I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2019

NÍVEL II - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **C**

   Solução: Podemos transformar o gráfico na seguinte tabela.

Nº de Livros	0	1	2	3	4	5	6
Entrevistados	5	30	20	20	15	10	25

   Em cada coluna temos a quantidade de estudantes que leram uma determinada quantidade de livros. A quantidade total de estudantes entrevistados é dada somando as quantidades da segunda linha da tabela. Neste caso foram 125 estudantes entrevistados.

   Para sabermos quantos estudantes leram mais de três livros, basta somarmos as quantidades de entrevistados a partir da sexta coluna da tabela. Então 50 estudantes leram mais de três livros.

   Considerando que 50 alunos representa $x\%$ de 125, temos $\frac{x}{100} \cdot 125 = 50$, ou seja, $x = 5000/125 = 40$. Obtemos $x = 40$ e, portanto, 50 representa 40% dos estudantes.

2. Resposta: **D**

   Solução: Se repetirmos as figuras das alternativas a, b e c, respectivamente, obtemos:

   a) , b) , c) , enfim.

   Nenhuma delas é equivalente ao desenho mostrado. A resposta é o padrão dado na alternativa d.

3. Resposta: **A**

   Solução: Para cada bola de sorvete, temos 6 possibilidades de sabores. Como a pessoa quer tomar um sorvete com 3 bolas e pode repetir os sabores, teremos 6 possibilidade de sabores para a primeira bola, 6 para a segunda e 6 para a terceira. No total, obtemos $6 \times 6 \times 6 = 216$ combinações possíveis para as triplas de bolas de sorvete.

	Bola 1	Bola 2	Bola 3
Sabores	6	6	6

A pessoa tem 3 opções de calda. Para cada tripla de bolas de sorvete escolhida, ela pode colocar uma das três caldas, dando assim mais 3 possibilidades de combinações de sorvetes. Assim, se para cada tripla temos 3 possibilidades de calda, no total teremos $3 \times 216 = 648$ variações de sorvetes.

4. Resposta: **B**

   Solução: Entre os dígitos de 0 a 9, os ímpares são 1,3,5, 7 e 9. No total são 5 possibilidades de números de telefones para Chrystian tentar. Então ele tem uma chance em 5. Logo, a probabilidade de Chrystian acertar o telefone é $\frac{1}{5}$.

5. Resposta: **A**

   Solução: Vamos supor que Antônio tenha 100 picolés no total. Então, do enunciado, sabemos que 60% são picolés de coco e 40% de morango, ou seja, 60 são picolés de coco e 40 são picolés de morango.

   Quando ele vendeu metade dos picolés, 70% dos que sobraram eram de coco e os outros 30% de morango.

   Então sobraram $70\% \times 50 = \frac{70 \times 50}{100} = 35$ picolés de coco, logo 15 de morango.

   Concluímos que foram vendidos 25 picolés de morango.

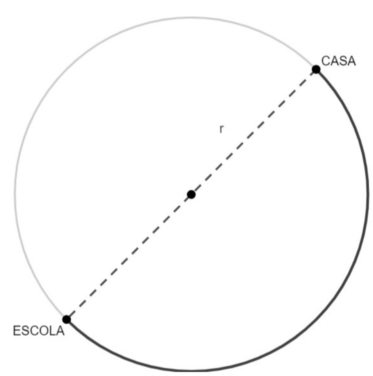
   Se 40 picolés representa 100% dos picolés de morango e 25 representa x, como estas são grandezas proporcionais, temos: $\frac{40}{100} = \frac{25}{x}$.

   Logo, $x = \frac{25}{40} \times 100 = 62,5$. Ou seja, 25 picolés representam $62,5\%$ dos picolés de morango.

6. Resposta: **C**

   Solução: Vamos considerar que a praça tem o formato de um círculo de raio r unidades de medida. Como a casa e a escola encontram-se em lados opostos de uma praça circular, a distância em linha reta entre elas é o diâmetro do círculo, ou seja, 2r unidades de medida.

   Se Isabel gasta 6 minutos para chegar na escola quando ela caminha em linha reta e de forma constante, então ela gasta 3 minutos para andar r unidades de medida.



A distância da casa até a escola, contornando a praça, será metade do perímetro da praça, isto é, πr unidades de medida. Se Isabel caminhar por este caminho com a mesma velocidade constante, ela irá gastar 3π minutos.

7. Resposta: **B**

   Solução: Seja p um número primo. Suponhamos que $p+1$ seja um quadrado perfeito. Então existe um número a tal que $p+1=a^2$. Podemos escrever $p=a^2-1$, que por sua vez, nos dá $p=(a+1)(a-1)$.

   Da definição de números primos, como $a+1$ divide p, devemos ter que $a+1$ é igual a 1 ou p. Se $a+1=1$, então $a=2$, e assim $p=1$, uma contradição porque 1 não é um número primo. Logo, $a+1=p$ e como $p=(a+1)(a-1)$, temos que $a-1=1$. Portanto, $a=2$ e $p=2^2-1=3$. Logo, só existem um número primo cujo sucessor é um quadrado perfeito, a saber, o número primo 3.

8. Resposta: **B**

   Solução: Vamos reescrever os números com mesma potência.

$$2^{400}=\left(2^4\right)^{100}=\left(16\right)^{100};$$
$$3^{300}=\left(3^3\right)^{100}=\left(27\right)^{100};$$
$$4^{200}=\left(4^2\right)^{100}=\left(16\right)^{100}.$$

   Como $5<16<27$, isto é, $5<2^4<3^3$, então $5^{100}<(2^4)^{100}<(3^3)^{100}$, ou seja, $5^{100}<2^{400}=4^{100}<3^{300}$. Logo, a resposta correta é a letra (b).

9. Resposta: **C**

   Solução: Considere o triângulo CPD. Como os pontos C e D estão contidos na circunferência de centro P, os segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ medem 3, o raio da circunferência. Note que a medida do ângulo $C\widehat{P}D$ é 90^o pois, com relação a circunferência menor, o arco formado pelos pontos C e D tem amplitude igual a 180^o e $C\widehat{P}D$ é um ângulo inscrito.

   Então CPD é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é dada pelo segmento $\overline{CD}$ e os catetos têm medidas iguais a 3. Assim, segue do teorema de Pitágoras que $CD^2=3^2+3^2$, ou seja, $CD=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

10. Resposta: **D**

    Solução:

    · $\mathbf{2019^{2019}}$

    Observe que todo número maior do que 9 pode ser escrito na forma $10\times A+B$, onde $B\in\{0,1,2,\ldots,9\}$. Por exemplo, $2019=10\times 201+9$ e teremos $A=201$ e $B=9$. Para obtermos o último dígito de um número, basta eliminarmos toda a parte múltipla de 10.

Para calcularmos o último dígito de 2019×2019, não precisamos calcular toda a multiplicação basta fazermos $(2010 + 9)(2010 + 9) = 2010^2 + 9 \times 2010 + 81 = A \times 10 + 1$, onde $A = 201^2 + 9 \times 201 + 8$. O último digito será 1. Podemos fazer isso, eliminando desde o começo os múltiplos de 10. Então em 2019×2019, consideramos apenas $9 \times 9 = 81$.

Se quisermos saber o último dígito de 2019^3, basta multiplicamos o último dígito de 2019×2019 com 2019, isto é, $1 \times 9 = 9$. Quando fizermos 2019^4, vemos que teremos a conta $9 \times 9 = 81$ o que nos dá que o último dígito é 1.

Observe que teremos o seguinte padrão, 2019^a tem dígito final 1, se a é par, ou 9 caso contrário. Como 2019 é ímpar, 2019^{2019} terá digito final 9, isto é, $b = 9$.

- $\mathbf{2^{2019}}$

Observe a tabela

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096

Notamos que a cada 4 linhas, existe uma repetição com relação aos últimos dígitos. A sequência é 2,4,8 e 6. Como $2019 = 504 \times 4 + 3$, o último digito de 2^{2019} é o mesmo que de 2^3, ou seja, $a = 8$.

Portanto, $a + b = 17$.

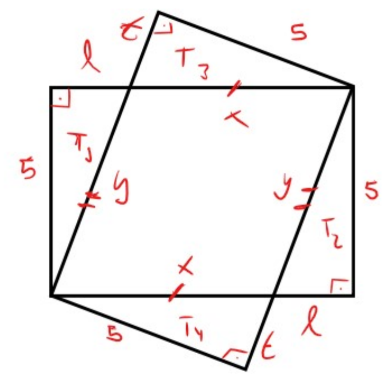
11. Resposta: **D**

Solução: O critério de divisibilidade do 9 diz que um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos também o for.

Como $N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2019$ é divisível por 9, a soma dos seus algarismos, digamos M, também será. Por sua vez, a soma dos algarismos de M também será múltiplo de 9. Repetimos o processo até que tenhamos apenas um algarismo. Este deverá ser múltiplo de 9. Note que o algarismo não poderá ser zero pois estamos somando números inteiros onde pelo menos um não é zero. Portanto, o algarismo será o 9.

12. Resposta: **A**

Solução: Note que a figura interna formada pelos dois retângulos é um paralelogramo. Assim, os lados paralelos são iguais. Vamos considerar a seguinte figura.



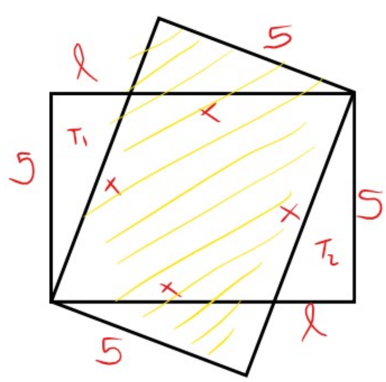
Os triângulos T_1 e T_2 são congruentes pois seus lados possuem mesmas medidas. De forma análoga, os triângulos T_3 e T_4 são congruentes.

Vamos verificar que os quatro triângulos são congruentes. Para isto basta mostrarmos que T_1 e T_3 são congruentes.

Observe que ambos são triângulos retângulos e possuem um lado com medida 5. Note que o ângulo oposto ao lado de medida 5 é igual nos dois triângulos, pois estes são ângulos opostos por um vértice. Portanto, os dois triângulos são congruentes.

Conseguimos concluir que o paralelogramo da figura acima é na verdade um losango.

Agora, considere a figura abaixo.



A área procurada será a soma da área de um retângulo mais a soma das áreas de dois triângulos adjacentes. Pela figura, a área será $35 + \mathrm{A}_{T_1} + \mathrm{A}_{T_2}$.

Precisamos então determinar o valor de ℓ.

Temos seguintes equações:

- $x + \ell = 7$
- $\ell^2 + 25 = x^2$

A segunda equação é obtida aplicando o Teorema de Pitágoras em qualquer um dos triângulos na figura.

Podemos isolar x na primeira equação, $x = 7 - \ell$, e substituí-lo na segunda. Obtemos $\ell^2 + 25 = (7-\ell)^2 = 49 - 14\ell + \ell^2$ e, então, $\ell = \frac{12}{7}$.

Então $\mathrm{A}_{T_1} = \mathrm{A}_{T_2} = \frac{5\times\ell}{2} = \frac{5\times\frac{12}{7}}{2} = \frac{30}{7}$.

Assim, a área desejada é $35 + \mathrm{A}_{T_1} + \mathrm{A}_{T_2} = 35 + \frac{60}{7} = \frac{305}{7}$.

13. Resposta: **C**

    Solução: Observação: Se quisermos saber a quantidade de números entre dois valores dados e incluí-los na contagem devemos subtrair o valor do maior pelo menor e somar 1 no resultado. Por exemplo, entre 1 e 10, temos $(10-1)+1 = 10$ números (incluindo 1 e 10 na contagem). Desta forma, entre 17 e 123, temos $123 - 17 + 1 = 107$ números.

    Para contar a quantidade de números que são ímpares e não divisíveis por 3, vamos primeiro olhar para os números que são ímpares e divisíveis por 3.

    Se um número x é divisível por 3, então ele dever ser da forma $x = 3K$, com K um número inteiro. O número K pode ser par ou ímpar. Se K for ímpar, temos $K = 2L + 1$ e então $x = 3 \times (2L+1)$. Quando L varia entre 3 e 20, o número x varia entre 21 e 123. Logo, a quantidade de múltiplos de 3 ímpares são $(20-3)+1 = 18$.

    Agora vamos contar quantos números pares existem entre 17 e 123.

    Dividindo 123 por 2, obtemos $123 = 2 \times 61 + 1$, onde 1 é o resto da divisão. Então temos 61 números pares entre 1 e 123. Eliminando os números $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ e 16, existem 53 números pares entre 17 e 123. Consequentemente, 54 números ímpares.

    Fazendo $54 - 18 = 36$, obtemos a quantidade de números ímpares que não são divisíveis por 3.

14. Resposta: **C**

    Note pela figura que os lados do triângulo e do quadrado têm mesma medida.

    Considere o triângulo ABC. Este será isósceles.

    O ângulo $A\widehat{B}C$ é formado pela soma dos ângulos

    - $A\widehat{B}D$, com medida 90^o (ângulo interno do quadrado)
    - $D\widehat{B}C$, com medida 60^o (ângulo interno do triângulo equilátero)

Logo, $A\widehat{B}C$ mede 150^o. Como o triângulo ABC é isósceles, os ângulos restantes $B\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}B$ possuem mesma medida igual à 15^o.

A soma dos ângulos $C\widehat{A}D$, $E\widehat{A}D$ e $C\widehat{A}B$, formam um ângulo interno do quadrado, $D\widehat{A}B$.

Como a medida do ângulo $E\widehat{A}D$ é 45^o e a de $C\widehat{A}B$ é 15^o, segue que a medida de $A\widehat{B}C$ é $90^o - 45^o - 15^o = 30^o$.

15. Resposta: **A**

Se multiplicarmos o número $\dfrac{1}{\sqrt{2+3\sqrt{7}}+\sqrt{1+3\sqrt{7}}}$ por $1 = \dfrac{\sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}}{\sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}}$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2+3\sqrt{7}}+\sqrt{1+3\sqrt{7}}} \times \frac{\sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}}{\sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}}{1}.$$

Então $\dfrac{1}{\sqrt{2+3\sqrt{7}}+\sqrt{1+3\sqrt{7}}} = \sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}$.
De maneira semelhante, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{3+3\sqrt{7}}+\sqrt{2+3\sqrt{7}}} = \sqrt{3+3\sqrt{7}}-\sqrt{2+3\sqrt{7}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{4+3\sqrt{7}}+\sqrt{3+3\sqrt{7}}} = \sqrt{4+3\sqrt{7}}-\sqrt{3+3\sqrt{7}}.$$

Fazendo a soma

$$\frac{1}{\sqrt{2+3\sqrt{7}}+\sqrt{1+3\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{3+3\sqrt{7}}+\sqrt{2+3\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{4+3\sqrt{7}}+\sqrt{3+3\sqrt{7}}},$$

teremos:
$\sqrt{2+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}+\sqrt{3+3\sqrt{7}}-\sqrt{2+3\sqrt{7}}+\sqrt{4+3\sqrt{7}}-\sqrt{3+3\sqrt{7}} =$
$\sqrt{4+3\sqrt{7}}-\sqrt{1+3\sqrt{7}}$.