VII OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2024

Nível II - 2ª fase



Nome completo:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

REALIZAÇÃO: **APOIO:**

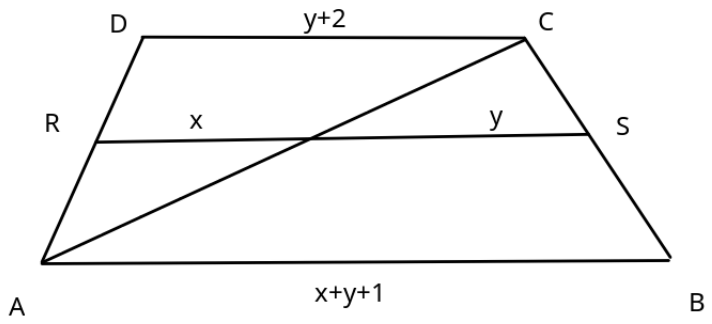
DMM Departamento de Matemática e Matemática Aplicada | ICET Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas | UFLA Universidade Federal de Lavras | Associação Olimpíada Brasileira de Matemática | stone

1. Uma prova contém 60 questões, sendo 30 de nível médio e 30 de nível difícil. Se acertar uma questão de nível médio, ganha 5 pontos. Se acertar uma questão de nível difícil, ganha 7 pontos. No entanto, se errar uma questão de nível médio, perde 2 pontos, e se errar uma questão de nível difícil, perde 1 ponto.

   a) Se João teve 12 erros e acertou todas as questões difíceis, quantas questões médias ele acertou e qual sua pontuação final?

   b) Se Paulo fez 271 pontos e teve 12 erros. Quantas questões médias e difíceis Paulo acertou?

2. Considere que R e S são os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio $ABCD$ abaixo.



a) Calcule o valor de x.

b) Encontre o valor de $(x + y + 1)^2$.

3. Calcule o valor do produto

$$\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{4^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2023^2}{2023^2-1}\cdot\frac{2024^2}{2024^2-1}.$$

4. Dizemos que um número inteiro a é divisível por outro inteiro b se existe um inteiro c tal que $a = b \cdot c$. Por exemplo, o número 48 é divisível por 3 pois $48 = 3 \cdot 16$.

   É bem sabido que um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisivel por 3. Por exemplo, os números 12, 390 e 4032 são divisíveis por 3. Já os números 17, 386 e 5000 não são divisíveis por 3.

   a) Mostre que todo número de 3 algarismos da forma aaa é divisível por 3.

   b) Quando um número da forma $\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ algarismos}}$ é divisível por 3? Justifique.

   c) Determine a quantidade de números de 4 algarismos da forma $abba$ que são divisíveis por 3.