VII OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2024

Nível III - 2ª fase



Nome completo:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

REALIZAÇÃO: **APOIO:**

DMM Departamento de Matemática e Matemática Aplicada | ICET Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas | UFLA Universidade Federal de Lavras | Associação Olimpíada Brasileira de Matemática | stone

1. Um grupo de menos de 100 matemáticos encontra-se reunido tomando café. Um deles disse

"O número de matemáticos presentes é igual ao dobro do produto dos dígitos desse número, subtraído por cinco"

(a) Assumindo que o número de matemáticos é da forma $n = 10a + b$, descreva a expressão dita pelo matemático em uma equação envolvendo os algarismos a e b.

(b) Quantos matemáticos estão presentes na reunião?

2. Dizemos que um número a é raiz de um polinômio $f(x)$ se $f(a) = 0$. Um polinômio de grau d têm, no máximo, d raízes reais.

   (a) Encontre as raízes do polinômio $f(x) = x^2 - x - 1$.

   (b) Encontre as raízes do polinômio $f(x) = x^4 - x^2 - 1$.

   (c) Mostre que não existe um número real m tal que o polinômio $f(x) = x^4 - mx^2 - m^2$ tenha 4 raízes reais.

3. Se a e b são números distintos tais que

$$\frac{a}{b} + \frac{2a + 4b}{b + 5a} = 2,$$

(a) Fazendo $x = \dfrac{a}{b}$, mostre que a expressão anterior é equivalente a $\dfrac{x(1 + 5x) + 2x + 4}{1 + 5x} = 2$.

(b) Encontre o valor de $\dfrac{a}{b}$.

4. Um reservatório abandonado, tem forma de um cubo, com capacidade para 16 mil litros de água. Uma formiga está num vértice, no fundo do reservatório. Ela deseja andar e chegar ao vértice diagonalmente oposto, no topo do reservatório.

   (a) Quanto mede uma aresta do reservatório?

   (b) Qual a menor distância, em metros, a formiga vai percorrer, para atingir o objetivo dela?