa, o triângulo do meio gera mais 4 triângulos menores. Assim, após 1 etapa teremos $5 = 1 + 4$ triângulos. Após 2 etapas teremos $9 = 1 + 4 + 4 = 1 + 4 \times 2$ triângulos. Após 3 etapas teremos $13 = 1 + 4 + 4 + 4 = 1 + 4 \times 3$ triângulos. Após n etapas teremos $1 + 4 \times n$ triângulos. Teremos 302 triângulos se $1 + 4 \times n = 302$ para algum n, ou seja,
$$4 \times n = 302 - 1 = 301.$$
   Como 301 não é divisível por 4, nunca teremos 302 triângulos.

   (b) Após n etapas teremos $1 + 4 \times n$ triângulos (veja solução do item anterior).

   (c) Observe que os quatro triângulos menores obtidos são congruentes, logo eles possuem mesma área. A área do triângulo equilátero ABC é $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l é a medida do lado do triângulo ABC. Assim, a área do triângulo PMN será a área de ABC dividada por 4, isto é,

$$\text{área de PMN é } \frac{1}{4} \times A = \frac{1}{4} \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}.$$

A cada etapa, a área do triângulo central será $\frac{1}{4}$ da área do triângulo central anterior. Assim, após n etapas, teremos um triângulo central de área

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \times A = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}.$$

4. (a) Como o triângulo BCD é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2.$$

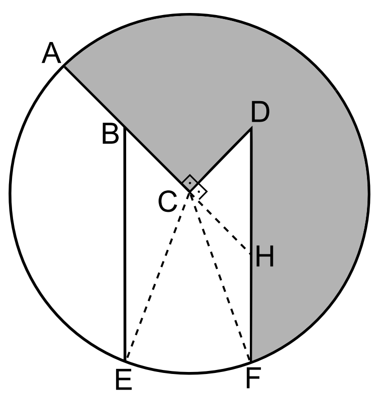
Uma vez que o raio $\overline{\mathrm{AC}} = 1$, e $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$ possuem o mesmo tamanho, temos que $\overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$ medem $\frac{1}{2}$. Assim,

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

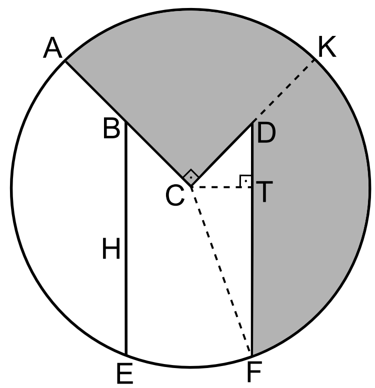
(b) Seja H o ponto de interseção do prolongamento de $\overline{\mathrm{AC}}$ com o segmento $\overline{\mathrm{DF}}$ (veja figura). Como $\overline{\mathrm{BE}}$ e $\overline{\mathrm{DF}}$ são pararelos, $\mathrm{C\hat{B}E} \equiv \mathrm{C\hat{H}D}$.



Por outro lado, pelo enunciado, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{DF}}$. Como os segmentos $\overline{\mathrm{CE}}$ e $\overline{\mathrm{CF}}$ são raios da circunferência, concluímos que $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}}$. Portanto, os triângulos EBC e FDC são congruentes (porque possuem três lados iguais). Como eles são congruentes, seus ângulos são iguais. Em particular, $\mathrm{C\hat{B}E} \equiv \mathrm{C\hat{D}F}$.

Assim, juntando as duas igualdades concluímos que $\mathrm{C\hat{H}D} \equiv \mathrm{C\hat{D}F}$. Então, o triângulo retângulo CHD possui dois ângulos iguais. E, portanto, pela soma dos ângulos internos, concluímos que $\mathrm{C\hat{D}F} = 45°$.

(c) Considere o ponto K como sendo o ponto onde o prolongamento do segmento $\overline{\text{CD}}$ corta o círculo, como na figura.



Pela fórmula do enunciado, a área do setor circular ACK é igual a $\dfrac{\pi \times 1^2 \times 90^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi}{4}$. Seja $\overline{\text{CT}}$ o segmento que passa por C e é perpendicular a $\overline{\text{DF}}$ em T. Assim, sabendo que $\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos:

$$\operatorname{sen}(C\hat{D}T) = \frac{\overline{\text{CT}}}{\overline{\text{CD}}} \Longrightarrow \operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{\overline{\text{CT}}}{1/2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{\text{CT}}}{1/2} \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \overline{\text{CT}}.$$

Temos também

$$\cos(F\hat{C}T) = \frac{\overline{\text{CT}}}{\overline{\text{CF}}} \Longrightarrow \cos(F\hat{C}T) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Pelo dado do enunciado, temos que $F\hat{C}T$ mede aproximadamente 70°. Portanto, $F\hat{C}K = 70^\circ + 45^\circ = 115^\circ$. Assim, a área do setor FCK é igual a $\dfrac{\pi \times 1^2 \times 115^\circ}{360^\circ} = \dfrac{23\pi}{72}$. Por outro lado, o triângulo CTF é retângulo e, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
\overline{\text{CF}}^2 &= \overline{\text{CT}}^2 + \overline{\text{TF}}^2 \\
1^2 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \overline{\text{TF}}^2 \\
\overline{\text{TF}} &= \sqrt{\frac{7}{8}}.
\end{aligned}$$

Como o triângulo CTD é isósceles (pois $\hat{T}$ é reto e $T\hat{D}C = 45^\circ$), temos que $\overline{\text{DT}} = \overline{\text{CT}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Assim,

$$\overline{\text{DF}} = \overline{\text{DT}} + \overline{\text{TF}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Logo, a área do triângulo CFD é:

$$\text{área } \Delta\text{CFD} = \frac{\overline{\text{DF}} \times \overline{\text{CT}}}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{7}{8}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{16}.$$

Finalmente, a medida da área sombreada é:

$$\text{área do setor ACK} + \text{área do setor FCK} - \text{área } \Delta\text{CFD} = \frac{\pi}{4} + \frac{23\pi}{72} - \frac{1+\sqrt{7}}{16}.$$