I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2019

NÍVEL III - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **C**

   Solução: Como durante o mês de agosto foram coletados 320 quilos de alumínio e ele corresponde a 40% do material arrecadado, podemos encontrar o total coletado através de uma regra de três. O total é 800 quilos. Assim, com o uso de regra de três, também podemos descobrir que foram coletados 96 quilos de plástico, 80 quilos de vidro, 264 quilos de papel e 40 quilos de outros materiais.

2. Resposta: **C**

   Solução: Para cada posição do time teremos que usar uma combinação simples. Para a posição de goleiro temos 2 jogadores e 1 vaga, logo temos 2 possibilidades de escolha. Para a posição de defesa temos 5 jogadores e 2 vagas, logo temos 10 possibilidades de escolha. Por fim, para a posição de ataque temos 4 jogadores e 2 vagas, logo temos 6 possibilidades de escolha. Multiplicando as possibilidades de cada combinação, teremos $2 \times 10 \times 6 = 120$ maneiras distintas de formar o time.

3. Resposta: **A**

   Solução: A soma dos dígitos de um número inteiro positivo resulta em um número inteiro positivo. O número adriático dividido por 10 deve ter a divisão exata já que a soma dos seus dígitos é um número inteiro. Assim, o número adriático é um múltiplo de 10. Todos os múltiplos de 10 entre 10 e 90 serão adriáticos, já que a divisão por 10 resultará exatamente na soma de seus dígitos. Porém, se consideramos um número de 3 dígitos e múltiplo de 100, teremos sempre o número dividido por 10 igual a um número de 2 dígitos e a soma de seus dígitos resultará em um número de apenas um dígito. Por exemplo, 200 dividido por 10 é 20 e a soma dos dígitos de 200 é 2. Então os múltiplos de 100 entre 100 e 900, não podem ser adriáticos. Resta analisar os números de três dígitos que são múltiplos de 10 e não são múltiplos de 100, digamos que eles são da forma $a.100 + b.10$, com a, b inteiros não nulos. A divisão por 10 resultará no número $a.10 + b$, enquanto que a soma de seus dígitos resultará no número $a + b$. Para que o número fosse adriático, deveria ocorrer $a.10 + b = a + b$, ou seja, $a.10 = a$, como a é não nulo, essa equação não tem solução.

4. Resposta: **B**

Solução: Na primeira etapa apenas a melhor amiga de Camilla recebeu a mensagem, na segunda etapa mais duas pessoas receberão a mensagem, ou seja, temos $2^2 - 1$ pessoas que receberão a mensagem na segunda etapa. Na terceira etapa, 7 pessoas terão recebido a mensagem, ou seja, $2^3 - 1$ pessoas. Logo, para descobrir o número de pessoas na etapa n, fazemos $2^n - 1$. Assim, no final da sétima etapa $2^7 - 1 = 127$ pessoas receberam a mensagem.

5. Resposta: **A**

   Solução: Teremos que cercar um terreno no formato retangular e, para isso, chamamos de x a largura e de y o comprimento do retângulo. Como não será preciso cercar o fundo do terreno e será utilizado 10 metros de arame, temos $2x + y = 10$. Queremos encontrar a maior área possível, que denotaremos por A. Como temos um retângulo, sua área é dada por $A = x.y$. Da primeira equação, temos $y = 10 - 2x$, substituindo na segunda equação, obtemos $A = x.(10 - 2x) = 10x - 2x^2$. Assim, a área é dada como uma função polinomial de segundo grau na variável x. Essa função terá um máximo igual a $-\frac{(10)^2}{(-8)} = \frac{25}{2}m^2$.

6. Resposta: **B**

   Solução: Vamos reescrever os números com mesma potência.

$$2^{400} = \left(2^4\right)^{100} = \left(16\right)^{100};$$
$$3^{300} = \left(3^3\right)^{100} = \left(27\right)^{100};$$
$$4^{200} = \left(4^2\right)^{100} = \left(16\right)^{100}.$$

   Como $5 < 16 < 27$, isto é, $5 < 2^4 < 3^3$, então $5^{100} < (2^4)^{100} < (3^3)^{100}$, ou seja, $5^{100} < 2^{400} = 4^{100} < 3^{300}$. Logo, a resposta correta é a letra (b).

7. Resposta: **A**

   Solução: O número 3.999.991 é igual a $4.000.000 - 9$, ou seja, podemos escrever $3.999.991 = (2.000)^2 - 3^2 = (2.000 + 3)(2.000 - 3) = (2.003)(1.997)$. Como 3.999.991 é o produto de dois primos p e q, temos $p + q = 2.003 + 1.997 = 4.000$.

8. Resposta: **C**

   Solução: Quando Isabel vai para a escola por uma linha reta, ela caminha o diâmetro da circunferência em 6 minutos. Quando ela vai pelo contorno da praça, caminhando com a mesma velocidade, ela caminha metade do perímetro da circunferência, ou seja, πr, logo ela gasta um tempo de 3π minutos.

9. Resposta: **B**

Solução: Ao dividir o número natural n por 9 encontra-se o resto 4. Sabendo que um número natural pode ser decomposto de acordo com o algoritmo da divisão ($n = qd + r$, onde q é o quociente, d é o divisor e r é o resto), a equação para n^2 é:

$$n^2 = (qd + r)^2$$

$$n^2 = q^2d^2 + 2qdr + r^2.$$

Separando o que é divisível pelo divisor é possível obter o resto:

$$n^2 = (q^2d + 2qr)d + r^2.$$

$$n^2 = Qd + r^2.$$

Logo, o resto da divisão de n^2 por 9 é igual ao resto da divisão de $4^2 = 16$ por 9, que é 7. Assim, o resto da divisão de $n^2 + n + 1$ por 9 será o resto da divisão de $7 + 4 + 1$ por 9, que é 3.

10. Resposta: **D**

    Solução: Para que o número seja o maior possível, a primeira escolha de Nelson deve ser o número 9, ainda nesse sentido, ele escolherá novamente o dígito 9 do número 19. Como ainda teremos a escolha de 8 dígitos, os próximos escolhidos deverão ser o dígito 8 do número 28 e o dígito 9 do número 29. Para terminar, os números 3, 0, 3, 1, 3, 2 também foram escolhidos.

11. Resposta: **A**

    Solução: A probabilidade de ser homem é de $\frac{49}{80}$ e a probabilidade de um homem ter feito doutorado é de $\frac{28}{49}$. Logo, a probabilidade de escolher um homem que fez doutorado é de $\frac{49}{80} . \frac{28}{49} = \frac{28}{80} = \frac{7}{20}$.

12. Resposta: **D**

    Solução: Primeiramente observemos que $N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times \cdots \times 2019$ é um múltiplo de 9, isto é, $N = 9 \times M$, onde M é um número inteiro não negativo.

    Agora vamos analisar a soma recursiva dos múltiplos de 9.

$$\begin{aligned} 9 &\to 9 \\ 18 &\to 1 + 8 = 9 \\ 27 &\to 2 + 7 = 9 \\ 36 &\to 3 + 6 = 9 \\ \vdots & \quad\quad \vdots \end{aligned}$$

    Vemos assim que a soma recursiva dos múltiplos de 9 é igual a 9, e assim a soma recursiva de N é 9.

13. Resposta: **D**

Solução: Como o ângulo $A\hat{C}B$ é igual a $90°$, a área do setor circular corresponde a $\frac{\pi r^2}{4}$ cm^2. Considerando agora o triângulo retângulo, temos o segmento $\overline{AB}$ que mede 8 cm. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, $r^2 + r^2 = 64$, ou seja, o raio da circunferência mede $\sqrt{32}$ cm. Assim, o setor circular tem área igual a 8π cm^2 e o triângulo retângulo tem área igual a 16 cm^2. Assim, o valor da área sombreada é $8\pi - 16$ cm^2.

14. Resposta: **A**

Solução: Para simplificar, denotaremos $a = 1 + 3\sqrt{7}$, $b = 2 + 3\sqrt{7}$, $c = 3 + 3\sqrt{7}$ e $d = 4 + 3\sqrt{7}$. Assim, racionalizando os denominadores, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{d}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{c-b} + \frac{\sqrt{d}-\sqrt{c}}{d-c}.$$

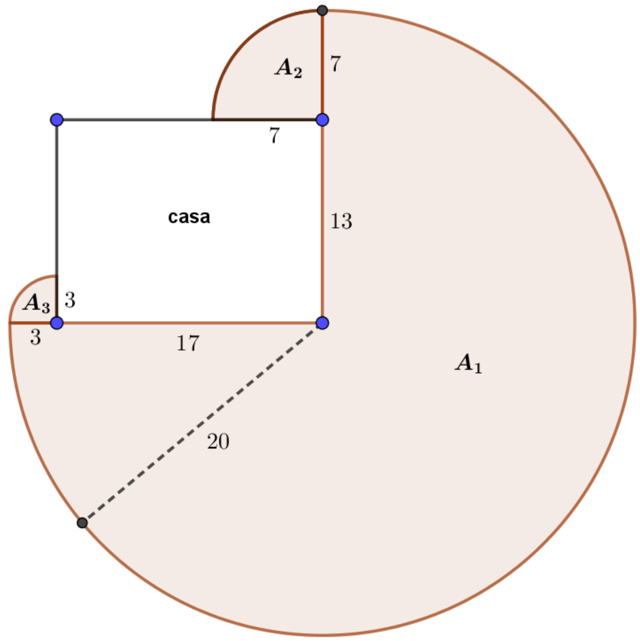
Como $b - a = 2 + 3\sqrt{7} - (1 + 3\sqrt{7}) = 1$, $c - b = 3 + 3\sqrt{7} - (2 + 3\sqrt{7}) = 1$ e $d - c = 4 + 3\sqrt{7} - (3 + 3\sqrt{7}) = 1$, segue:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{d}+\sqrt{c}} = \sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{c} - \sqrt{b} + \sqrt{d} - \sqrt{c} = -\sqrt{a} + \sqrt{d}.$$

Assim, o valor da expressão é $\sqrt{4 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{1 + 3\sqrt{7}}$.

15. Resposta: **D**

Solução: Sabendo que o comprimento do fio do roçador é de 20 metros e a única tomada disponível fica em um canto da casa de Giovanna, ela irá conseguir roçar uma área, que denotaremos por A_1, equivalente à $\frac{3}{4}$ da área de um círculo de raio de 20 metros, conforme a figura abaixo. Como a casa tem largura igual a 13 metros, Giovanna também irá conseguir roçar uma área, que denotaremos por A_2, equivalente à $\frac{1}{4}$ da área de um círculo de raio de 7 metros, ela também irá conseguir roçar uma área, que denotaremos por A_3, equivalente à $\frac{1}{4}$ da área de um círculo de raio de 3 metros, pois a casa tem comprimento igual a 17 metros. Portanto a área total roçada é $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3}{4}\pi(20)^2 + \frac{1}{4}\pi(7)^2 + \frac{1}{4}\pi(3)^2 = \frac{629\pi}{2}$.



A_2
7
7
casa
13
A_3
3
3
17
A_1
20