I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2019

NÍVEL I - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **D**

   Solução: Como o Nelson desenhou a mesma imagem repetidas vezes, em sequência e de forma contínua, tal imagem não pode ser as alternativas (a), (b) e (c) pois tais imagens gerariam uma figura com quebras, obrigando que Nelson tirasse o lápis do papel e sabemos que ele não o fez. Portanto, só pode ser a figura da alternativa (d).

2. Resposta: **A**

   Solução: Analisando o gráfico vemos que a lanchonete deu lucro apenas nos meses de abril, maio e junho. Além disso junho foi o mês de maior lucro. Deste modo, a única afirmativa correta é a II.

3. Resposta: **C**

   *Solução:*Sabemos que um número é simultaneamente múltiplo de 3 e 7 se, e somente se, é múltiplo de 21. Deste modo, basta procurarmos pelos números que são múltiplos de 21 e são menores do que 1000. Neste caso temos que

   $$1000 = 21 \cdot 47 + 13,$$

   o que nos dá um total de 47 números.

4. Resposta: **B**

   Solução: Suponhamos que os ônibus voltem a passar juntos n minutos após as 8h. Como temos um ônibus que passa a cada 5 minutos, um a cada 6 e o outro a cada 9 minutos, temos que n é o mínimo múltiplo comum entre 5, 6 e 9, ou seja, $n = \text{mmc}(5, 6, 9) = 90$. Assim eles passaram juntos novamente 90 minutos após as 8h, isto é, às 9h30min.

5. Resposta: **B**

   Solução: Pelos gráficos temos os seguintes saldos para o time do Márcio:

   - 1º partida: venceu por 2 a 1;
   - 2º partida: perdeu por 3 a 1;
   - 3º partida: empatou por 2 a 2;
   - 4º partida: perdeu por 4 a 2;

- $5^{\underline{o}}$ partida: empatou por 3 a 3;
- $6^{\underline{o}}$ partida: venceu por 4 a 2.

Deste modo, o saldo de pontos foi $5+0+3+0+3+5=16$.

6. Resposta: **A**

   Solução: Temos 3 possibilidades para cada um dos quatro algarismos que formam o número, logo temos $3^4 = 81$ números distintos.

7. Resposta: **C**

   *Solução:*Pela afirmação do Ricardo, sabemos que compareceram à festa no máximo 57 pessoas. Por outro lado, da afirmação da Rita, na festa haviam pelo menos 53 pessoas. Isso implica que o número de pessoas que foram à festa está entre 53 e 57. Finalmente, pela afirmação da Ana, concluímos que a quantidade de pessoas na festa era um múltiplo de três. O único múltiplo de três que está entre 53 e 57 é 54.

8. Resposta: **D**

   Solução: Seja n o número de carros e m o de triciclos no estacionamento. Como temos 25 pneus, então $4n+3m=25$. Sabemos que existe pelo menos 1 triciclo e que existem mais carros que triciclos, logo $1 \leq m < n$, de modo que $2 \leq n$. Como temos pelo menos um triciclo, então $4n \leq 22$ e assim $n \leq 5$. Deste modo $2 \leq n \leq 5$.

   Agora podemos analisar as possibilidades.

   Se $n=2$, então $3m+8=25$, de modo que $m=17/3$, que não é inteiro. Logo $n \neq 2$.

   Se $n=3$, então $3m+12=25$, de modo que $m=13/3$, que não é inteiro. Logo $n \neq 3$.

   Se $n=4$, então $3m+16=25$, de modo que $m=9/3=3$. Ou seja, essa é uma possibilidade viável.

   Se $n=5$, então $3m+20=25$, de modo que $m=5/3$, que não é inteiro. Logo $n \neq 5$.

   Portanto temos 4 carros e 3 triciclos, e assim temos 7 veículos no estacionamento.

9. Resposta: **B**

   Solução: Vamos reescrever os números com mesma potência.

$$2^{400} = \left(2^4\right)^{100} = \left(16\right)^{100};$$
$$3^{300} = \left(3^3\right)^{100} = \left(27\right)^{100};$$
$$4^{200} = \left(4^2\right)^{100} = \left(16\right)^{100}.$$

   Como $5 < 16 < 27$, isto é, $5 < 2^4 < 3^3$, então $5^{100} < (2^4)^{100} < (3^3)^{100}$, ou seja, $5^{100} < 2^{400} = 4^{100} < 3^{300}$. Logo, a resposta correta é a letra (b).

10. Resposta: **D**

Solução: Sendo N o número escrito no triângulo mais à direita na linha n, vemos que N é igual a quantidade total de triângulos desenhados até ali. Se considerarmos a_n o número de triângulos desenhados na linha n, então $N = a_1 + \cdots a_{2019}$.

Por construção, temos que $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 2$.

Diante disso temos uma Progressão Aritmética (p.a.) que é caracterizada por uma sequência de números onde dois termos consecutivos possuem a mesma diferença. Essa diferença é chamada de razão (r). Cada termo da p.a. é definido da seguinte forma:

$$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r;$$

Somando o primeiro termo com o último, o segundo com o antepenúltimo e assim por diante chega-se ao mesmo resultado, logo a soma dos termos de uma p.a. finita é:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Na p.a. em questão, o primeiro termo é 1 e a razão é 2. Assim,

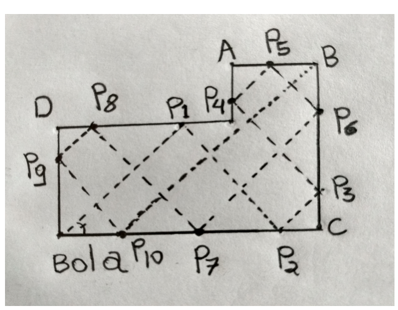
$$a_n = 2n - 1.$$

Segue que $a_{2019} = 2 \times 2019 - 1 = 4037$ e assim:

$$\begin{aligned} N &= a_1 + \cdots + a_{2019} \\ &= \frac{2019(a_1 + a_{2019})}{2} \\ &= \frac{2019 \times (1 + 4037)}{2} \\ &= 2019 \times 2019 \end{aligned}$$

11. Resposta: **C**

Solução: Vamos denotar por p_i os pontos nos quais a bola bate nos lados da mesa. Usando a lei de incidência (ângulo de chegada é igual ao ângulo de saída), podemos traçar os seguimentos de retas que representam a trajetória da bola, como indicado na figura.



Vemos, portanto, que a bola baterá 10 vezes nos lados da mesa, antes da bola cair no buraco B.

12. Resposta: **A**

    Solução: Observamos que a fatoração de 2019 em números primos é $2019 = 673 \times 3$. Deste modo, 2019 só pode ser escrito como produto de três números inteiros positivos do seguinte modo:

    $$\begin{aligned} 2019 &= 673 \times 3 \times 1 \\ 2019 &= 2019 \times 1 \times 1 \end{aligned}$$

    Dentre estes, o trio que oferece o maior valor da soma é $2019 + 1 + 1 = 2021$.

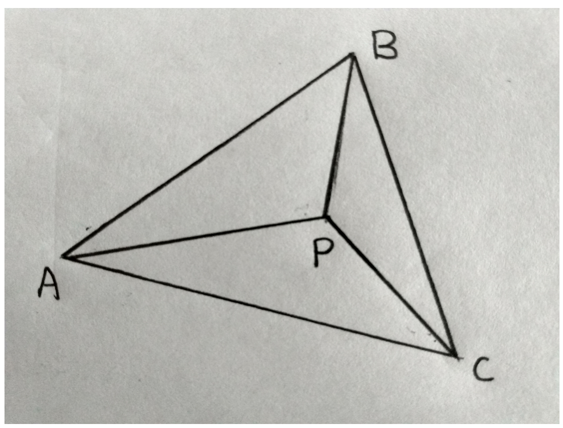
13. Resposta: **B**

    Solução: Temos que

    $$AP = BC \tag{1}$$

    $$P\hat{B}C = P\hat{C}B \tag{2}$$

    $$P\hat{A}C = P\hat{C}A = 20^\circ \tag{3}$$

    De (3) segue que o triângulo ΔAPC é isósceles. Isto por sua vez, implica que

    $$AP = PC = BC \tag{4}$$

    $$A\hat{P}C = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ. \tag{5}$$

    De (2) e (4) podemos deduzir que o triângulo ΔBPC é isósceles com

    $$PB = PC. \tag{6}$$

    Assim, de (4) e (6) concluímos que tal triângulo deve ser equilátero, o que por sua vez nos dá

    $$P\hat{B}C = P\hat{C}B = B\hat{P}C = 60^\circ. \tag{7}$$

    Por outro lado, sabemos que

    $$A\hat{P}B + A\hat{P}C + B\hat{P}C = 360^\circ. \tag{8}$$

Logo usando (5), (7) e (8) obtemos

$$A\hat{P}B = 160°. \tag{9}$$

Por (4) e (6) temos que ΔAPB é isósceles. Usando essa informação junto com (9) concluímos que

$$P\hat{A}B = P\hat{B}A = 180° - \frac{A\hat{P}B}{2} = 10° \tag{10}$$

Deste modo, os ângulos do triângulo ΔABC são:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= P\hat{A}B + P\hat{A}C = 10° + 20° = 30°\\ \hat{B} &= P\hat{B}A + P\hat{B}C = 10° + 60° = 70°\\ \hat{C} &= P\hat{C}A + P\hat{C}B = 20° + 60° = 80°.\end{aligned}$$

14. Resposta: **D**

    Solução: Primeiramente observemos que $N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times \cdots \times 2019$ é um múltiplo de 9, isto é, $N = 9 \times M$, onde M é um número inteiro não negativo.

    Agora vamos analisar a soma recursiva dos múltiplos de 9.

$$\begin{aligned}9 &\to 9\\ 18 &\to 1+8=9\\ 27 &\to 2+7=9\\ 36 &\to 3+6=9\\ \vdots\ & \quad\ \vdots\end{aligned}$$

    Vemos assim que a soma recursiva dos múltiplos de 9 é igual a 9, e assim a soma recursiva de N é 9.

15. Resposta: **C**

    Solução: Temos que $D\hat{A}E + C\hat{A}D + C\hat{A}B = 90°$. Como AD é diagonal do quadrado, então $D\hat{A}E = 45°$. Isto nos permite escrever

$$C\hat{A}D = 90° - 45° - C\hat{A}B = 45° - C\hat{A}B \tag{11}$$

    Só nos resta agora, determinar $C\hat{A}B$.
    Como ΔBCD é triângulo equilátero e $ABDE$ é quadrado então obtemos que

$$\begin{aligned}BD &= BC = AB\\ A\hat{B}D &= 90°\\ C\hat{B}D &= 60°\end{aligned}$$

Segue que o triângulo ΔABC é isósceles com

$$A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$
$$AB = BC.$$

Assim,

$$C\hat{A}B = B\hat{C}A = \frac{180^\circ - A\hat{B}C}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

Usando esta informação em (14), concluímos que

$$C\hat{A}D = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$