VI OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2023

Nível III - 2ª fase



Nome completo:	
CPF (caso tenha):	Data de nascimento:
Endereço:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

1. A função quadrática $f(x) = x^2 + sx + p$ tem a seguinte propriedade:

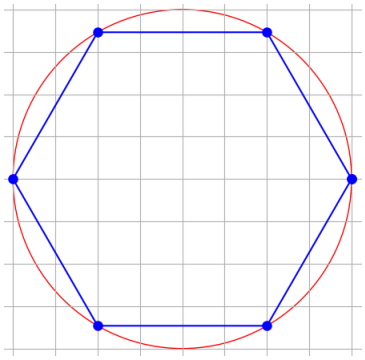
$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right),$$

para qualquer x não - nulo.

a) Determine o valor de p.

b) Sabendo-se que as raízes de $f(x) = 0$ são números inteiros, determine s.

2. Maria e João estão se desafiando numa brincadeira que funciona com a seguinte regra. Maria desenha um primeiro círculo, em seguida João desenha um hexágono regular inscrito (dentro do círculo), como mostra a figura abaixo.



Na segunda rodada, Maria desenha um novo círculo inscrito no pentágono e então, João desenha seu segundo hexágono regular circunscrito pelo segundo círculo de Maria. O jogo continua nessa ordem até que alguém desista. Sabe-se que o raio do primeiro círculo é $R_1 = 50\ cm$.

a) Após a segunda rodada, quais são o raio do círculo e o comprimento do lado do hexágono?

b) Após a terceira rodada, qual o comprimento do lado do hexágono?

c) Se o jogo persistir até a rodada 2023, qual o perímetro do último hexágono desenhado?

3. Em uma caixa foram colocadas 100 fichas numeradas de 1 a 100.

   (a) Se for retirada uma ficha dessa caixa, qual a probabilidade do número retirado ser par?

   (b) Se forem retiradas 2 fichas, sem reposição, qual a probabilidade de ambos os números serem ímpares?

   (c) Se forem retiradas 10 fichas, sem reposição, qual a probabilidade do produto dos números retirados ser par?

4. Se a e b são números inteiros positivos, é sempre possível dividir a por b, obtendo um quociente q e um resto r, que satisfaz $a = bq + r$, onde $0 \leq r < b$. Por exemplo, a divisão de 21 por 8 tem quociente 2 e deixa resto 5, ou seja, $21 = 8 \times 2 + 5$.

   (a) Encontre o quociente e o resto da divisão de 2023 por 11.

   (b) Se a é um inteiro positivo que deixa resto 1 na divisão por 5, qual é o resto de a^2 na divisão por 5? Justifique sua resposta.

   (c) Mostre que se a é um inteiro positivo, então a^2 deixa resto $0, 1$ ou 4 na divisão por 5.