OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2024

Nível III - 1ª fase

Nome:
Série:
Escola:

Instruções:

- A duração da prova é de 2h30min.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 20 minutos.
- A prova tem 15 questões de múltipla escolha.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- Use o gabarito abaixo para marcar a alternativa de cada questão.
- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Para garantir o sigilo da prova seu professor recolherá os enunciados.
- A interpretação dos enunciados faz parte das questões, portanto seu professor não poderá responder perguntas durante a prova.

Gabarito

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d

REALIZAÇÃO: **APOIO:**

DMM Departamento de Matemática e Matemática Aplicada | ICET Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas | UFLA Universidade Federal de Lavras | Associação Olimpíada Brasileira de Matemática | stone

1. A multiplicação das idades de um pai com um filho é 506. O valor da diferença das idades deles é:

   a) 29 b) 26 c) 31 d) 35

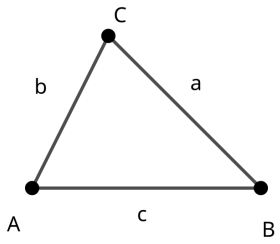
2. Pensei em um número n e o mesmo satisfaz a seguinte equação logarítmica

$$log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot log_6 7 ... \cdot log_{(n+22)}(n+23) = 11.$$

   O número em que pensei foi:

   a) 2022 b) 2023 c) 2024 d) 2025

3. No mundo dos triângulos, existe um triângulo ABC, com lados correspondentes medindo a, b e c, o qual tem a seguinte propriedade: $a \cdot cosB - b \cdot cosA = \frac{3}{5}c$.



   Nestas condições, o quociente $\frac{tg\ A}{tg\ B}$ vale:

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

4. Em uma loja de materiais de construção, a tinta é vendida a um custo proporcional à área circular que ela cobre. O custo é de $R\$5,00$ para pintar uma área de π metros quadrados. Marcos gastou $R\$245,00$ ao todo. Qual é o comprimento do raio da região circular que a quantidade de tinta comprada por Marcos conseguirá cobrir?

   a) $49m$ b) $35m$ c) $21m$ d) $7m$

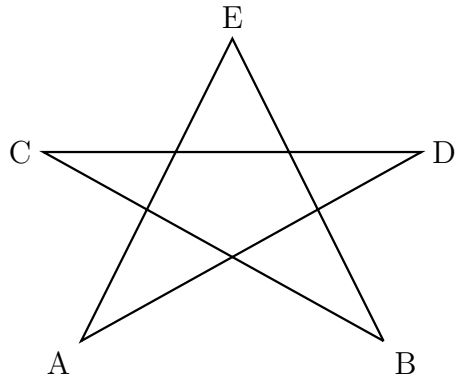
5. Sabendo que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ para quaisquer números reais a e b, então o valor da expressão

$$\frac{(4+5)(4^2+5^2)(4^4+5^4)(4^8+5^8)...(4^{1024}+5^{1024})(4^{2048}+5^{2048})+4^{4096}}{5^{2048}}$$

   é igual a:

   a) 5^{2048} b) 4^{2048} c) 4^{2048} d) 5^{4096}

6. Qual a soma dos ângulos nos vértices A, B, C, D e E da estrela de cinco pontas abaixo?

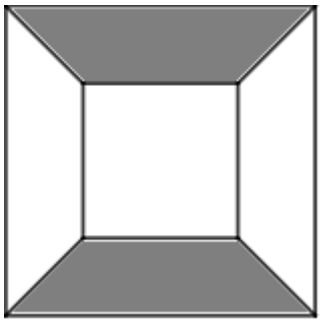


a) $90°$ b) $180°$ c) $360°$ d) $120°$

7. Sabe-se que o domínio da função $f(x) = \dfrac{x^2 + p^2 + 1}{x^2 + 2x + px^2 + p}$ é toda a reta real $\mathbb{R}$. Isto é possível apenas quando:

a) $p < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $p > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
b) $p < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $p > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
c) $p < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ ou $p > \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
d) $p < -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $p > \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

8. Um quadrado grande cujo lado mede 10 cm de comprimento contém um quadrado menor de lado igual a 6 cm de comprimento, como é mostrado na figura. Os lados correspondentes de cada quadrado são paralelos. A porcentagem do quadrado grande que encontra-se sombreada é:



a) 25% b) 32% c) 42% d) 10%

9. A função f, definida para todos os números reais positivos, satisfaz a seguinte equação

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2024}{x}\right) = 15x,$$

para todo $x > 0$. O valor de $f(2)$ é:

a) 923 b) 1 c) 9108 d) 9096

10. Quantos inteiros positivos formados por três algarismos existem com as seguintes características:

"Cada algarismo é positivo e tal que a diferença de dois dos algarismos consecutivos é 2"

a) 24 b) 21 c) 19 d) 25

11. O Teorema de Pitágoras afirma que se um triângulo retângulo tem catetos de comprimentos a e b e hipotenusa de comprimento c, então $a^2 + b^2 = c^2$. Se os números a, b e c são inteiros positivos, então o terno a, b, c é chamada de terno pitagórico. Sabendo disso, podemos concluir que um terno pitagórico:

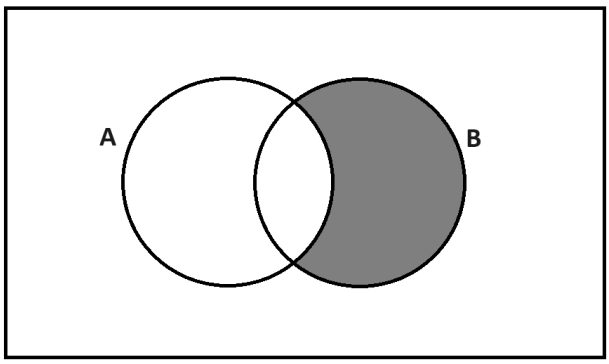
a) pode ser composto por três números iguais.

b) pode ser composto por dois números iguais, que são representados pelos catetos no triângulo retângulo.

c) pode ser composto por dois números iguais, que são representados por um cateto e a hipotenusa no triângulo retângulo.

d) é sempre composto por três números distintos.

12. Em uma escola foi realizada uma pesquisa para saber se os alunos gostam de açaí e sorvete. O diagrama de Venn apresentado abaixo representa os dados coletados pela pesquisa. O conjunto **A** é formado por alunos que gostam de sorvete e o conjunto **B** é formado por alunos que gostam de açaí.



A parte hachurada representa a porção de alunos que gosta de açaí, mas não gosta de sorvete. A operação de conjuntos que representa esses alunos é:

a) $A^{\complement} \cup B$ b) $A^{\complement} \cap B$ c) $A \cup B^{\complement}$ d) $A \cup B^{\complement}$

13. Ana estava entediada e resolveu escrever alguns números da forma $n^2 - 2n$, onde n é um número inteiro. Ela percebeu que muitos dos números escritos por ela se repetiam. O número máximo de vezes que ela pode encontrar um mesmo número é:

    a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

14. Um conjunto formado por números inteiros é chamado de conjunto ideal se for formado pelos múltiplos de algum inteiro fixado. Por exemplo, o conjunto:

$$\{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8 \ldots\},$$

    formado pelos números pares, é um conjunto ideal. Um exemplo de conjunto que não é ideal é:

    a) $\{\ldots, -20, -15, -10, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$
    b) $\{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
    c) $\{\ldots, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$
    d) $\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

15. Humberto estava estudando matemática para prestar o vestibular da UFLA e percebeu que existe uma fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais. Ele percebeu que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

    Então, se fizermos a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^4 + 5^2$, por exemplo, obteremos

$$\frac{5(2 \cdot 5 + 1)(5 + 1)}{6} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 6}{6} = 55.$$

    Utilizando essa fórmula, podemos concluir que soma dos quadrados dos primeiros $2n$ naturais é dada pela expressão

    a) $\dfrac{n(4n+1)(2n+1)}{3}$ b) $\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{3}$
    c) $\dfrac{2n(2n+1)(n+1)}{6}$ d) $\dfrac{n(4n+1)(2n+1)}{6}$