III OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2018

NÍVEL II - 2ª FASE - Gabarito

1. (a) $S(4.182) = 4 + 1 + 8 + 2 = 15.$

   (b) $-S(2)+S(3)-S(4)+S(5)-S(6)+S(7)-S(8)+S(9) = \underbrace{-2+3}_{1}\underbrace{-4+5}_{1}\underbrace{-6+7}_{1}\underbrace{-8+9}_{1} =$
   $1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

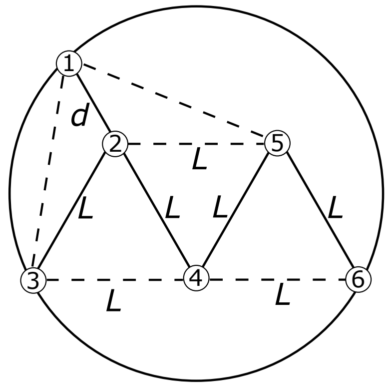
   (c) Note que a cada 2 números a partir de 2 o resultado é sempre igual a 1:
   $-S(2) + S(3) = 1$
   $-S(4) + S(5) = 1$
   $-S(6) + S(7) = 1$
   $-S(8) + S(9) = 1$
   $-S(10) + S(11) = -1 + 2 = 1$
   $(\cdots)$
   $-S(2016) + S(2017) = -(2 + 0 + 1 + 6) + (2 + 0 + 1 + 7) = 1$
   Há $\dfrac{2016}{2} = 1008$ pares na lista acima. Então,
   $S(1) - S(2) + S(3) - ... - S(2016) + S(2017) - S(2018) = S(1) + 1008 \times 1 - S(2018) =$
   $1 + 1008 - (2 + 0 + 1 + 8) = 998.$

2. (a) A cada etapa 1 pedaço de papel é dividido em 12 novos pedaços. Então:
   Etapa 1: 12
   Etapa 2: $11 + 1 \times 12$
   Etapa 3: $11 + 1 \times 11 + 1 \times 12$
   Etapa 4: $11 + 1 \times 11 + 1 \times 11 + 1 \times 12$
   Etapa 5: $11 + 1 \times 11 + 1 \times 11 + 1 \times 11 + 1 \times 12 = 4 \times 11 + 1 \times 12 = 56.$

   (b) Como visto no item anterior:
   Etapa 1: $11 + 1$
   Etapa 2: $11 + (11 + 1) = 2 \times 11 + 1$
   Etapa 3: $11 + 11 + (11 + 1) = 3 \times 11 + 1$
   Etapa 4: $11 + 11 + 11 + (11 + 1) = 4 \times 11 + 1$
   Seguindo o padrão, na etapa n haverá $11n + 1$ pedaços de papel.

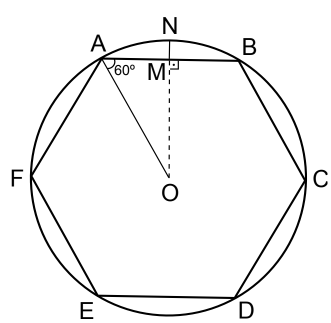
   (c) Sabemos do item anterior que depois de certa etapa haverá $11n + 1$ pedaços de papel. Isto significa que o total de pedaços no final de cada etapa é um múltiplo de 11 mais 1. Efetuando $\dfrac{2018}{11}$ encontramos 183 e resto 5. Então, $2018 = 11 \times 183 + 5$. Assim, não é possível que no final de alguma etapa o artista tenha exatamente 2018 pedaços.

3. Considere que a distância da casa 2 à casa 3 seja L e da casa 1 à casa 2 seja d. Como 2, 3 e 4; 2, 4 e 5; e 4, 5 e 6 são vértices de triângulos equiláteros as distâncias mostradas na figura são iguais a L.



Como a menor a distância entre dois pontos é um segmento de reta, precisamos considerar apenas um novo caminho reto (caminhos pontilhados na figura) que liga as casa 1 e 3, 3 e 4, 2 e 5, 1 e 5 ou 4 e 6 (lembrando que o novo caminho não pode interceptar um já existente). Se Antonio construir o caminho 4-6, o trajeto de menor distância é 1-2-4-6 totalizando uma distância $d+2L$. Esse percurso resulta em uma distância menor do que qualquer outro se ele construísse o caminho 1-3 ou 3-4. Construindo o caminho 2-5 o percuro de menor distância seria 1-2-5-6 resultando em uma distância igual a $d+2L$. Por último, se Antonio construir o caminho 1-5, o percurso mais curto seria 1-5-6 (ele é mais curto do que ir de 1 a 6 pelo arco da circunferência). A distância de 1-5 é menor do que $d+L$ (pela desigualdade triangular). Portanto, a distância percorrida no trajeto 1-5-6 é menor que $d+2L$. Logo, Antonio deve construir um caminho reto de 1 a 5 e fazer o percurso 1-5-6 para percorrer a menor distância.

4. (a) Os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ são raios da circunferência e, assim, medem 6 cm. Logo, o triângulo AOB é isósceles e, com isso, $\text{O}\hat{\text{B}}\text{A} = \text{O}\hat{\text{A}}\text{B} = 60°$.



Pela soma dos ângulos internos do triângulo AOB concluímos que $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B} = 60°$. Então, o triângulo AOB é equilátero e, portanto, o segmento AB mede 6 cm. Logo, $\overline{AM}$=3 cm. Considere $\overline{OM} = x$. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOM temos: $6^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$. Então,
$\overline{MN} = \overline{NO} - \overline{OM} \Rightarrow \overline{MN}$=$(6 - 3\sqrt{3})$ cm.

(b) A área do triângulo AOB é $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{OM}}{2} = \dfrac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2.