VIII OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2025

Nível III - 2ª fase



Nome completo:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 5 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

REALIZAÇÃO: **APOIO:**

DMM Departamento de Matemática e Matemática Aplicada | ICET Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas | UFLA Universidade Federal de Lavras | Associação Olimpíada Brasileira de Matemática | stone

1. Dizemos que um número inteiro é um *quadrado perfeito* quando ele pode ser expresso como o quadrado de um número inteiro. Por exemplo, o número 2025 é um quadrado perfeito, pois pode ser escrito como 45^2.

   a) Determine a fatoração em números primos do número 2025.

   b) Com base na fatoração em primos de 2025, calcule o número de divisores desse número.

   c) Mostre que o número de divisores de qualquer quadrado perfeito é sempre ímpar.

2. Seja n um número inteiro positivo e k o número obtido ao remover o algarismo das unidades de n. Definimos d como a diferença entre n e k, ou seja, $d = n - k$. Por exemplo, se $n = 7492$, então $k = 749$ e $d = 6743$.

   a) Se $n = 1927$, qual é o valor de k?

   b) Se $d = 1900$, qual o valor de n?

   c) Mostre que n é sempre da forma $n = 10 \cdot \left(\dfrac{d-u}{9} \right) + u$, em que u representa o algarismo das unidades de n.

3. Durante o *UFLA de Portas Abertas*, os alunos podem participar dos dois eventos independentes:

   - **Palestra de Matemática**
   - **Palestra de Física**

   Sabendo-se que a probabilidade de um aluno participar da palestra de Matemática é de 60%, que a probabilidade de um aluno participar da palestra de Física é de 50% e que as decisões são **independentes**:

   a) Qual a probabilidade de um aluno participar **das duas** palestras?

   b) Qual a probabilidade de um aluno participar de **exatamente uma** das palestras?

   c) Se forem sorteados **3 alunos ao acaso**, qual a probabilidade de **pelo menos um** deles ter participado **das duas** palestras?

4. João gosta de explorar propriedades interessantes dos números reais e, em um de seus estudos, resolveu criar uma nova operação, que chamou de estrela e representou pelo símbolo $\star$. Para dois números reais x e y, João definiu a operação estrela da seguinte forma:

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^2 - 4}.$$

a) Calcule $\sqrt[3]{22} \star 3$.

b) Determine os números reais e tais que, para todo número real a, a operação $a \star e$ resulte em a.

c) Mostre que não existe nenhum número real e tal que a igualdade $e \star a = a$ é satisfeita para todo número real a.

5. Um triângulo equilátero possui propriedades notáveis que o tornam uma figura especial na geometria plana.

   a) Mostre que a área de um triângulo equilátero de lado L é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot L^2$.

   b) Considere um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero AEF dispostos como na figura abaixo. Se a área do quadrado mede 9 cm^2, qual é a área do triângulo?

