



PROJETO LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA: O QUE UNIVERSIDADE E ESCOLA BÁSICA TÊM A APRENDER UMA COM A OUTRA?

Humberto José Bortolossi

humbertobortolossi@id.uff.br

Universidade Federal Fluminense

Projeto Livro Aberto de Matemática / Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro

CONTEXTO

CUSTOS DE PRODUÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

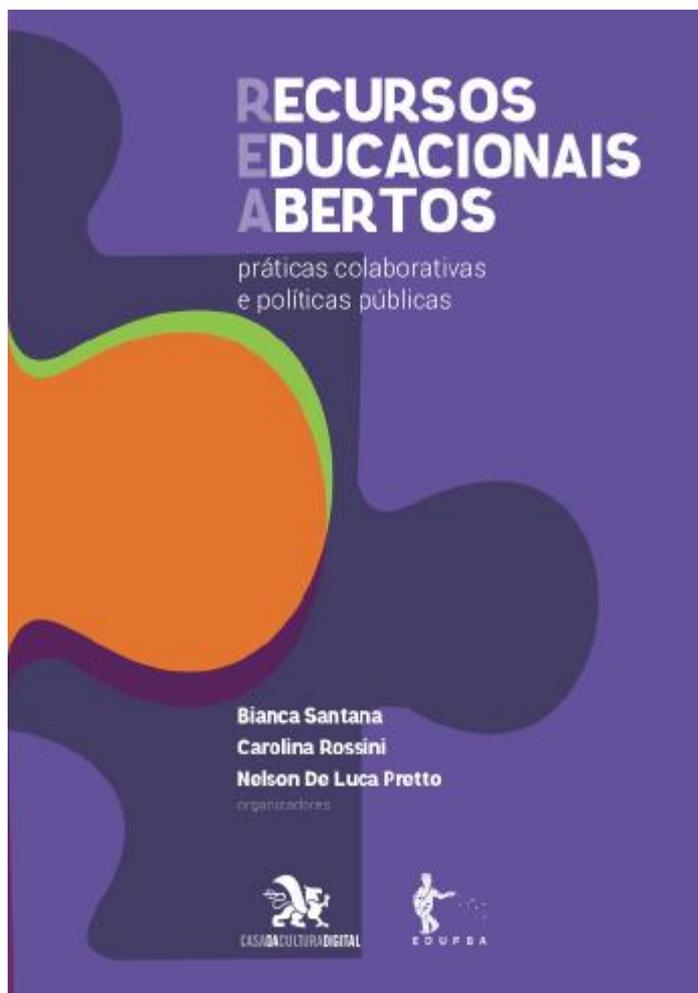


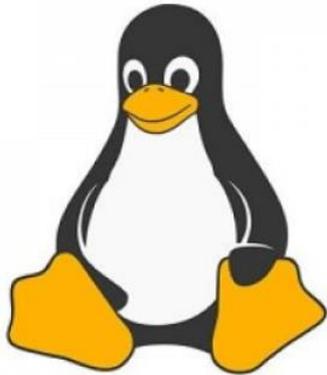
Tabela 3. Economias de escala na edição e impressão de livros

NÚMERO DE EXEMPLARES	CUSTO MÉDIO	CUSTO DA IMPRESSÃO
600	18,00	-
1.000	10,00	2,70
2.000	7,00	2,10
5.000	4,00	1,40
10.000	2,50	-

Fonte: Earp e Kornis (2005)

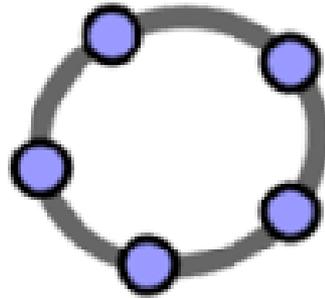
INICIATIVAS DE RECURSOS GRATUITOS

**SISTEMAS
OPERACIONAIS**



Linux

**SOFTWARES DE
GEOMETRIA DINÂMICA**



GeoGebra

**LIVROS
DIDÁTICOS**



livroaberto

UM LIVRO ABERTO



<http://www.umlivroaberto.org>

impa



O projeto **Um Livro Aberto**, promovido pelo IMPA e pela OBMEP, é um esforço de professores (das **universidades** e das escolas **básicas**) e alunos para produzir, de maneira colaborativa, livros didáticos de matemática com excelência acadêmica e licença aberta.

O objetivo é garantir livre reprodução, distribuição, modificações e derivações dos materiais produzidos.

QUAIS SÃO AS CARACTERÍSTICAS DA PROPOSTA DO PROJETO LIVRO ABERTO?

Material concebido com suporte científico e apoiado em evidências.

Foco no **entendimento conceitual**.

Com a mediação do professor, é o aluno que constrói seu próprio conhecimento por meio de atividades.

Livro do professor: objetivos, orientações, distratores, respostas comentadas.

É gratuito, pode ser adaptado e modificado para atender as especificidades de cada comunidade.

DIFERENTES INTEPRETAÇÕES PARA O MESMO TEMA

52 REGRAVAÇÕES DE EMOÇÕES

METÁFORA DAS REGRAVAÇÕES DE ROBERTO CARLOS



Adrian Ricardo Oliveira, [Agnaldo Timóteo](#), Alaor Macedo, Alex Cohen, Alexandre Pires/Luiz Otávio, Almir Canedo, Arthur Moreira Lima, Augusto Neves dos Reis/Elvercio Pereira, Bibiu de Caruaru, Bob Young/His super sax, Carlinhos Mafasoli, Cauby Peixoto, Chico Costa, [Djavan](#), Duda Anízio, Eccos, Eduardo Lages, Emilio Santiago, Erasmo Carlos/Milton Nascimento, [Fábio Jr.](#), Fábio Jr. / Cauby Peixoto / Priscila / Ana Torr, Francisco Petrônio, Gentil Teodoro Vaz / Nivaldo Teodoro Vaz, Grande Orquestra Tupy, Impacto show, Irakitan, [Ivete Sangalo](#), Jacaré / Rubinho / Fernando Merlino, João Roberto Kelly, João Sérgio, Jose Alcides da Silva, Line, Luiz Carlos Silva, Marcio Greyck, Maria Bethânia, Marina, Markos Resende, Miami Light Orchestra, Mu Chebabi, Negritude Jr., Os Vips, Qual é a música (trecho instrumental usado no programa televisivo), Renato Ladeira, Renato Suhett, Richard Clayderman, Rivelito Teixeira da Silva, Sistema, Tim Rescala, Trio Copacabana, Watusi, Watusi / Grande Otelo e Wilma Vasconcellos Abubakir.

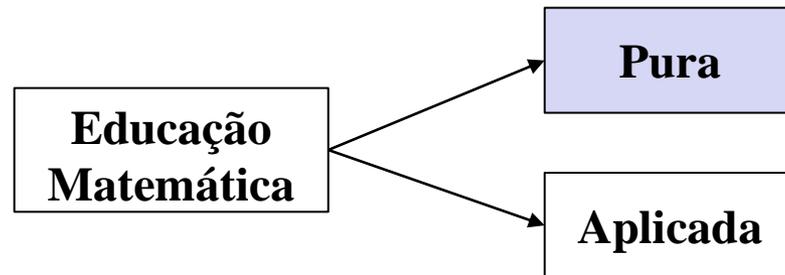
COMO ESTÁ A PARCERIA ESCOLA E UNIVERSIDADE?



KILPATRICK: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PURA

A Razoável Ineficácia da Educação Matemática

Jeremy Kilpatrick (1981)



Procedimentos

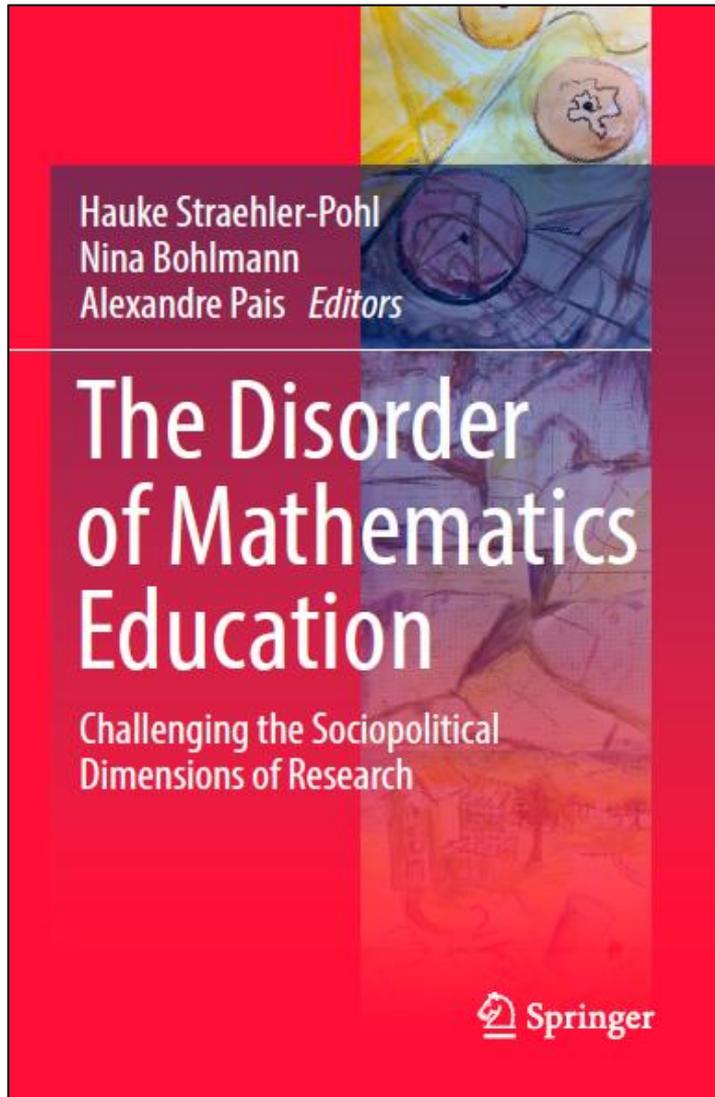
Dados

Constructos

EDUCADOR MATEMÁTICO

A REALIDADE ESCOLAR

2017



Hauke Straehler-Pohl
Nina Bohlmann
Alexandre Pais *Editors*

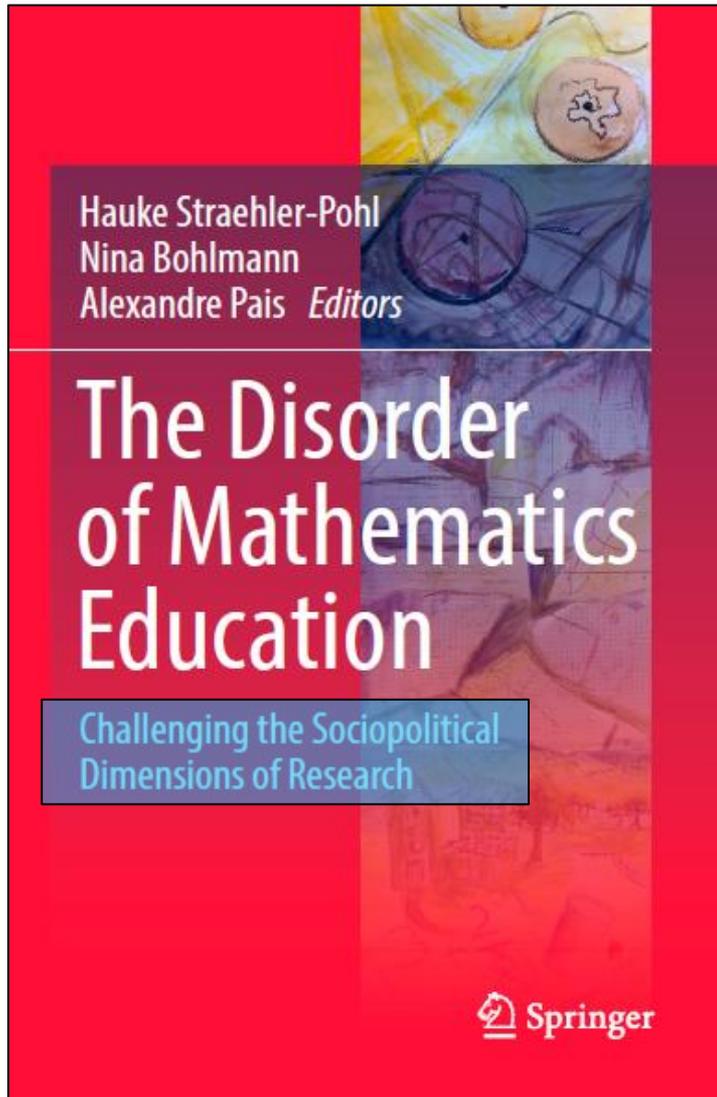
The Disorder of Mathematics Education

Challenging the Sociopolitical
Dimensions of Research

 Springer

A REALIDADE ESCOLAR

2017



Por que a pesquisa em Educação Matemática assume uma realidade tão diferente daquela experimentada pela maioria dos estudantes e professores nas escolas mundo afora?

A pesquisa em Educação Matemática é narcisista pela falta de um objeto concreto. Ela só vê a si mesma: suas próprias expectativas, pressupostos e preconceitos.

UMA AÇÃO PARA PROMOVER A INTEGRAÇÃO

**LIVRO
DIDÁTICO**

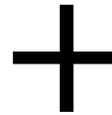


**MANUAL DO
PROFESSOR**



O material é apresentado
**sem explicitar como a
pesquisa é usada!**

O material é apresentado
com **muitos detalhes
técnicos!**



ESCOLA

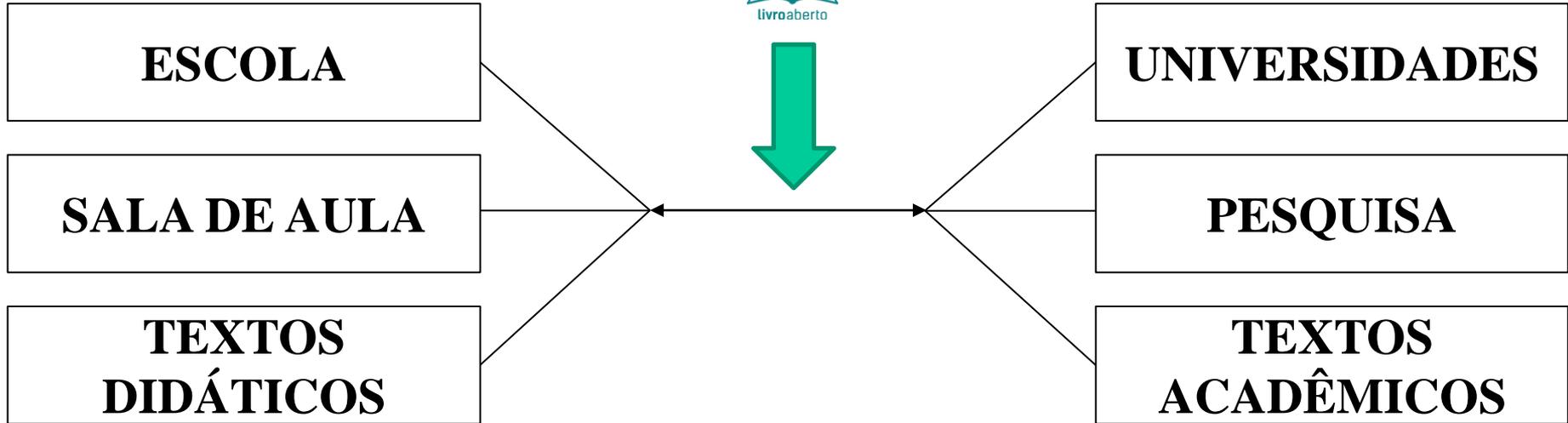
SALA DE AULA

**TEXTOS
DIDÁTICOS**

UNIVERSIDADES

PESQUISA

**TEXTOS
ACADÊMICOS**



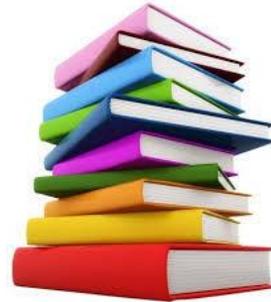
UMA (ENTRE MUITAS) MOTIVAÇÕES PESSOAIS

PROFESSOR
PESQUISADOR
NUTELLA



SÓ SABE
CRITICAR
O QUE OS OUTROS
FAZEM

CONCEPÇÃO DE
LIVROS DIDÁTICOS



PROFESSOR
PESQUISADOR
RAIZ



CRITICA
MAS TAMBÉM
TENTA PROPOR
ALTERNATIVAS

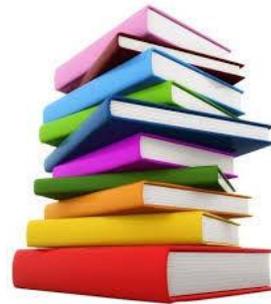
UMA (ENTRE MUITAS) MOTIVAÇÕES PESSOAIS

PROFESSOR
PESQUISADOR
NUTELLA



TRATA DE
APENAS UM OU
OUTRO PONTO
ESPECÍFICO

CONCEPÇÃO DE
LIVROS DIDÁTICOS



PROFESSOR
PESQUISADOR
RAIZ



ENCARA O
ARCO ESCOLAR
COMPLETO:
EF + EM + FP

PROCESSOS

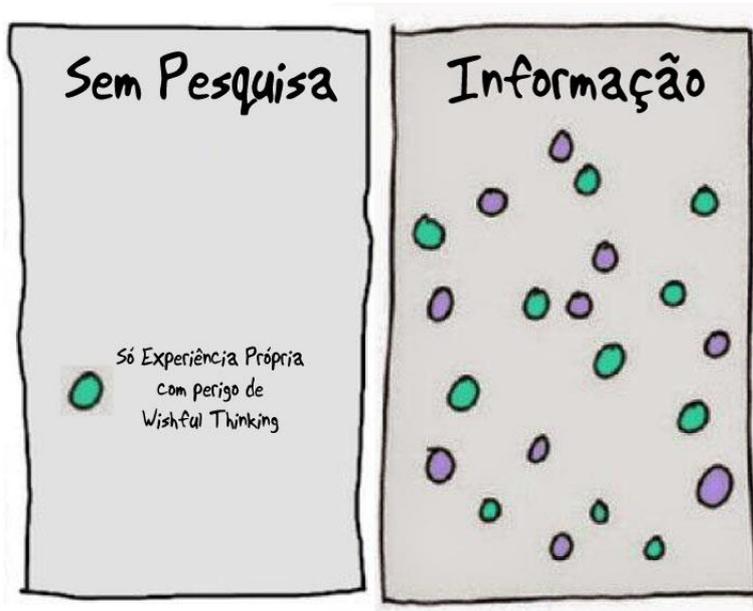
PROCESSOS

Sem Pesquisa

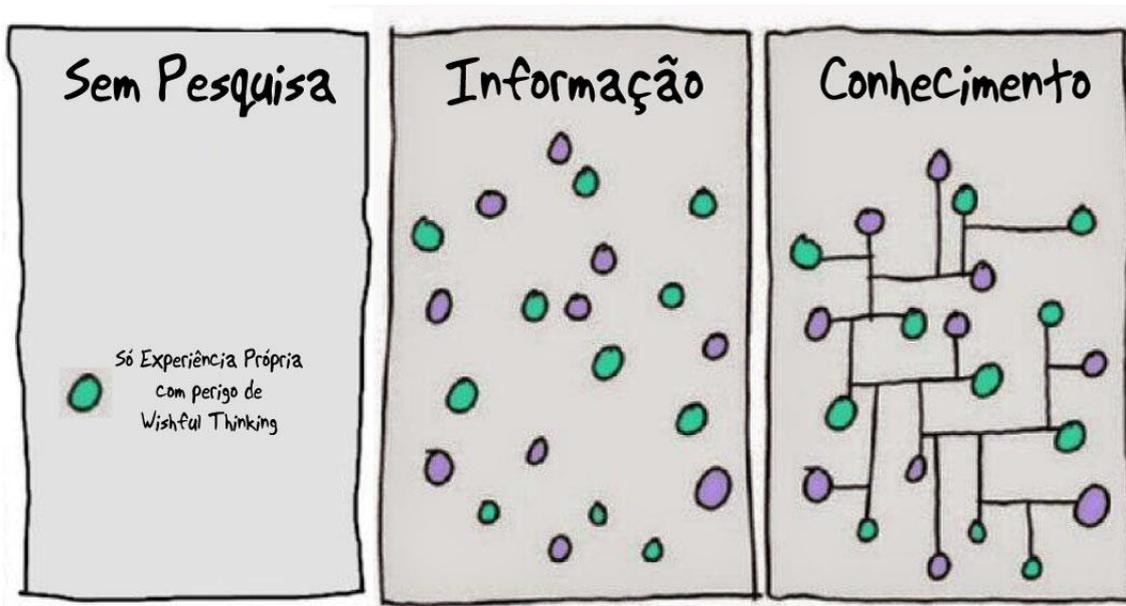
Só Experiência Própria
com perigo de
Wishful Thinking



PROCESSOS



PROCESSOS



PROCESSOS

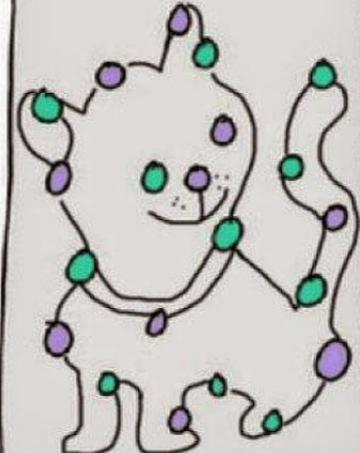
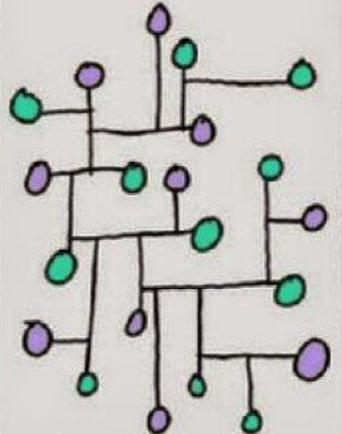
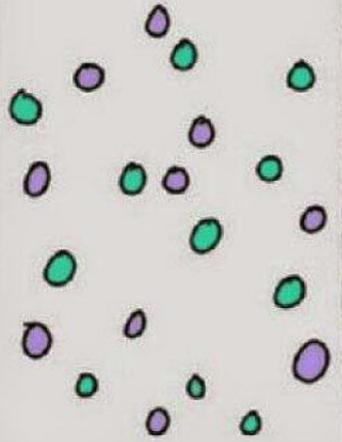
Sem Pesquisa

Só Experiência Própria
com perigo de
Wishful Thinking

Informação

Conhecimento

Criatividade



PROCESSOS

Sem Pesquisa

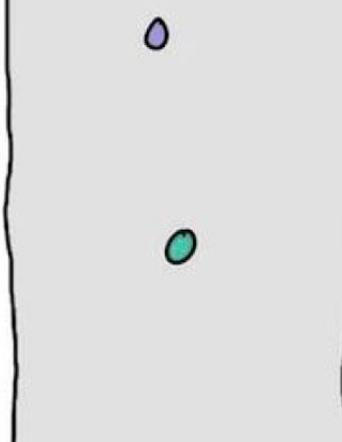
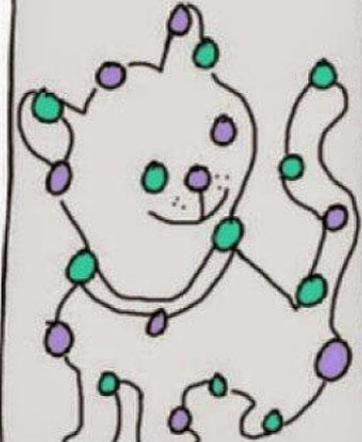
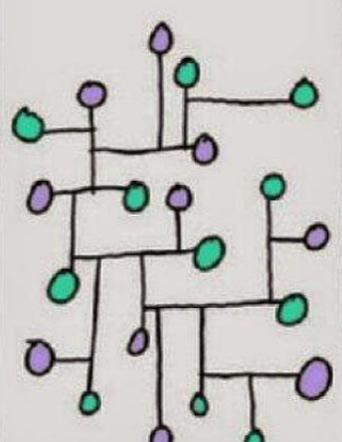
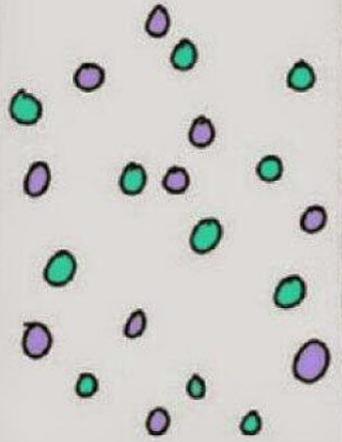
Só Experiência Própria
com perigo de
Wishful Thinking

Informação

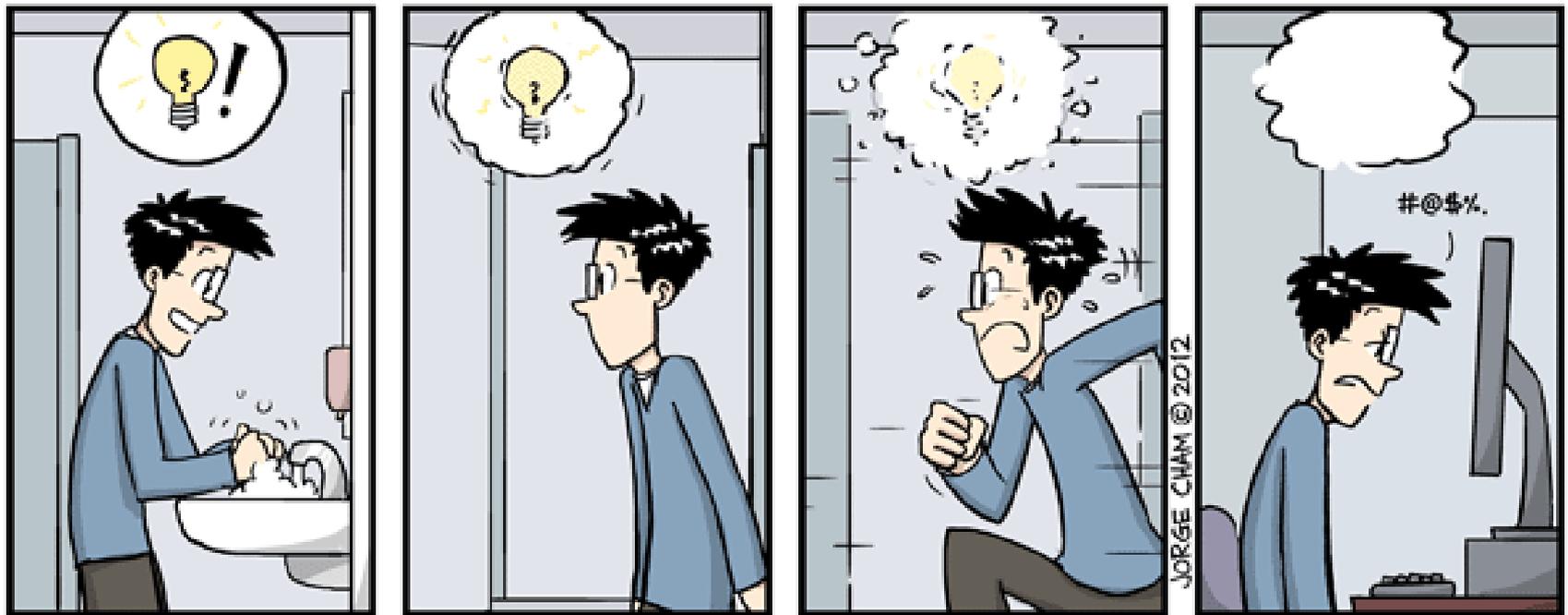
Conhecimento

Criatividade

Sabedoria



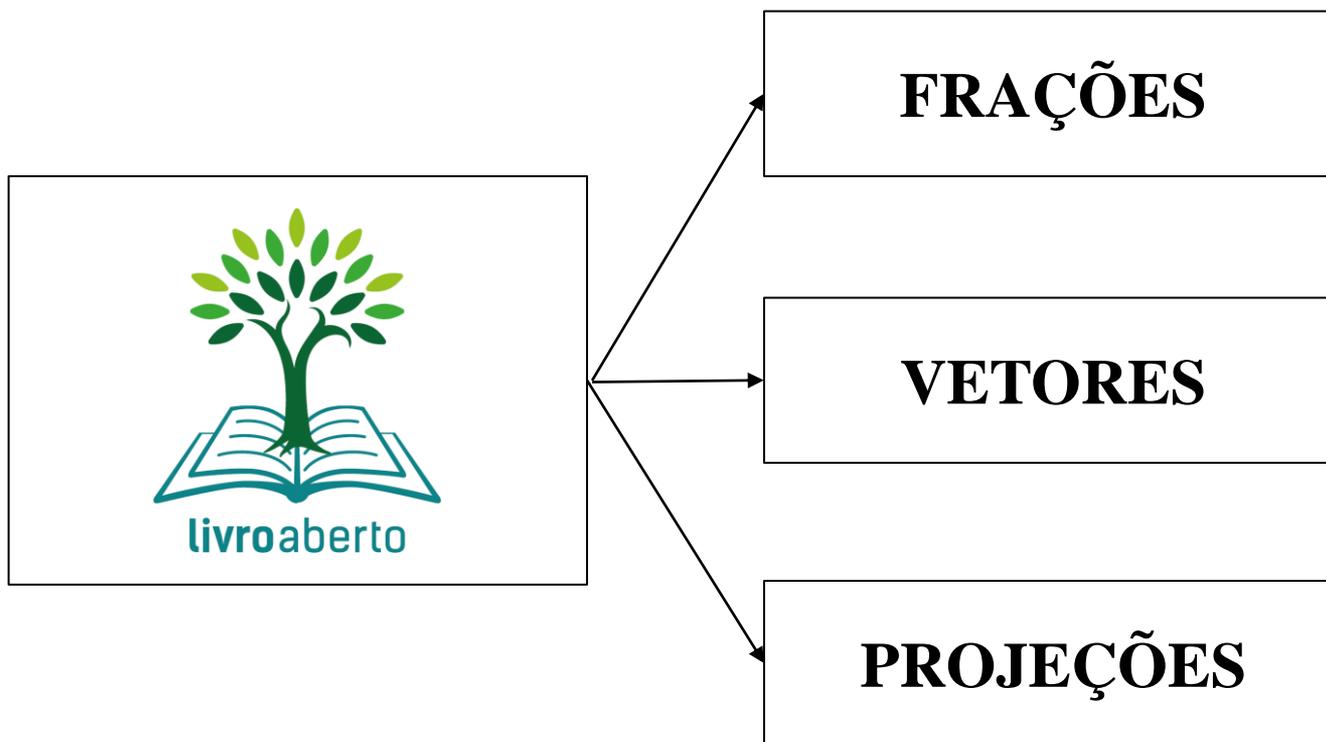
PROCESSOS



WWW.PHDCOMICS.COM

Não esqueça de anotar a ideia assim que ela aparecer!

UM PERCURSO (ENTRE MUITOS POSSÍVEIS)



FRAÇÕES

MEME: FRAÇÕES E A MALDIÇÃO DO CONHECIMENTO

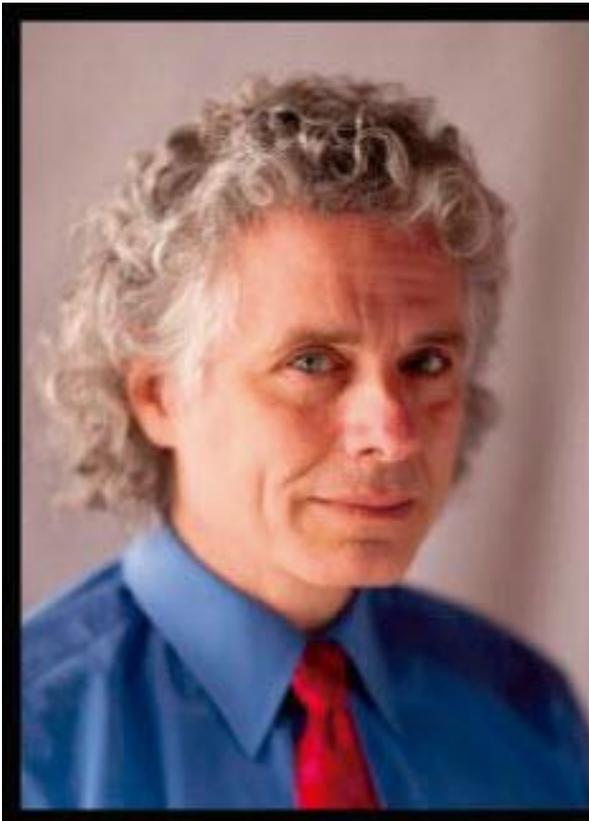


HABILIDADE DE EXPLICAR FRAÇÕES



A MALDIÇÃO DO CONHECIMENTO

PENSAR NA MATEMÁTICA DA ESCOLA BÁSICA NA PERSPECTIVA DE QUEM AINDA VAI APRENDÊ-LA PELA PRIMEIRA VEZ: O ALUNO!

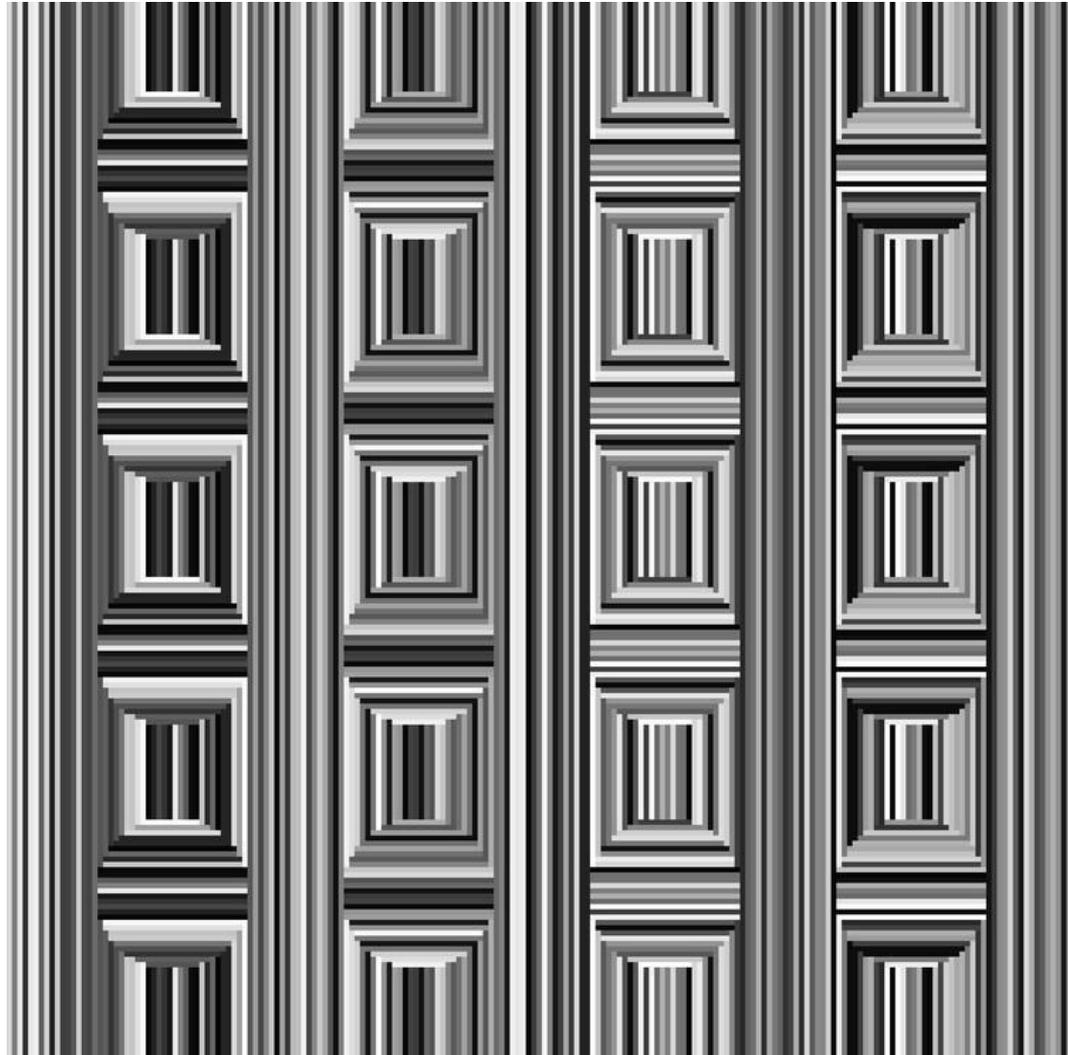


MALDIÇÃO DO CONHECIMENTO

É a tendência de esquecermos o que é não saber um determinado assunto depois que o aprendemos.

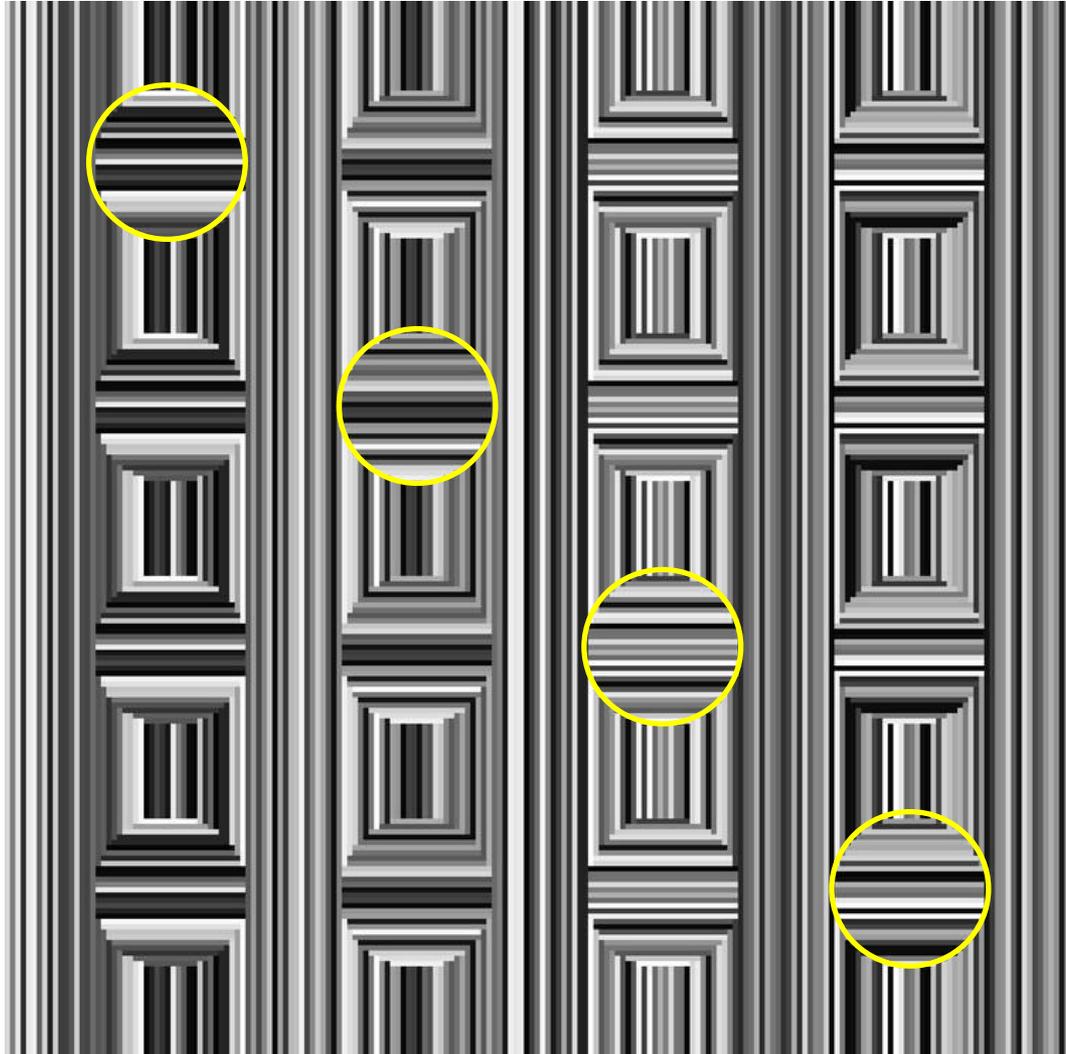
Stephen Pinker
(Harvard University)

A MALDIÇÃO DO CONHECIMENTO



COFFER ILLUSION: HÁ 16 CÍRCULOS NESSA IMAGEM. VOCÊ CONSEGUE VÊ-LOS?

A MALDIÇÃO DO CONHECIMENTO



COFFER ILLUSION: HÁ 16 CÍRCULOS NESSA IMAGEM. VOCÊ CONSEGUE VÊ-LOS?

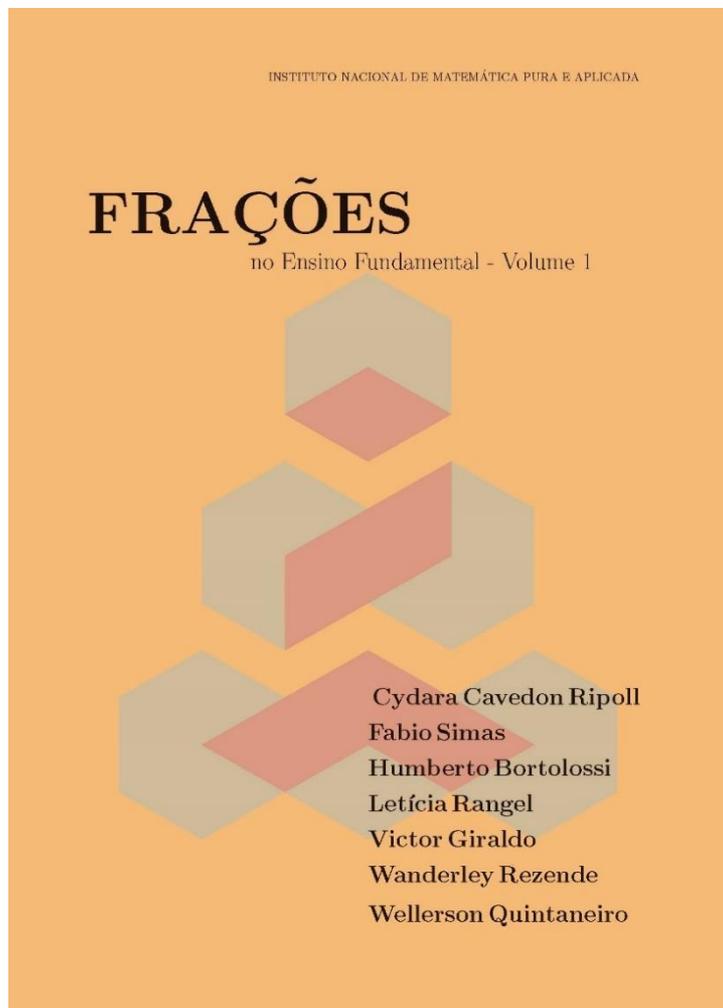
A MALDIÇÃO DO CONHECIMENTO

Alunos do PIBID da Matemática da UFF



<https://youtu.be/UTI1R3Lo8To>

PROJETO PILOTO: FRAÇÕES



Equipe Principal



Augusto Teixeira
(IMPA)



Cydara Cavendon Ripoll
(UFRGS)



Fabio Simas
(UNIRIO)



Humberto Bortolossi
(UFF)



Leticia Rangel
(CAp UFRJ)



Victor Giraldo
(UFRJ)



Wanderley Rezende
(UFF)



Wellerson Quintaneiro
(IFRJ)

<https://umlivroaberto.org/producao/fracoes/>

POR QUE FRAÇÕES?

Porque é um assunto que tem se mostrado muito difícil para os alunos.

Quais são as causas das dificuldades?

- Os vários significados: parte-todo; divisão; razão; medida; operador.
- Práticas em sala de aula com foco na notação e na memorização das regras, sem um entendimento conceitual.
- A maneira como frações são escritas [articulando dois parâmetros: o numerador e o denominador colocados na posição vertical].
- Usar propriedades dos naturais que deixam de valer para os racionais.
- A coordenação necessária das diferentes unidades em diferentes níveis.

(McNamara e Shaughnessy, 2010; Watanabe, 1995)

POR QUE FRAÇÕES?

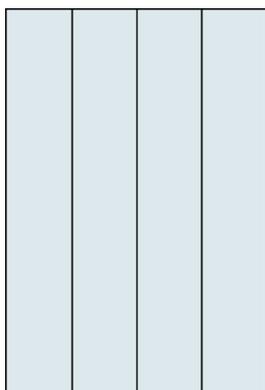
Porque frações são elementos chaves no desenvolvimento do **raciocínio proporcional**. (Lamon, 1999).

Porque frações fornecem um ambiente para se introduzir e se treinar generalizações e abstrações, essenciais para o aprendizado da **álgebra**. (Wu, 2001; Nunes, 2008).

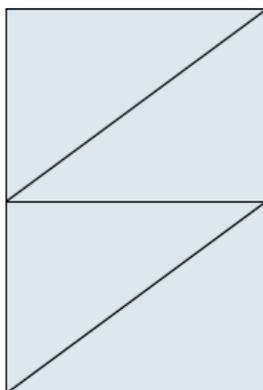
Porque existe uma correlação positiva forte ($r > 0.80$) entre o conhecimento de frações e o desempenho como um todo em matemática no Ensino Médio. De fato, o conhecimento de fração no quinto ano prediz como será o desempenho futuro em matemática do aluno melhor do que parâmetros como testes de QI, proficiência em leitura, capacidade de memória, renda e educação familiares e o conhecimento prévio dos números naturais. (Siegler et al., 2013).

ATIVIDADE 4 DA LIÇÃO 1

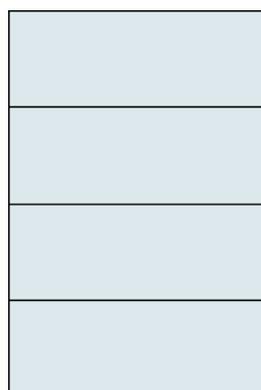
Quais dos oito retângulos a seguir estão divididos em quartos? **Resposta: todos estão!**



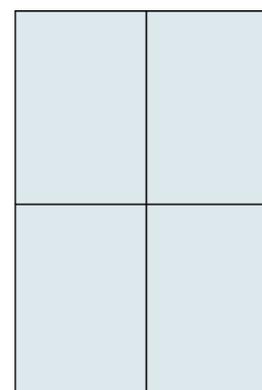
(A)



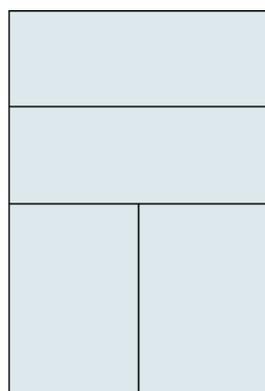
(B)



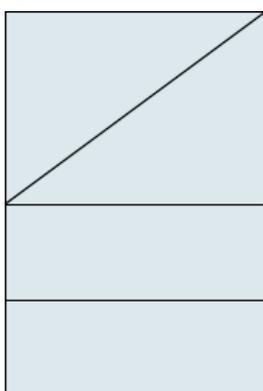
(C)



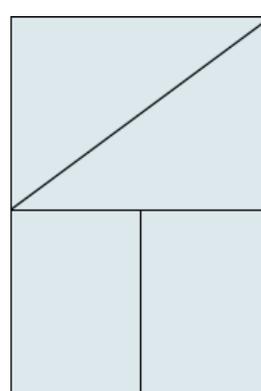
(D)



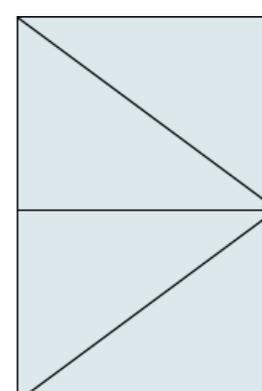
(E)



(F)



(G)

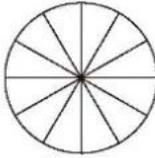
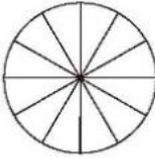
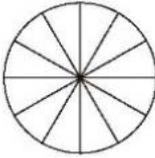
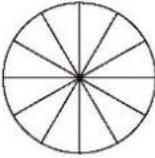


(H)

EXEMPLO: ATIVIDADE 4 DA LIÇÃO 2

Atividade 5

Uma pizza gigante foi dividida em doze fatias iguais. Pedro comeu quatro fatias, Isabella cinco fatias, Bernardo duas fatias e Manuela apenas uma fatia.

	Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
Pinte a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, por extenso, a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, usando notação simbólica matemática, a fração de pizza consumida por cada pessoa				

- Na sua opinião, qual representação de fração “gasta menos lápis” para ser escrita: usando notação simbólica matemática, escrevendo por extenso ou pintando?
- Na sua opinião, qual a representação que mais rapidamente ajuda a decidir quem comeu mais e quem comeu menos pizza?

EXEMPLO: ATIVIDADE 4 DA LIÇÃO 2

Manual do Professor

Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

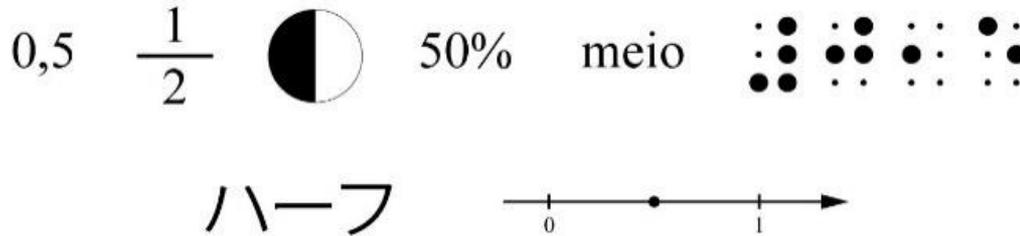
- ★ Comparar diversas maneiras de se representar uma fração (por extenso, simbolicamente e graficamente).
- ★ Discutir aspectos dessas representações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ★ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ★ É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, as frações $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$ descrevem corretamente a quantidade de pizza consumida por Pedro. Nestes casos, dê oportunidade para que cada aluno explique como chegou à sua resposta pois, procedendo desta maneira, mesmo de forma pontual, os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com nomes diferentes, o que vai motivar o assunto “frações equivalentes” que será tratado na Lição 4.
- ★ Esta atividade procura mostrar uma das qualidades da notação simbólica matemática: expressar um conceito com economia de escrita. Ela permite encapsular detalhes, simplificar procedimentos, abstrair e generalizar conceitos. Assim, é muito importante fazer com que seus alunos se familiarizem com a notação simbólica matemática para frações: ela será fundamental nas lições sobre operações com frações, por exemplo.

TEORIA E PRÁTICA

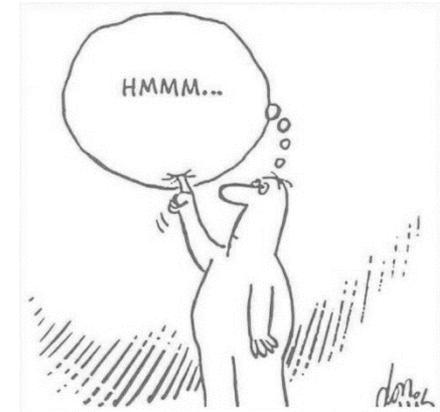
SEMIÓTICA (DUVAL)



**BASE
NACIONAL
COMUM
CURRICULAR**
EDUCAÇÃO É A BASE

Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: **equivalência**, **ordem**, **proporcionalidade**, **interdependência**, **representação**, **variação** e **aproximação**.

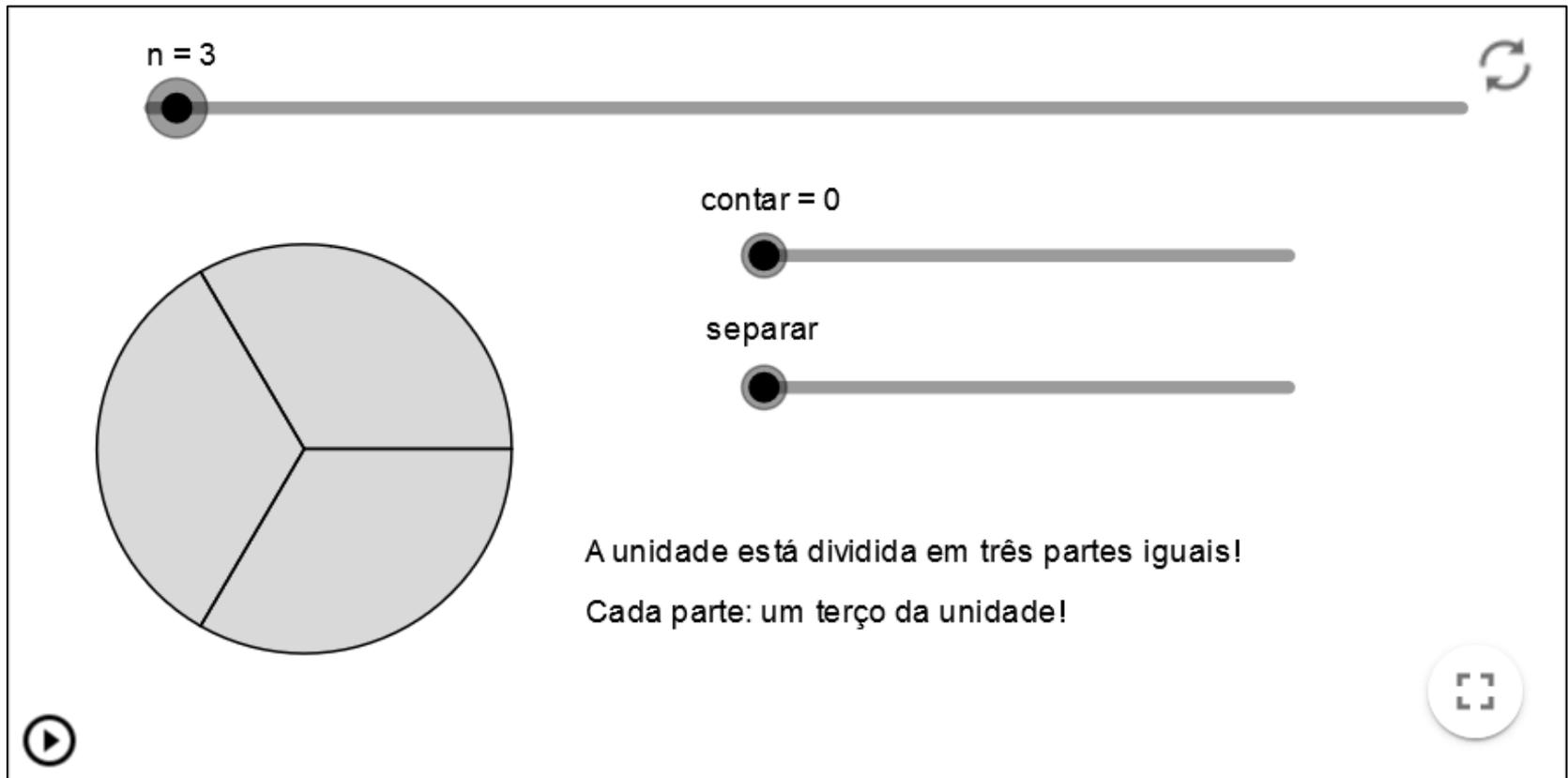
METACOGNIÇÃO



Ensino da Matemática:
O Modelo Pentagonal do Currículo
de Matemática de Singapura



O PAPEL DA TECNOLOGIA



The image shows a screenshot of the Geogebra software interface. On the left, a circle is divided into three equal sectors. Above the circle, a slider is set to $n = 3$. To the right of the circle, there are two more sliders: the first is labeled "contar = 0" and the second is labeled "separar". Below the circle, there is text in Portuguese: "A unidade está dividida em três partes iguais!" and "Cada parte: um terço da unidade!". The interface includes standard navigation icons: a play button in the bottom left, a refresh button in the top right, and a zoom-in button in the bottom right.

$n = 3$

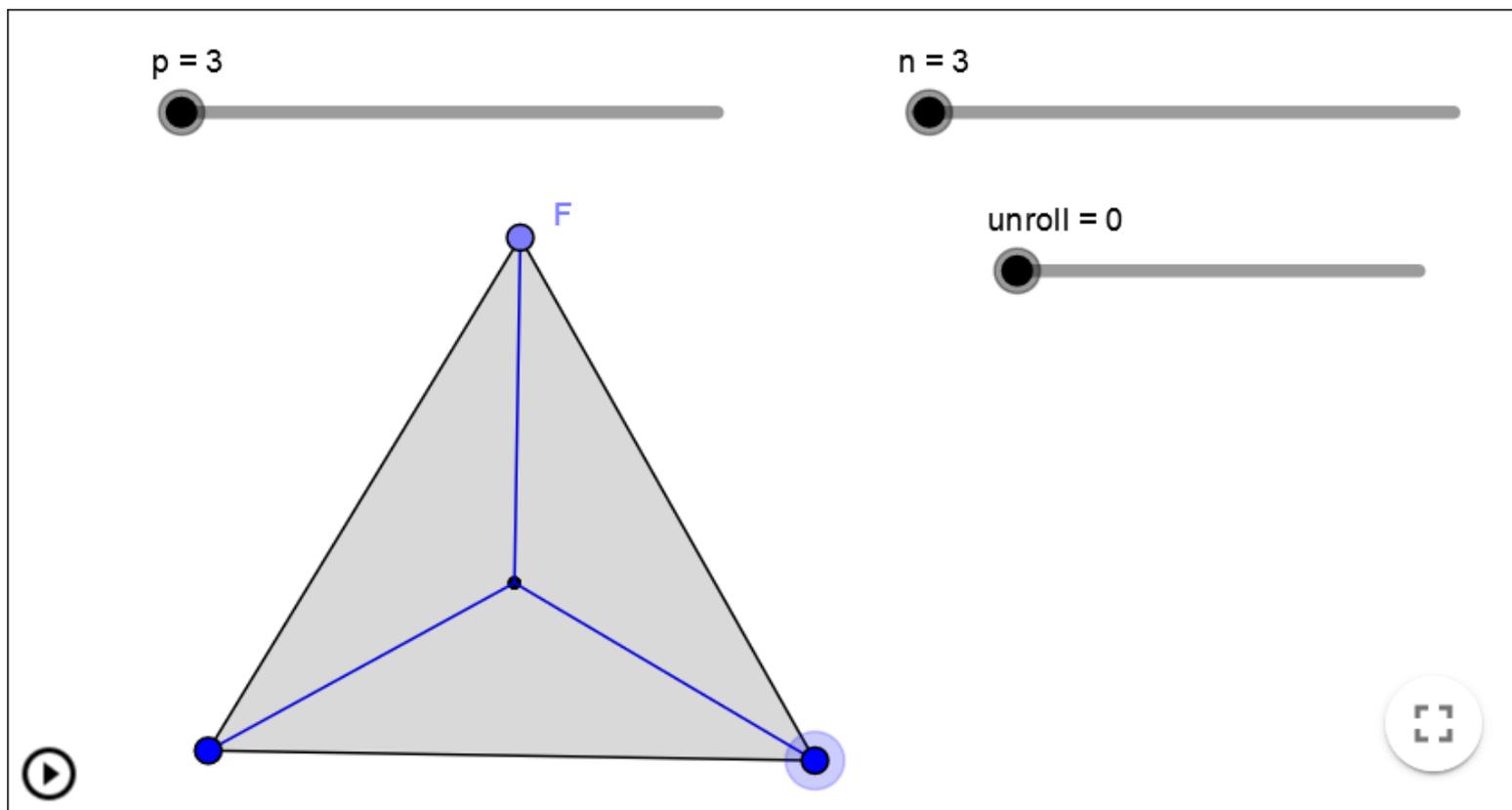
contar = 0

separar

A unidade está dividida em três partes iguais!
Cada parte: um terço da unidade!

<https://www.geogebra.org/m/r7HNZTSj>

UMA DESCOBERTA



<https://www.geogebra.org/m/nKzrxH7C>

OFICINA VIA PLATAFORMA DESMOS

160 PROFESSORES DA PREFEITURA DE CAMBÉ

The image shows a Google Meet session in progress. At the top, a browser window displays the URL `meet.google.com/chq-nivv-vin` and several open tabs, including 'Caixa de entrada', 'Universidade Federal', and 'Frações: Lição 1'. Below the browser, a sharing bar indicates the meeting is being shared to `teacher.desmos.com`. The main meeting interface features a 'REC' indicator and the text 'You are presenting'. A top control bar shows 160 participants, the time '10:21 AM', and a 'Presentation (You)' indicator. The central area is a grid of 160 circular avatars, each with a name and a microphone icon. The avatars are arranged in approximately 10 rows and 16 columns. A green box highlights one of the avatars in the middle-right section. At the bottom, a Windows taskbar is visible with a search bar containing the text 'Digite aqui para pesquisar' and several application icons. The system tray on the right shows the date '08/10/2020' and time '10:21'.

FEEDBACK DOS PROFESSORES DE CAMBÉ: ADEQUAÇÃO LINGUÍSTICA

Etta Zuber Falconer



Com todo o respeito quero deixar uma observação. Por favor não se ofenda, o curso é muito bom, mas algumas coisas são contraditórias...

A primeira resposta que devemos dar de todos os exercícios é se estamos cientes que estamos respondendo como se fossemos alunos...

Não sei se estou por fora, mas pelo menos nenhum aluno meu do ensino fundamental 1 conseguiria responder a maioria dessas questões, talvez uma ou outra, mas a complexidade dos enunciados acredito ser muito difícil para eles... Eu como professora, estou lendo várias vezes... então, na minha opinião, que pode estar errada, mas, como em todas as atividades você pede para que registremos uma observação de "qualquer natureza", me convenceu pelo cansaço... rrsrs...

As ideias e propostas são boas e inovadoras... só os enunciados que na minha opinião deveriam ser mais objetivos e sucintos... por exemplo... Nesse enunciado...

Na tabela a seguir, pinte cada figura de modo que a parte pintada seja a fração da figura indicada na coluna à esquerda e na mesma linha. Indique também, usando símbolos matemáticos (desenho-os com a ferramenta da canetinha), qual fração da figura ficou sem ser pintada.

1. Pinte a representação de cada fração.
2. Utilizando a canetinha, indique qual a fração da figura ficou sem pintar, para isso use números.

Veja bem, pode ser que esteja equivocada, mais uma vez, é só uma opinião sobre como eu faria se fosse meus alunos... Não quero dizer que não se pode fazer um enunciado mais complexo... acredito que podemos sim...porém, aos poucos... de forma gradativa...

ADEQUAÇÃO E COMPLEXIDADE LINGUÍSTICA

Ao redigir uma questão, de acordo com a série escolar, considerar: a **frequência das palavras** (vocabulário mais familiar); a **voz da frase verbal** (se uma bola é tirada da urna → se você pegar uma bola da urna); as **cláusulas condicionais** (se duas baterias na amostra estiverem com defeito → ele encontrou três skates quebrados na amostra); as **cláusulas relativas** (o número total de jornais que o Lee entrega em 5 dias → quantos jornais ele entrega em 5 dias); as **exposições abstratas ou impessoais feitas mais concretas** (2,675 rádios vendidos → 2,675 rádios que o Senhor Jones vendeu).

Abedi, Jamal; Lord, Caro. **The Language Factor in Mathematics Tests**. Applied Measurement in Education, v. 14, n. 3, p. 219-234, 2001.

http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/S15324818AME1403_2

ADEQUAÇÃO LINGUÍSTICA

Salvamento Automático 000 - Word Combined Norms.xlsx Pesquisar Humberto Bortolossi

Arquivo **Página Inicial** Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Ajuda Acrobat

Compartilhar Comentários

Calibri 11 A A

Fonte Alinhamento Número Estilos Células Edição

A2

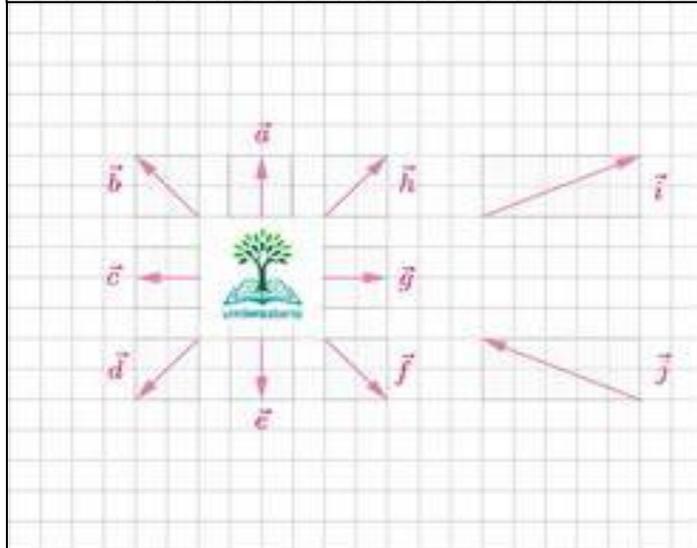
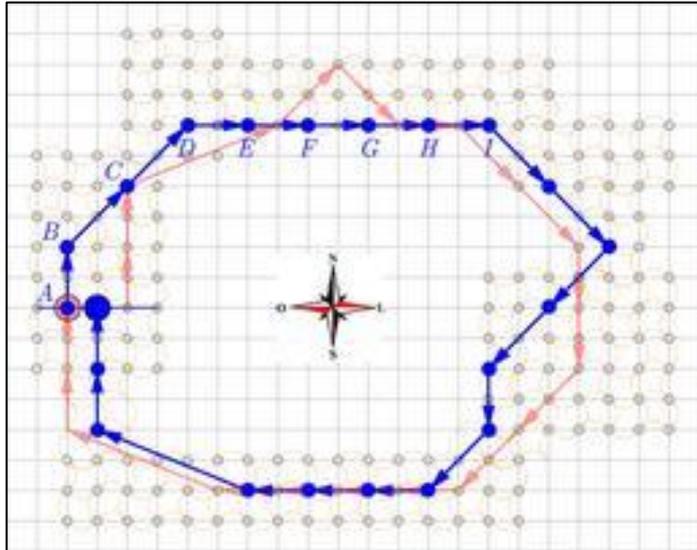
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Word	Prevalence	PrevalenceP	Valence	Arousal	Dominance	Concreteness	AoA	lgCD	PrevalenceMale	PrevalenceFemale	PrevalenceMaleP	Prevalence
1													
2	a	1,9170	93%-98%						0,000000	2,3447	2,3679	93%-98%	93%
3	aardvark	1,6840	93%-98%	0,534441	0,355790	0,469633	0,818697	9,932310	3,970292	1,7725	1,5200	93%-98%	93%
4	aardwolf	-0,7880	0%-50%							-0,6739	-0,9800	0%-50%	0%-
5	abaca	-0,7060	0%-50%	0,495969	0,415133	0,530977	0,528117	14,747833	0,693147	-0,8909	-0,6798	0%-50%	0%-
6	aback	1,0770	84%-93%	0,510638	0,395727	0,490450	0,287370	10,116413	2,890372	0,8929	1,0727	50%-84%	84%
7	abacus	1,4280	84%-93%	0,604847	0,296763	0,567219	0,780137	9,295625	4,442651	1,3617	1,2920	84%-93%	84%
8	abaft	-0,8760	0%-50%	0,477426	0,253608	0,512192	0,243816	14,577317	2,079442	-0,7150	-0,9542	0%-50%	0%-
9	abalone	0,4960	50%-84%	0,555542	0,390808	0,518992	0,984806	12,826289	4,875197	0,3153	0,6333	50%-84%	50%
10	abandon	2,4270	93%-98%	0,428630	0,395017	0,502463	0,288767	9,216081	8,207402	2,2904	2,5758	93%-98%	~10
11	abandoned	2,5760	~100%	0,309504	0,331686	0,394502	0,290426	8,889759	8,664060	2,5758	2,5758	~100%	~10
12	abandonee	0,4090	50%-84%						0,000000	0,4013	0,3797	50%-84%	50%
13	abandoner	1,0810	84%-93%						2,302585	1,0813	1,0224	84%-93%	84%
14	abandonment	2,1850	93%-98%	0,308960	0,374685	0,379228	0,263360	10,300651	5,560682	2,3598	2,2387	93%-98%	93%
15	abase	0,6670	50%-84%	0,500181	0,370555	0,542916	0,288355	11,405502	2,397895	0,5850	0,7214	50%-84%	50%
16	abased	0,7840	50%-84%	0,282712	0,447175	0,413523	0,214468	14,032662	2,484907	0,6666	0,8529	50%-84%	50%
17	abaseMENT	0,8710	50%-84%	0,427658	0,392664	0,500979	0,084418	12,793271	1,791759	0,8915	0,7709	50%-84%	50%
18	abash	1,1930	84%-93%						1,609438	1,0001	1,1451	84%-93%	84%
19	abashed	1,5280	93%-98%	0,467811	0,378759	0,507339	0,122602	13,459012	2,944439	1,3264	1,5795	84%-93%	93%
20	abashedly	1,0740	84%-93%							1,0577	0,8708	84%-93%	50%

output-01 100%

Por que a Academia Brasileira de Letras não faz uma planilha assim para o Português?

VETORES

EQUIPE DE VETORES



Fabio Simas
(UNIRIO)



Humberto Bortolossi
(UFF)



Lhaylla Crissaff
(UFF)



Letícia Rangel
(CAp UFRJ)



Cydara Cavendon Ripoll
(UFRGS)

O QUE EXIGIA A BNCC?

(M11MT01) Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico, caracterizado por suas coordenadas, aplicando-o em situações da Física.

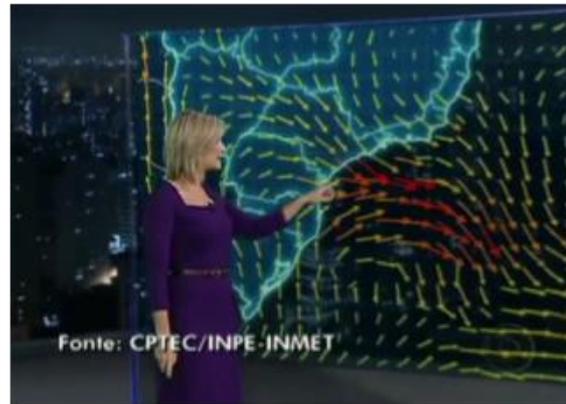
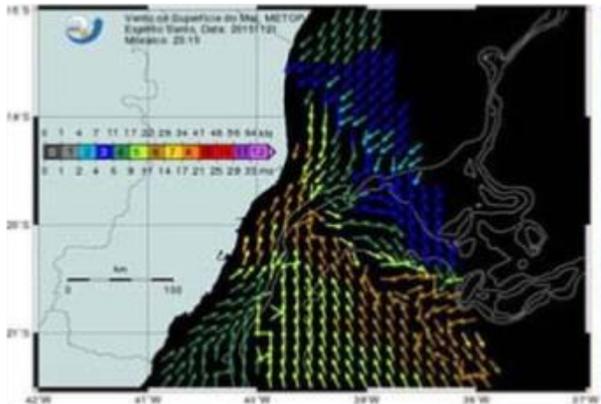
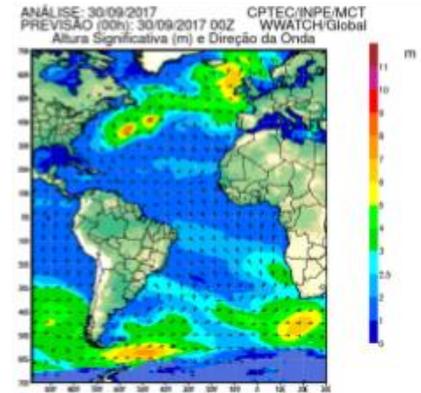
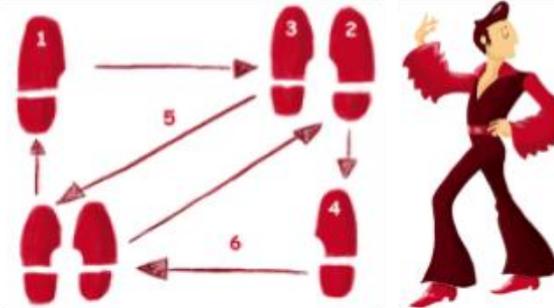
O trabalho com vetores deve proporcionar aos/s estudantes, inicialmente, compreender o conceito de vetor tanto do **ponto de vista geométrico** (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) como do **ponto de vista algébrico** (caracterizado por suas coordenadas). Na continuidade, esse trabalho é ampliado para que eles sejam capazes de interpretar a representação geométrica da **soma de vetores** e da **multiplicação de um vetor por um escalar** e de **compreender as relações entre vetores e as transformações isométricas** (reflexão, translação e rotação). É importante que **todo esse trabalho seja proposto de modo articulado e integrado com situações estudadas na Física**, por exemplo, e com apoio de **softwares de geometria dinâmica**.

EXEMPLO: VETORES NO ENSINO MÉDIO

Toda seta é vetor?

Atividade

Vimos que vetores são representados geometricamente por setas. Mas será que toda seta em um desenho representa um vetor? Analise as imagens a seguir e decida se as setas desenhadas representam um vetor, isto é, se as setas, de algum modo, estão "codificando" direção, sentido e módulo. Justifique sua resposta!



$$f : A \rightarrow B$$

EXEMPLO: VETORES NO ENSINO MÉDIO

Para o Professor

Objetivos específicos

- Identificar, nas situações apresentadas no enunciado do exercício, se as setas representam ou não um vetor.
- Perceber que grandezas vetoriais podem ser representadas geometricamente por outros meios (no caso, setas de mesmo tamanho para representar direção e sentido e uma escala de cores para representar o módulo) e que estes meios são usados em outras áreas.
- Perceber os diversos usos de setas como recurso gráfico.

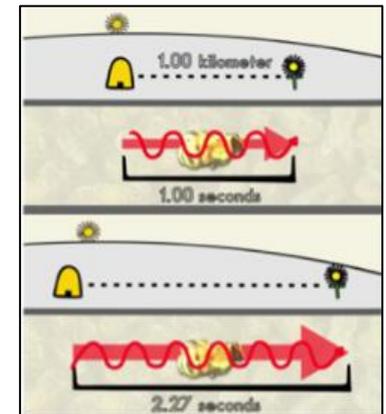
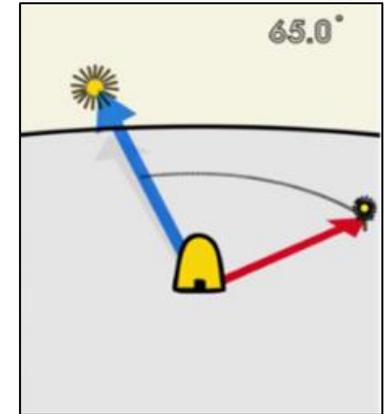
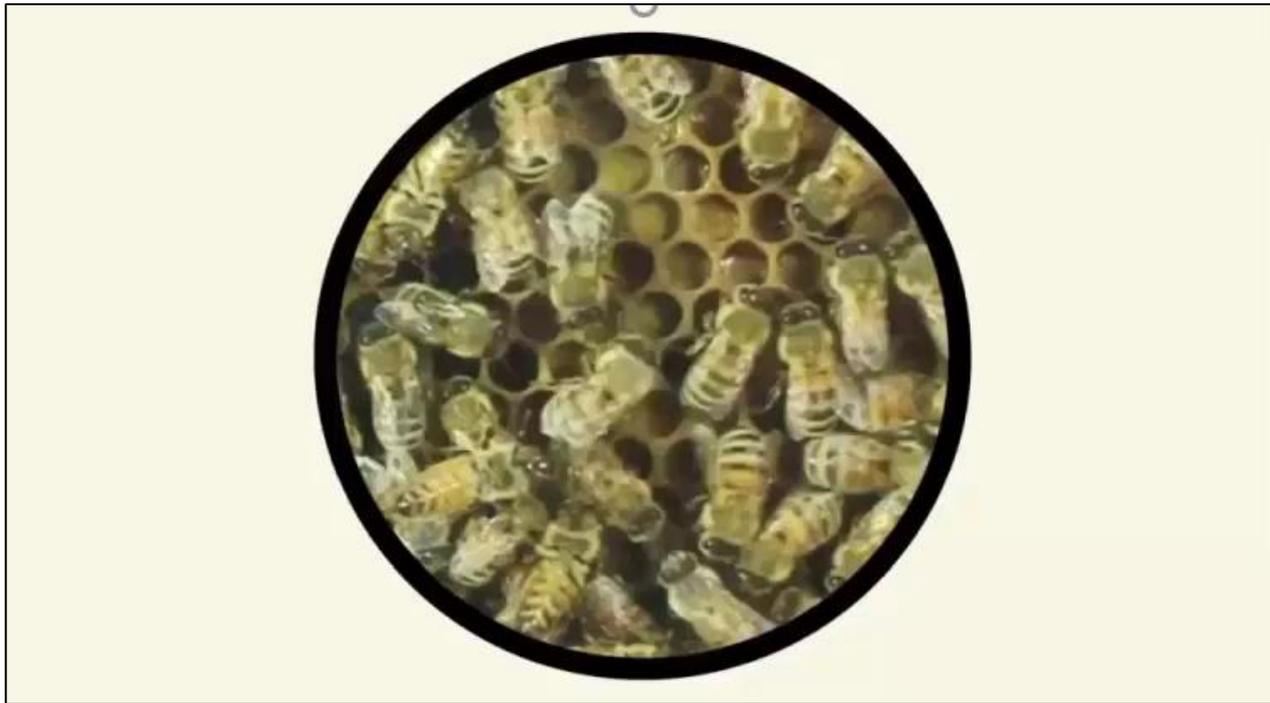
Recomendações e sugestões

- A placa de trânsito pode levantar a questão sobre a espessura da seta: vetores têm espessura? Não somente na placa de trânsito mas, em todos os desenhos apresentados e em qualquer um que venha a ser feito, as setas têm alguma espessura e, neste ponto, é importante esclarecer que estas setas desenhadas são apenas *representações* do conceito matemático. Do mesmo modo que não dá para se desenhar uma reta, não dá para desenhar um vetor. O que é possível desenhar são representações destes objetos matemáticos abstratos.
- Caso seja de interesse, as referências [Horn-1998] e [Wong-2011] fazem um estudo sobre os diferentes usos de setas como recurso gráfico em diferentes áreas do conhecimento.

EXEMPLO: VETORES NO ENSINO MÉDIO



EXEMPLO: VETORES NO ENSINO MÉDIO



USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

comida-de-vetores-versão-2.0-exemplo-de-jogada-02.ggb

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Entrar...

É a vez do jogador azul!

Pista = 1

Exibir ruas Exibir pontos de controle Exibir malha

Reiniciar

USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

corrida-de-vetores-versão-2.0-exemplo-de-jogada-02.ggb

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda Entrar...

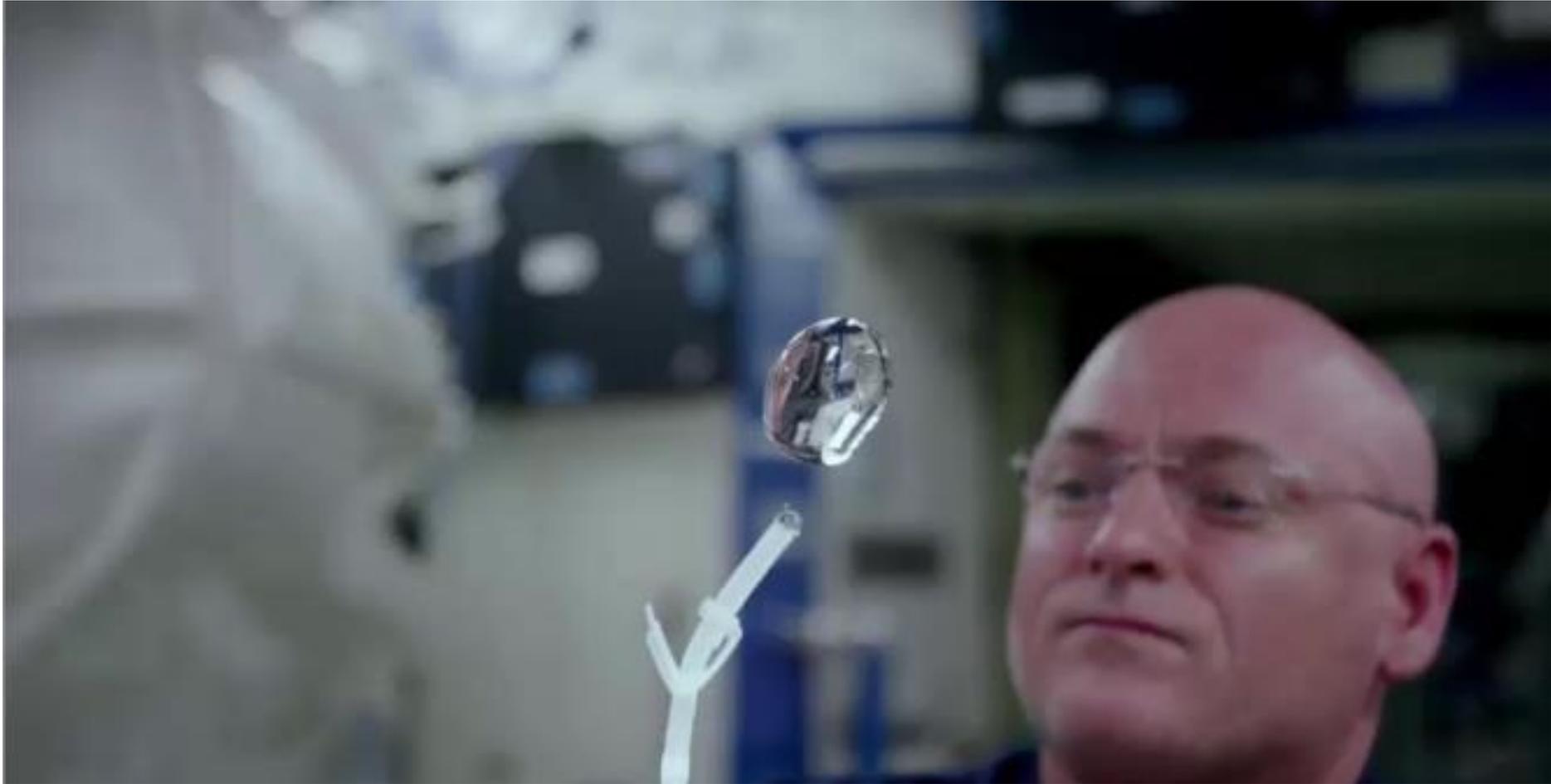
Exibir ruas Exibir pontos de controle Exibir malha

É a vez do jogador azul!

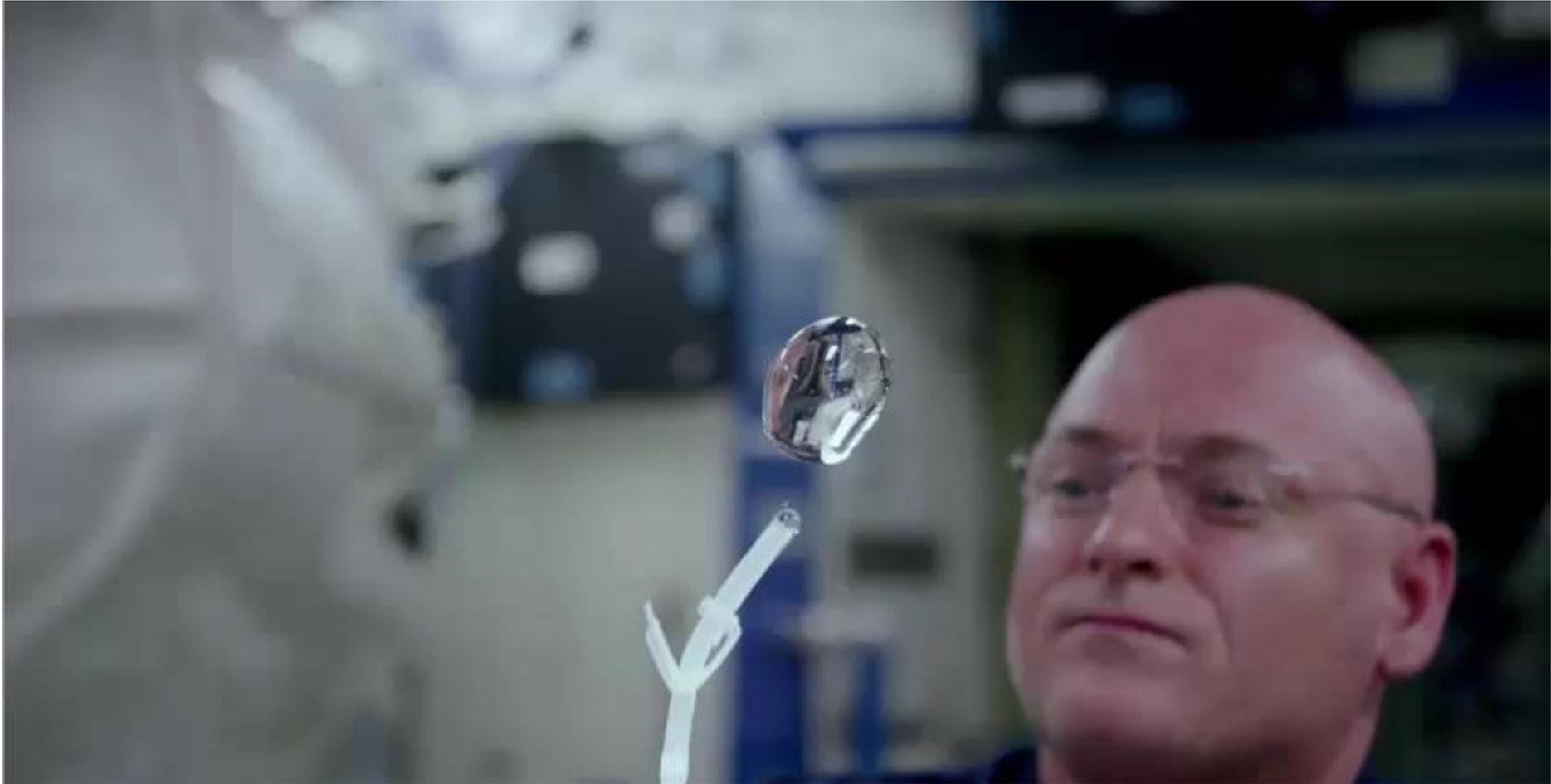
Pista = 1

Reiniciar

APLICAÇÕES CONTEMPORÂNEAS: MOTION VECTOR

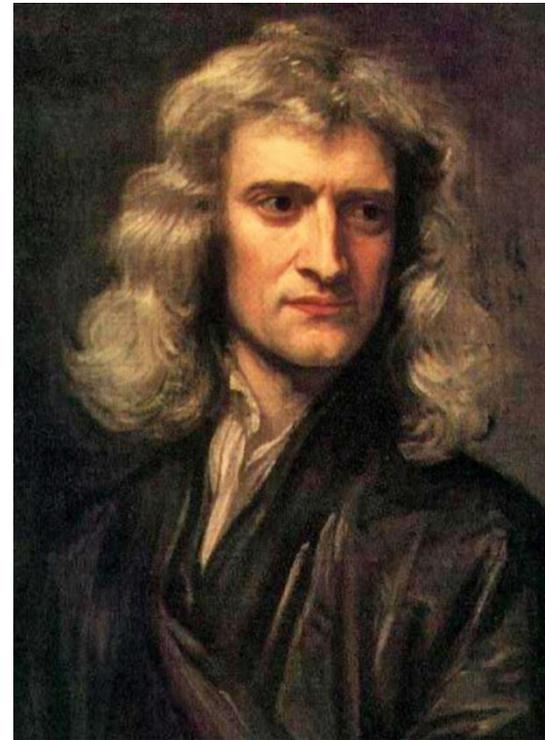
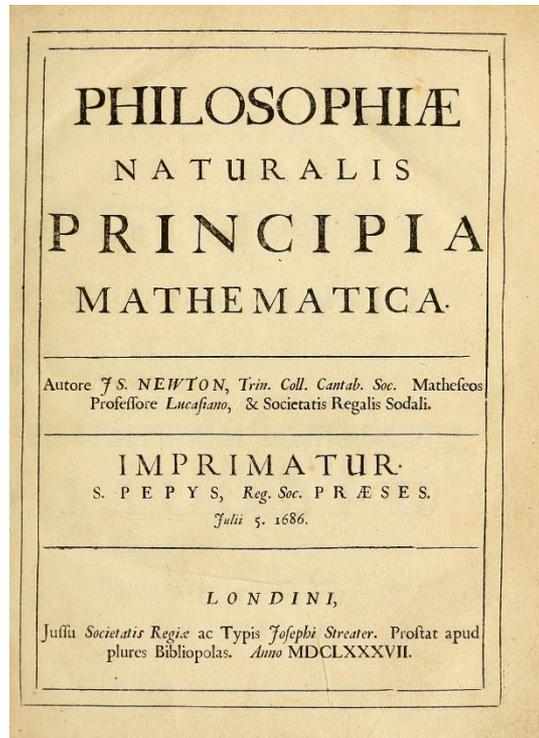


APLICAÇÕES CONTEMPORÂNEAS: MOTION VECTOR



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

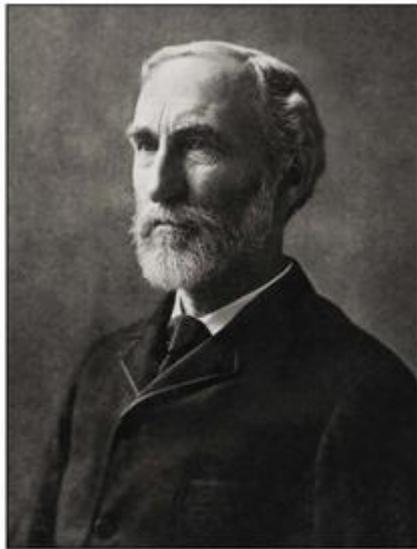
Newton usou vetores quando propôs suas três leis do movimento?



Resposta: não!

HISTÓRIA DO VETOR

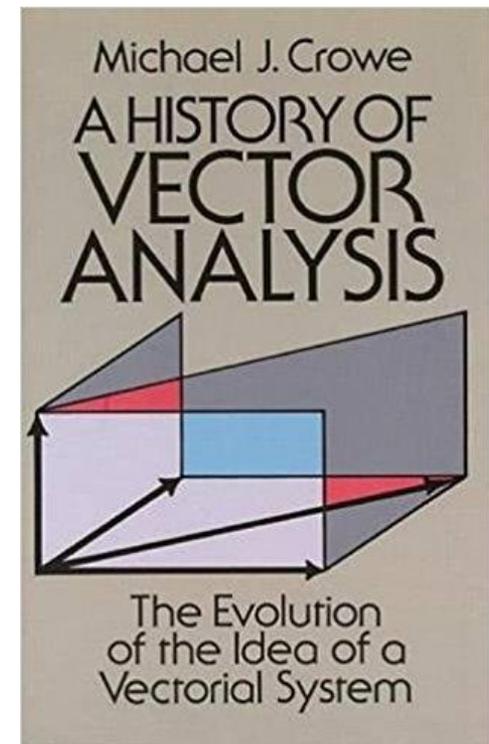
Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (justificativa geométrica para os números complexos); William Rowan Hamilton (1805-1865); Hermann Grassmann (1809-1877); Peter Guthrie Tait (1831-1901) e James Clerke Maxwell (1831–1879); Josiah Willard Gibbs (1839–1903) e Oliver Heaviside (1850–1925).



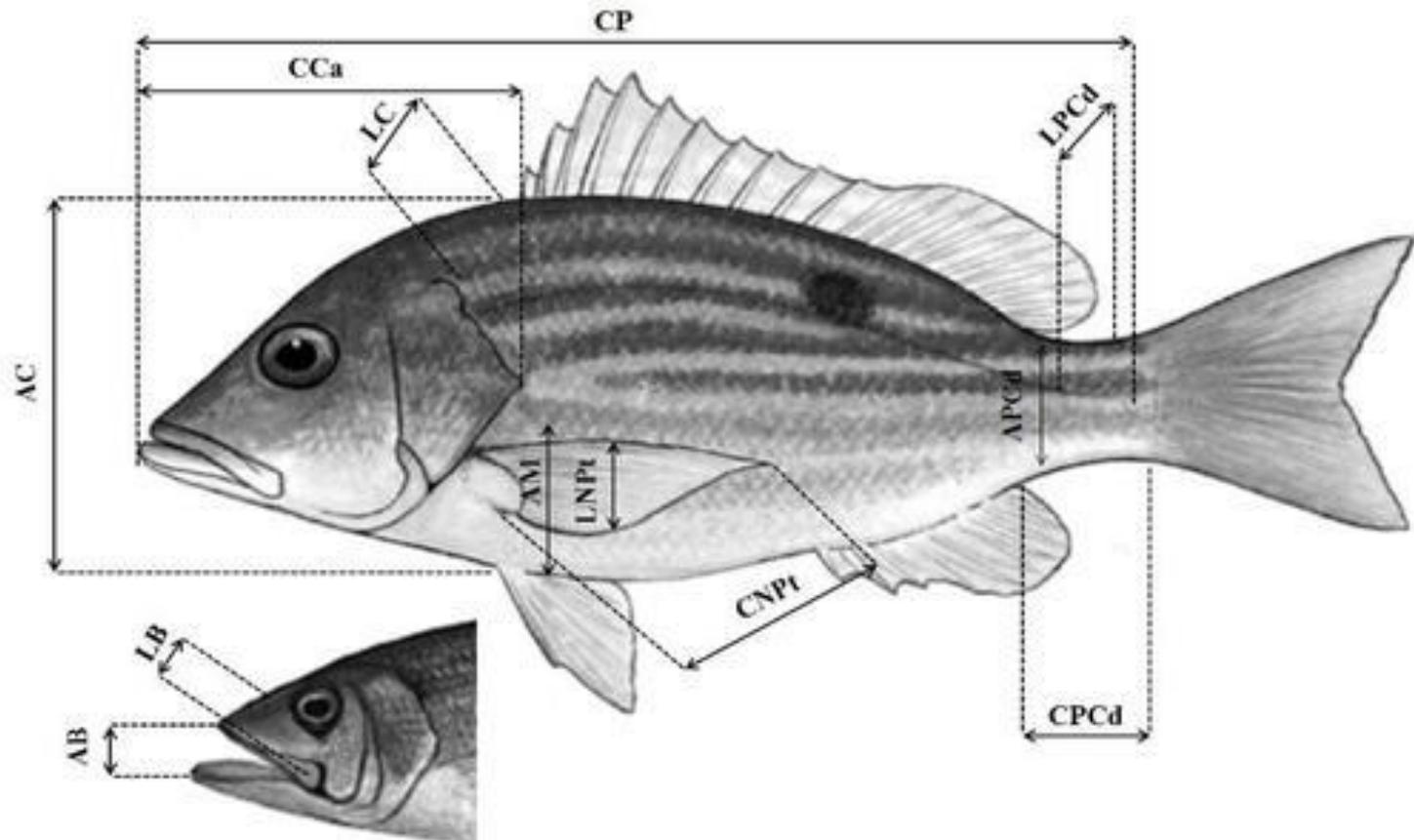
Josiah Willard Gibbs
(1839–1903)



Oliver Heaviside
(1850–1925)



MATERIAL SUPLEMENTAR



Vetores em \mathbb{R}^{12}

OBSERVAÇÕES

Não é tradição o ensino de vetores ficar a cargo da Matemática.

Vetor na Matemática \times Vetor na Física

Como você chamaria o objeto a seguir pela primeira vez ao ensinar o assunto?

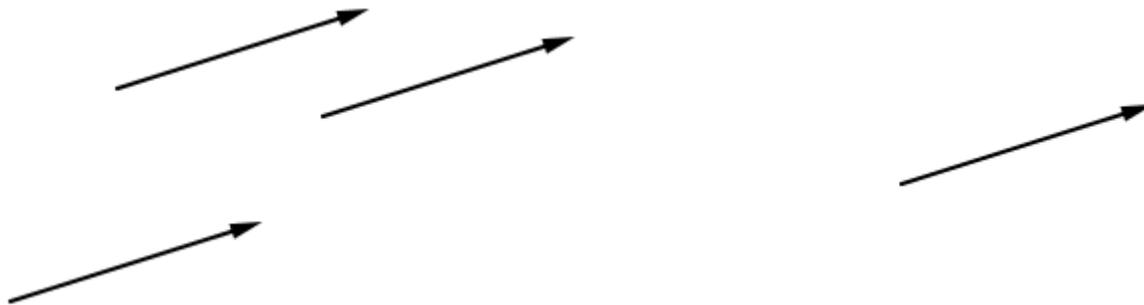


Segmento orientado? Flecha? Seta?

VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

O que é um vetor na Matemática?

Procedimento típico: define-se segmento orientado; define-se a relação de equipolência (dois segmentos orientados são equipolentes se eles têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido); mostra-se que a relação de equipolência é uma relação de equivalência; vetores são elementos do conjunto quociente.



VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

Como são os vetores na Física?

VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

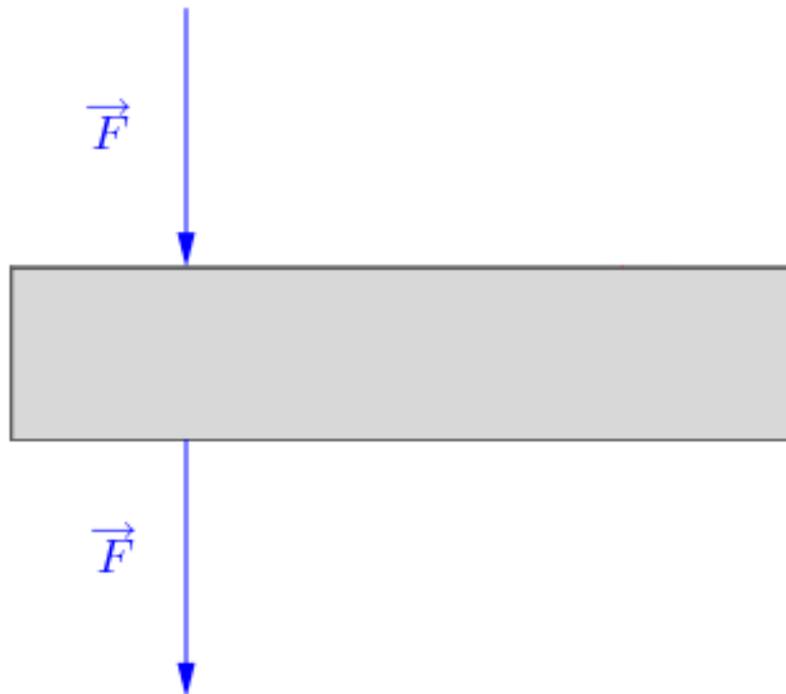
Como são os vetores na Física?

Vetor Fixo × Vetor Deslizante × Vetor Livre

VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

Como são os vetores na Física?

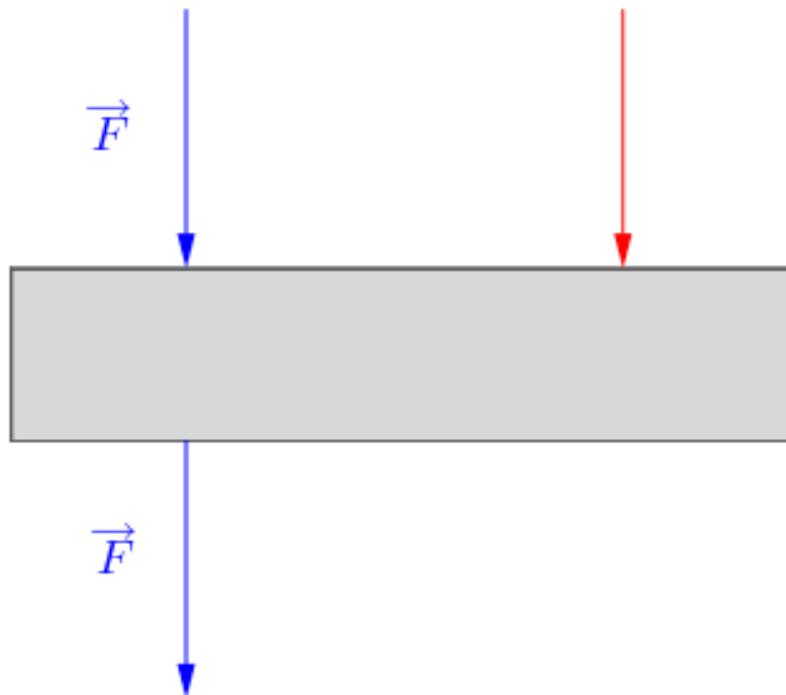
Vetor Fixo × **Vetor Deslizante** × Vetor Livre



VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

Como são os vetores na Física?

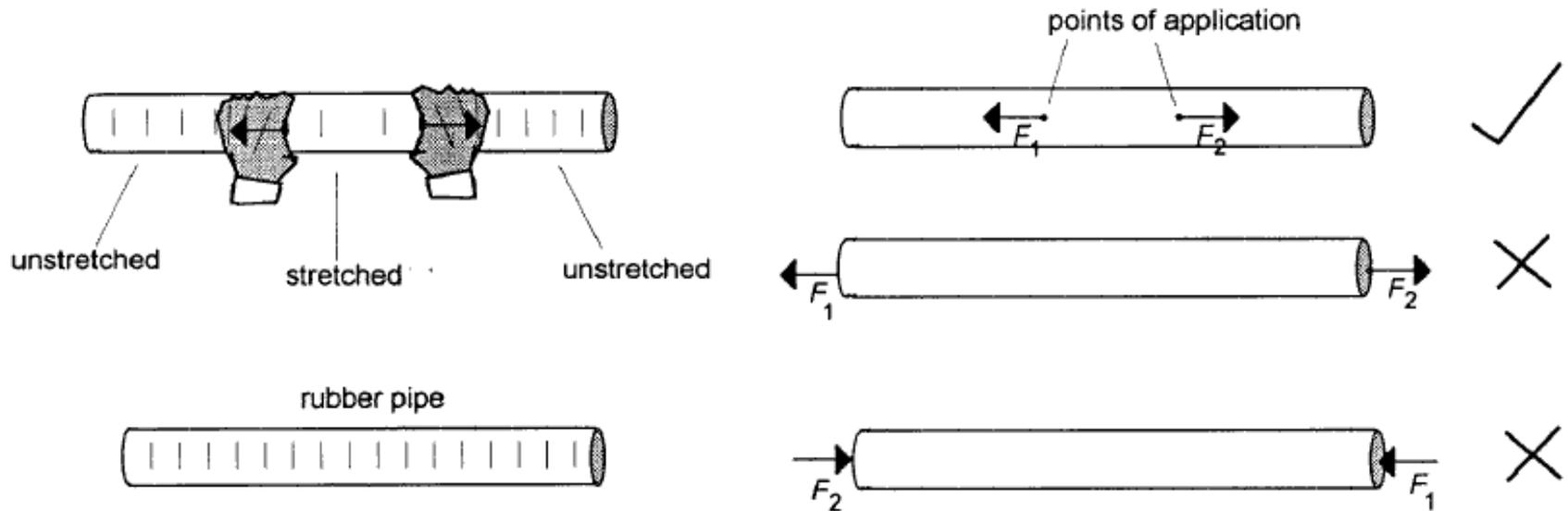
Vetor Fixo × **Vetor Deslizante** × Vetor Livre



VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

Como são os vetores na Física?

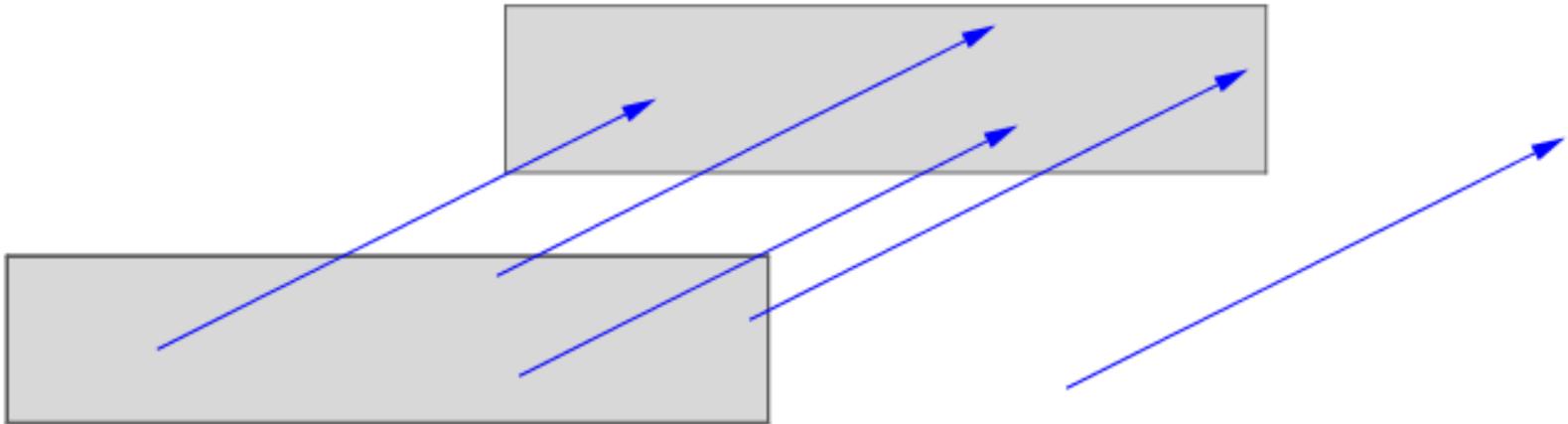
Vetor Fixo × Vetor Deslizante × Vetor Livre



VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

Como são os vetores na Física?

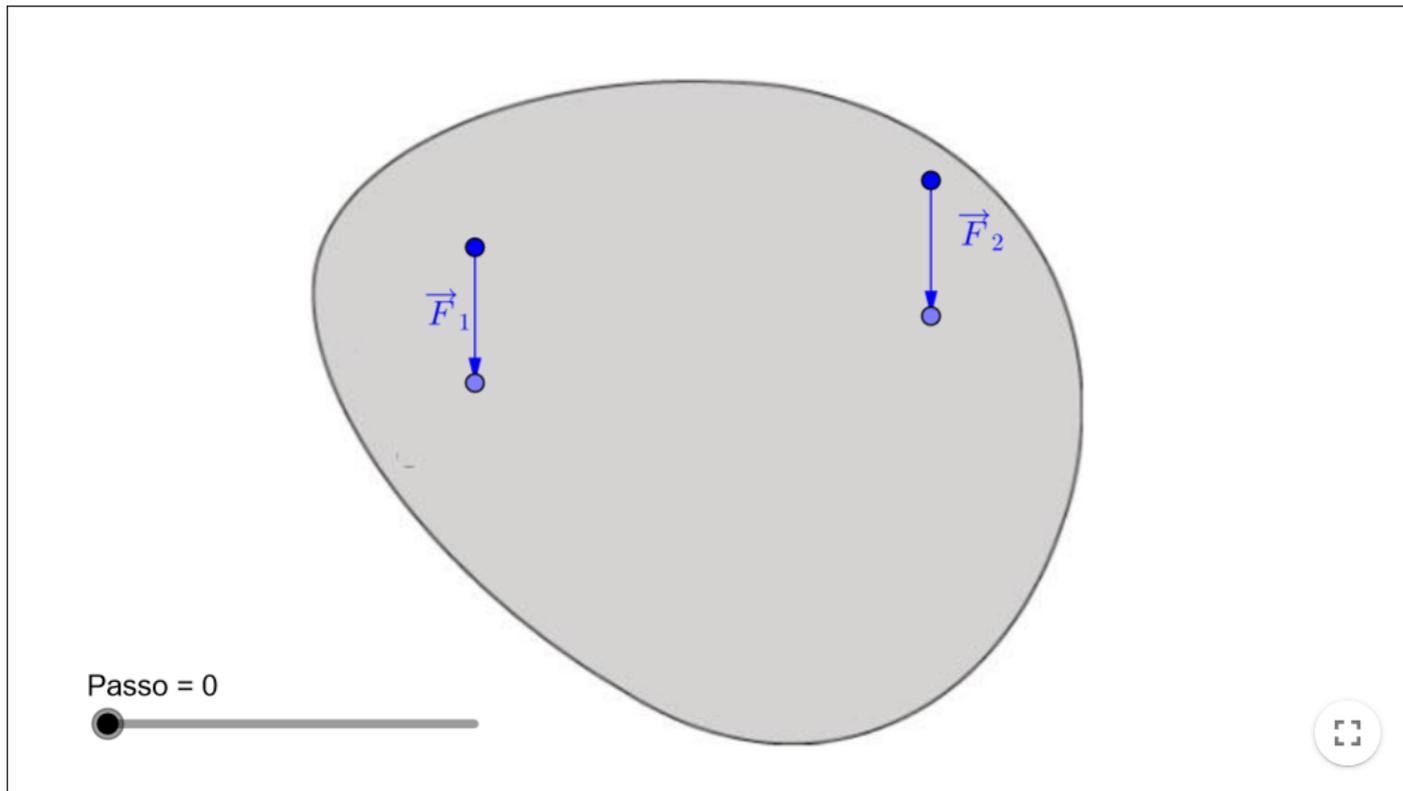
Vetor Fixo × Vetor Deslizante × Vetor Livre



Translação de Objeto Rígido

VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

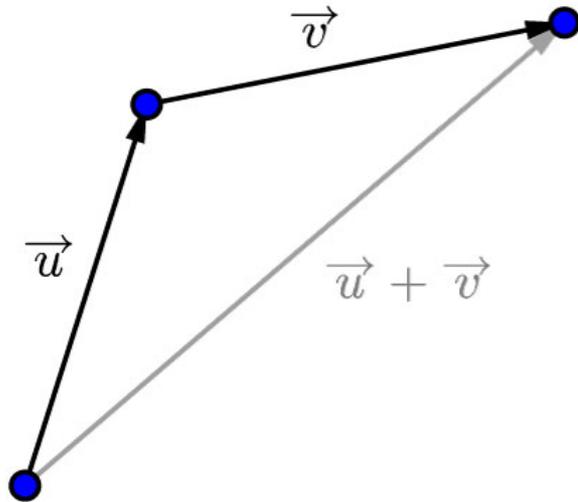
Como são os vetores na Física?



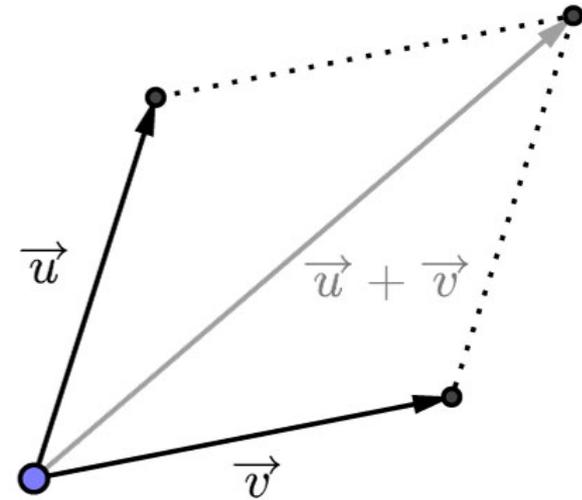
Merian, James Lathrop; Kraige, L. Glenn. **Mecânica para Engenharia: Estática**. Sexta edição. LTC, 2008.

VETOR NA MATEMÁTICA × VETOR NA FÍSICA

Como são os vetores na Física?



Contexto: deslocamentos



Contexto: forças

ANALOGIA: NÚMEROS RACIONAIS E VETORES

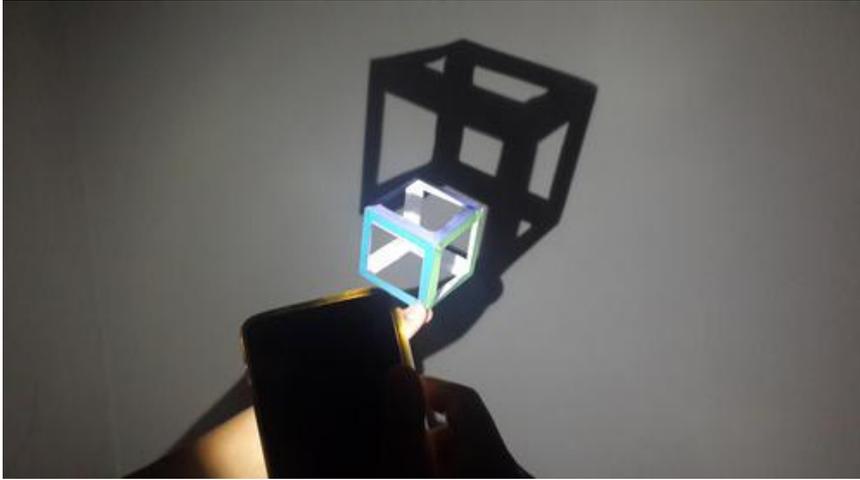
- Números racionais são classes de equivalência de frações; vetores são classes de equivalência de segmentos orientados.
- Existem várias “interpretações” para frações, cada uma com suas particularidades: parte-todo, divisão, razão, medida, operador; vetores também têm suas “interpretações”, cada uma com suas particularidades: posição, deslocamento, velocidade, aceleração, força, torque.

ANALOGIA: NÚMEROS RACIONAIS E VETORES

- A “igualdade” de frações se dá estabelecendo-se um critério: duas frações são iguais se elas expressam a mesma quantidade a “igualdade” de segmentos orientados também se dá por um critério: eles são iguais se possuem a mesma direção, módulo e sentido.
- Existe uma flexibilidade no rigor (um “abuso de linguagem”) ao se referenciar números racionais como, por exemplo, dizer “o número racional $2/4$ ” ao invés de dizer “o número racional cujo representante é a fração $2/4$ ”); esta flexibilidade também ocorre com vetores: dizer “o vetor \overrightarrow{OP} ” ao invés de dizer “o vetor cujo representante é o segmento orientado \overrightarrow{OP} ”.

PROJEÇÕES

EQUIPE DE PROJEÇÕES



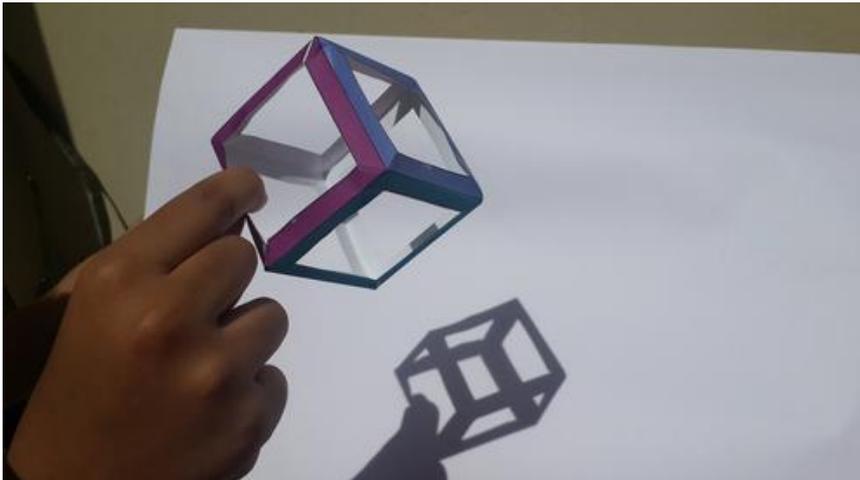
Humberto Bortolossi
(UFF)



Lhaylla Crissaff
(UFF)



Wanderley Rezende
(UFF)



EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

DESAFIO

**GANHA UM PRÊMIO QUEM VIER AO QUADRO E
DESENHAR UM PONTO**

(AQUELE QUE SE ESTUDA EM GEOMETRIA)

DISCUSSÃO: REPRESENTAÇÕES E SEMIÓTICA



Pintura de René Magritte (1898-1967)

DISCUSSÃO: REPRESENTAÇÕES E SEMIÓTICA



Magritte em “A Culpa é das Estrelas”

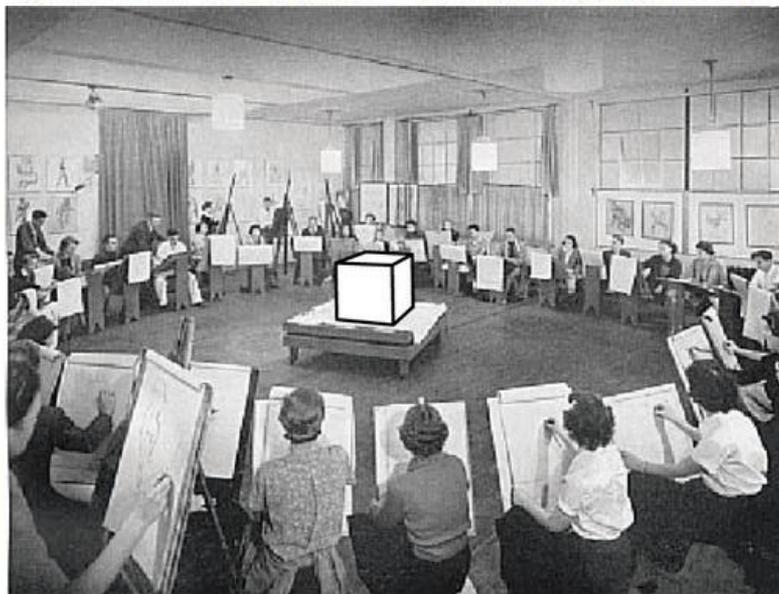
DISCUSSÃO: REPRESENTAÇÕES E SEMIÓTICA

Pinilla (2007): é importante ter em mente que os conceitos matemáticos não existem na realidade concreta. O ponto P, o número 3, adição, paralelismo entre retas não são objetos concretos os quais existem na realidade empírica. Eles são conceitos puros, ideais e abstratos e, desta maneira, eles não podem ser “exibidos empiricamente”, como em outras Ciências. Em Matemática, os conceitos só podem ser representados por um registro semiótico determinado. De fato, em Matemática, não trabalhamos diretamente com os objetos (isto é, com os conceitos), mas com suas representações semióticas.

EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

ATIVIDADE 1: ATELIER GEOMÉTRICO

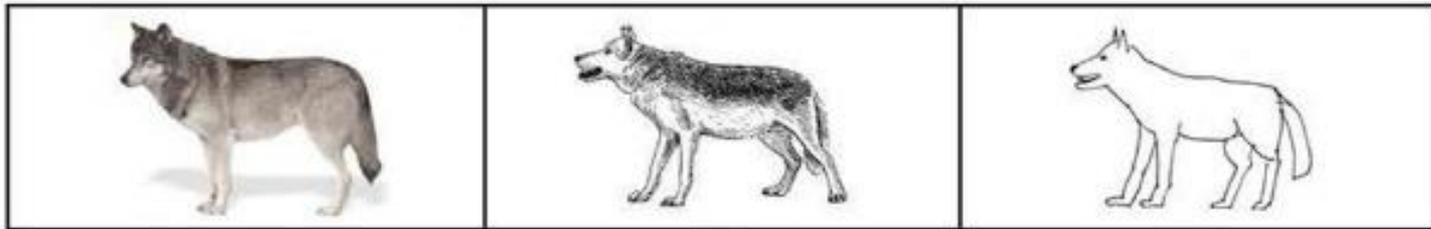
Seu professor irá dispor um conjunto de objetos geométricos sobre uma mesa e o objetivo desta tarefa é que você desenhe em uma folha de papel **o que você vê nesta cena** o mais fielmente que conseguir.



EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

ATIVIDADE 2: É O LOBO!

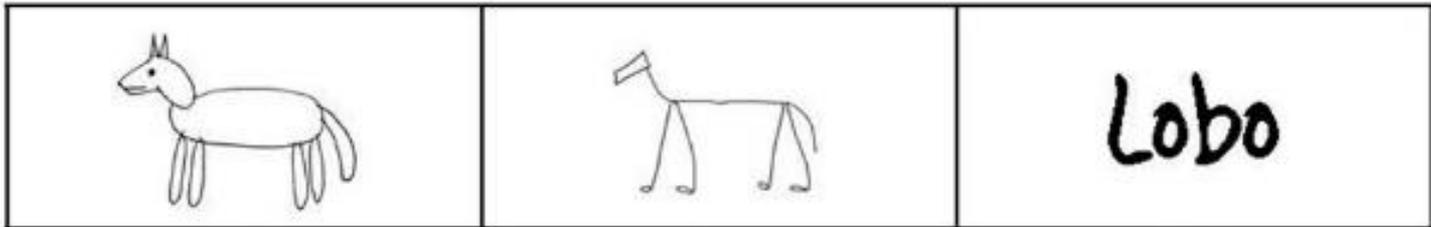
Na sua opinião, qual das seis imagens (A), (B), (C), (D), (E) e (F) a seguir melhor **representa** um lobo? Por quê?



(A)

(B)

(C)



(D)

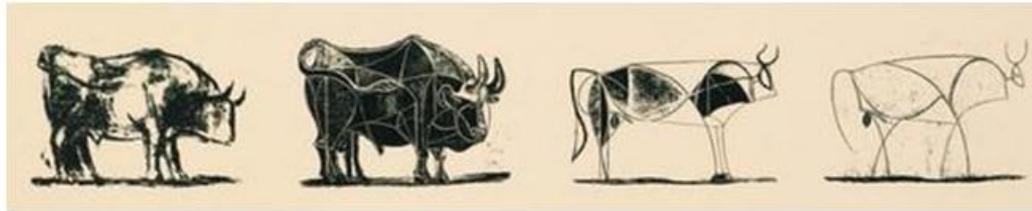
(E)

(F)

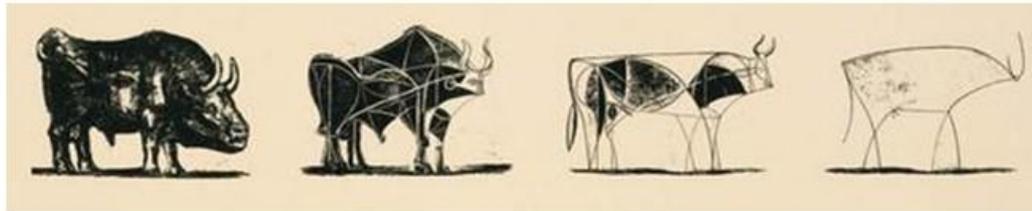
EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

DISCUSSÃO: QUAL REPRESENTAÇÃO É MELHOR?

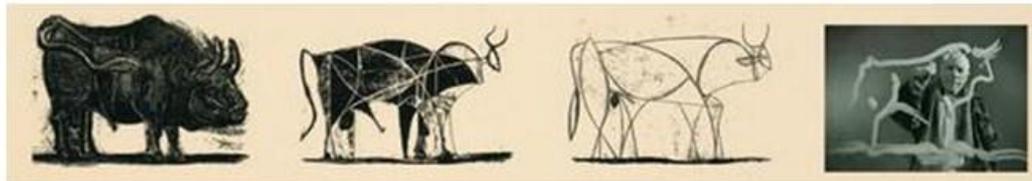
ESTUDO 1



ESTUDO 2

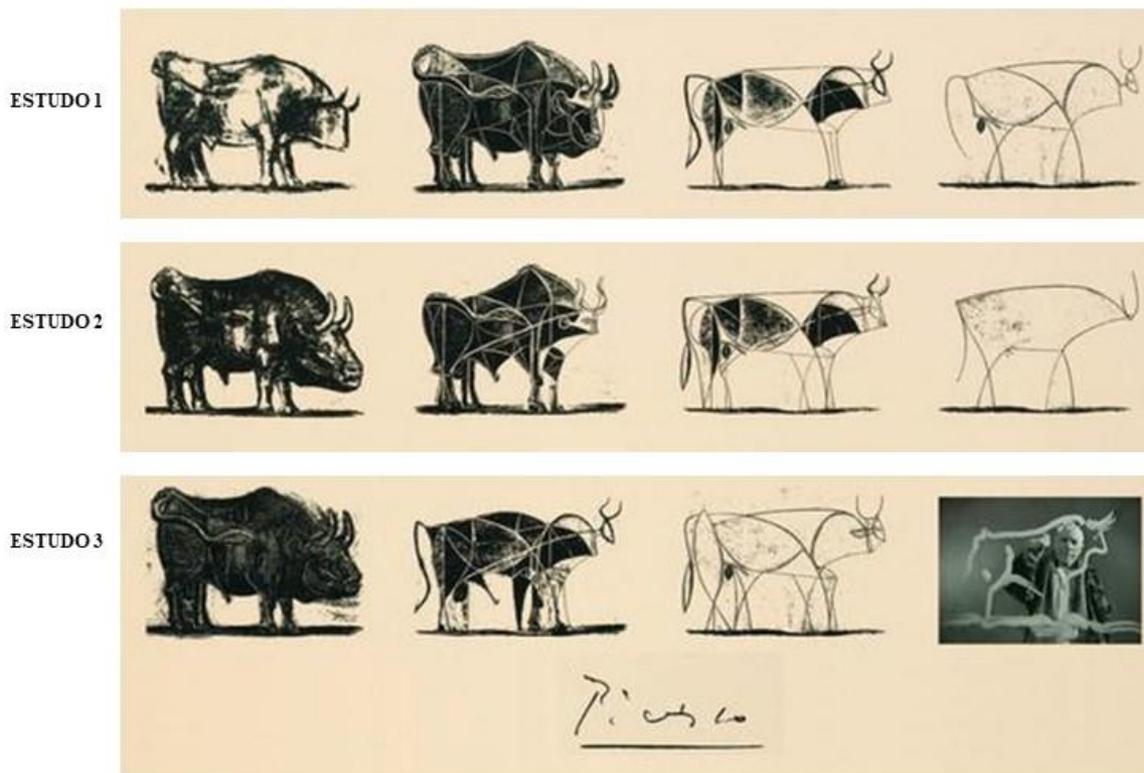


ESTUDO 3



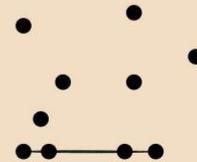
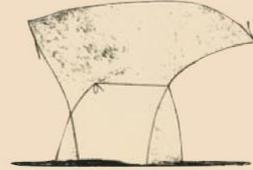
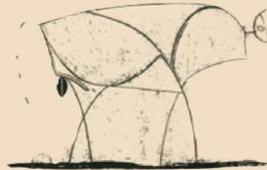
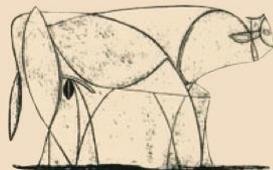
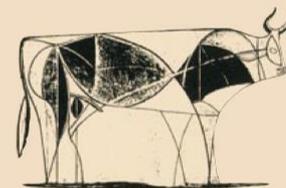
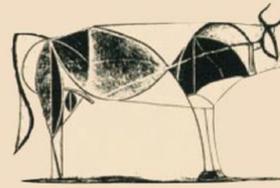
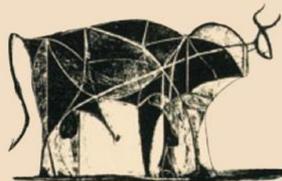
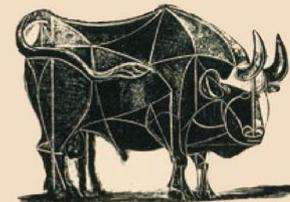
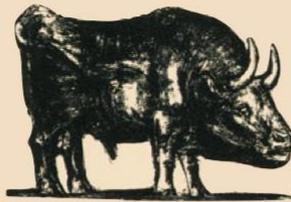
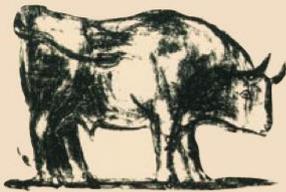
EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

DISCUSSÃO: QUAL REPRESENTAÇÃO É MELHOR?

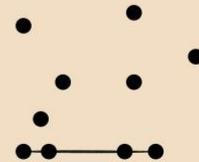
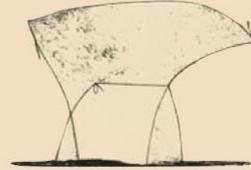
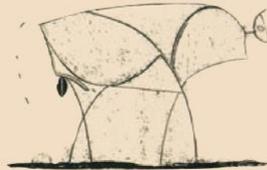
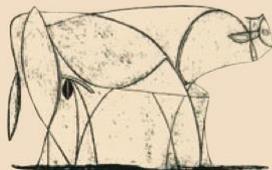
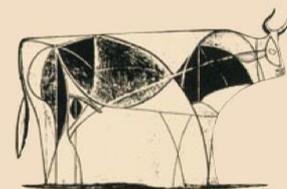
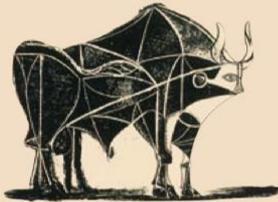
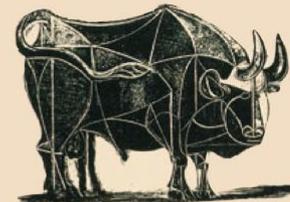
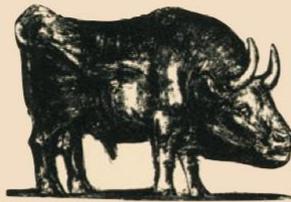
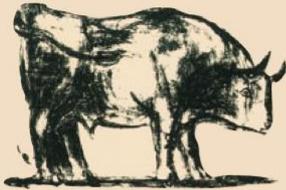


Pablo Picasso (1881-1973): “Levei quatro anos para aprender a pintar como Rafael, mas levei a vida toda para aprender a desenhar como uma criança.”

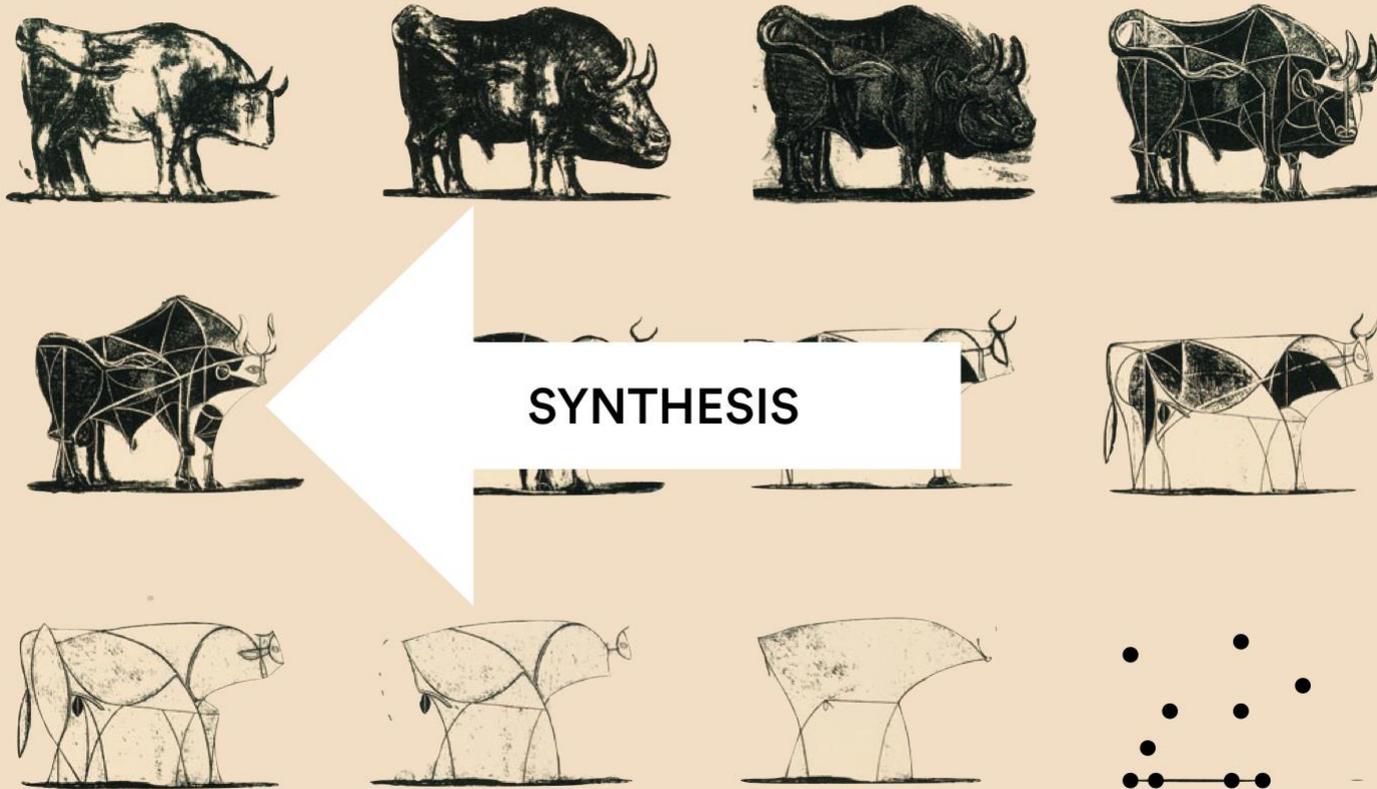
INTERLÚDIO: ABSTRAÇÃO



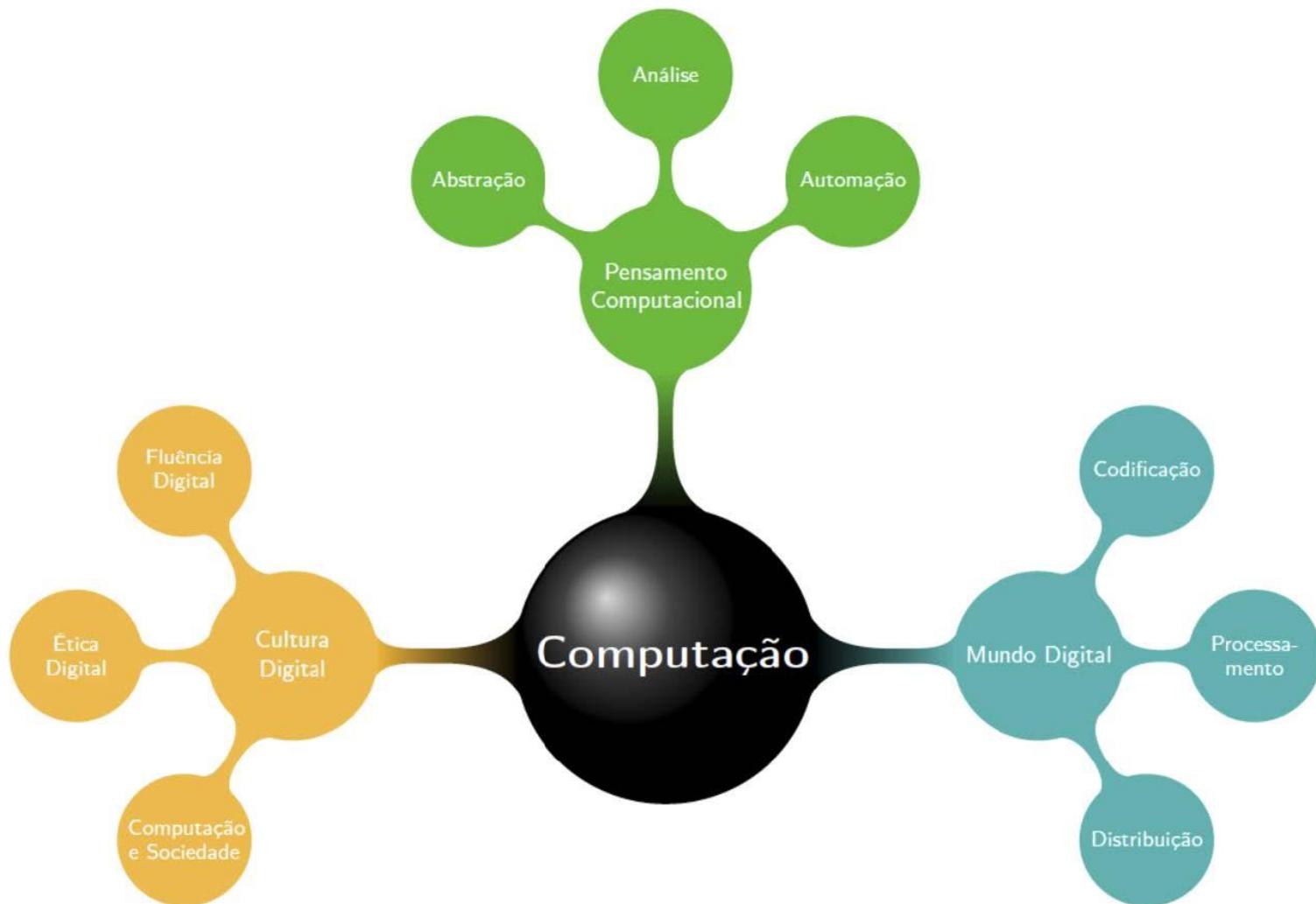
INTERLÚDIO: ABSTRAÇÃO



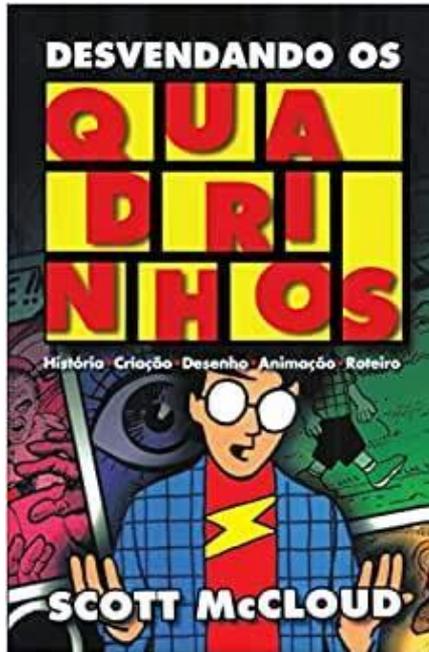
INTERLÚDIO: ABSTRAÇÃO



BNCC, PENSAMENTO COMPUTACIONAL E SBC



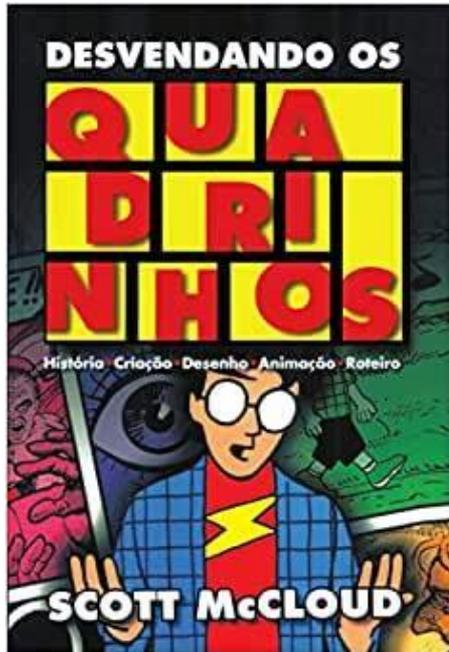
INTERLÚDIO: ABSTRAÇÃO



DEFINIR O CARTUM EXIGIRIA TANTO ESPAÇO QUANTO DEFINIR OS QUADRINHOS, MAS, POR ORA, VOÚ EXAMINÁ-LO COMO FORMA DE AMPLIFICAÇÃO ATRAVÉS DA SIMPLIFICAÇÃO.



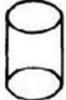
INTERLÚDIO: ABSTRAÇÃO

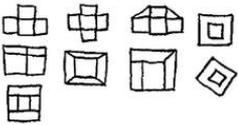
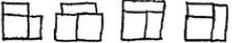
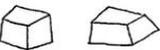
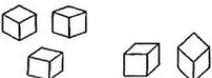


Vantagem de se ter algo abstrato: universalidade, isto é, o ente abstrato pode ser aplicado em contextos diferentes. Em Matemática, em geral, os alunos não percebem este benefício da abstração. Triângulos são entes abstratos e não existem no mundo real mas é justamente por serem abstratos que triângulos são tão úteis por ajudarem a resolver vários problemas em situações diferentes.

EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

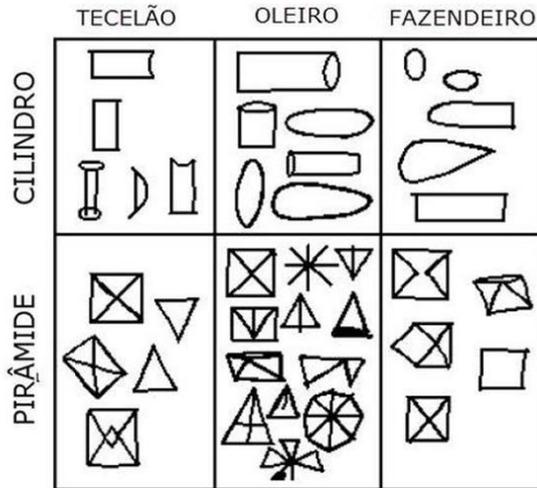
DESENHOS TÍPICOS EM CADA ESTÁGIO DO DESENVOLVIMENTO NA REPRESENTAÇÃO DE UM CILINDRO
(MITCHELMORE, 1978)

Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3A	Estágio 3B	Estágio 4
				

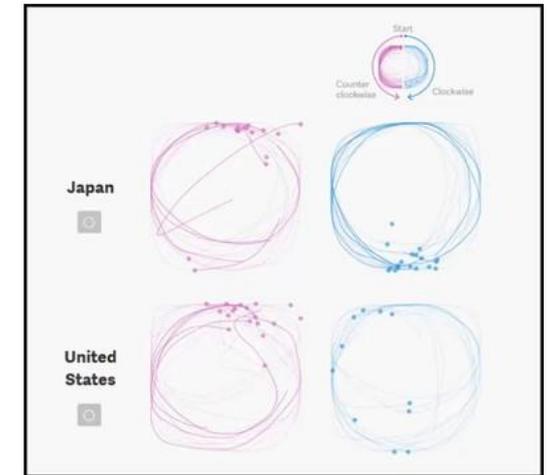
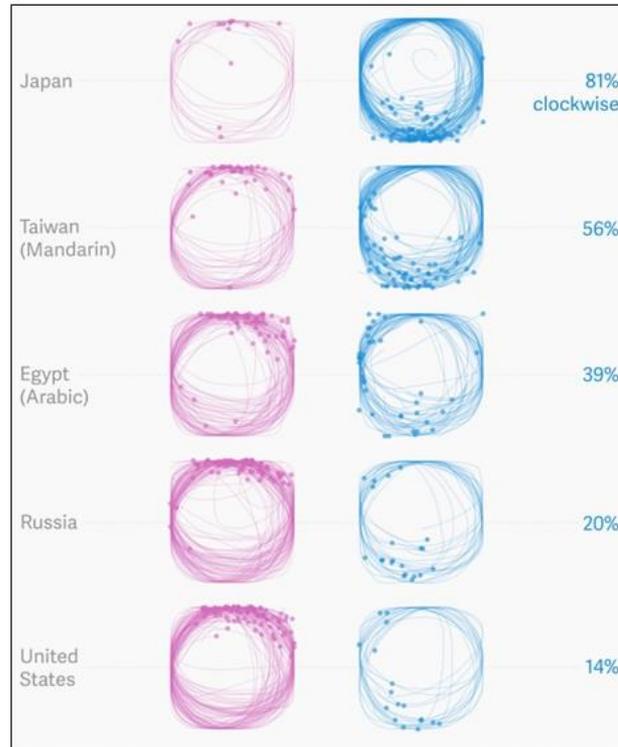
1. Uma única região fechada.	
2. Um único quadrado que transmite toda a estrutura regular do cubo.	
3. Uma configuração com vários quadrados representando faces adjacentes ou uma delimitando outra, mas que não representam vistas possíveis. As configurações têm quatro ou mais faces ou menos no caso de uma face delimitando outra e elas podem estar giradas na página.	
4. Dois quadrados, com alguma correspondência espacial em termos da localização das faces no modelo (as faces dianteira e superior ou as faces frontal e lateral). As crianças registram mais aquilo que realmente podem ver; a representação com duas faces é uma vista possível.	
5. Três quadrados. As crianças desenharam o número real de faces elas veem com alguma correspondência espacial com a localização das faces no modelo.	
6. Base plana. As faces frontal e lateral continuam a ser desenhadas em uma linha de base horizontal. As linhas oblíquas são introduzidas ou para mostrar que a face superior está em um plano espacial diferente ou para as três faces juntas.	
7. Linhas oblíquas são usadas para indicar que as bases das faces frontal e lateral estão em diferentes planos espaciais. As linhas que representam arestas opostas na terceira dimensão tendem a divergir.	
8. Um cubo paralelo-obliquo. As linhas que representam as arestas recuadas das faces lateral e superior são paralelas.	
9. Um cubo em perspectiva convergente e linear. As linhas que representam as arestas recuadas tendem a convergir para um ponto de fuga. Os cubos podem ser desenhados em uma perspectiva de um, dois ou três pontos de fuga.	

A representação de objetos geométricos 3D por meio de desenhos **muda de acordo com a idade!**

EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL



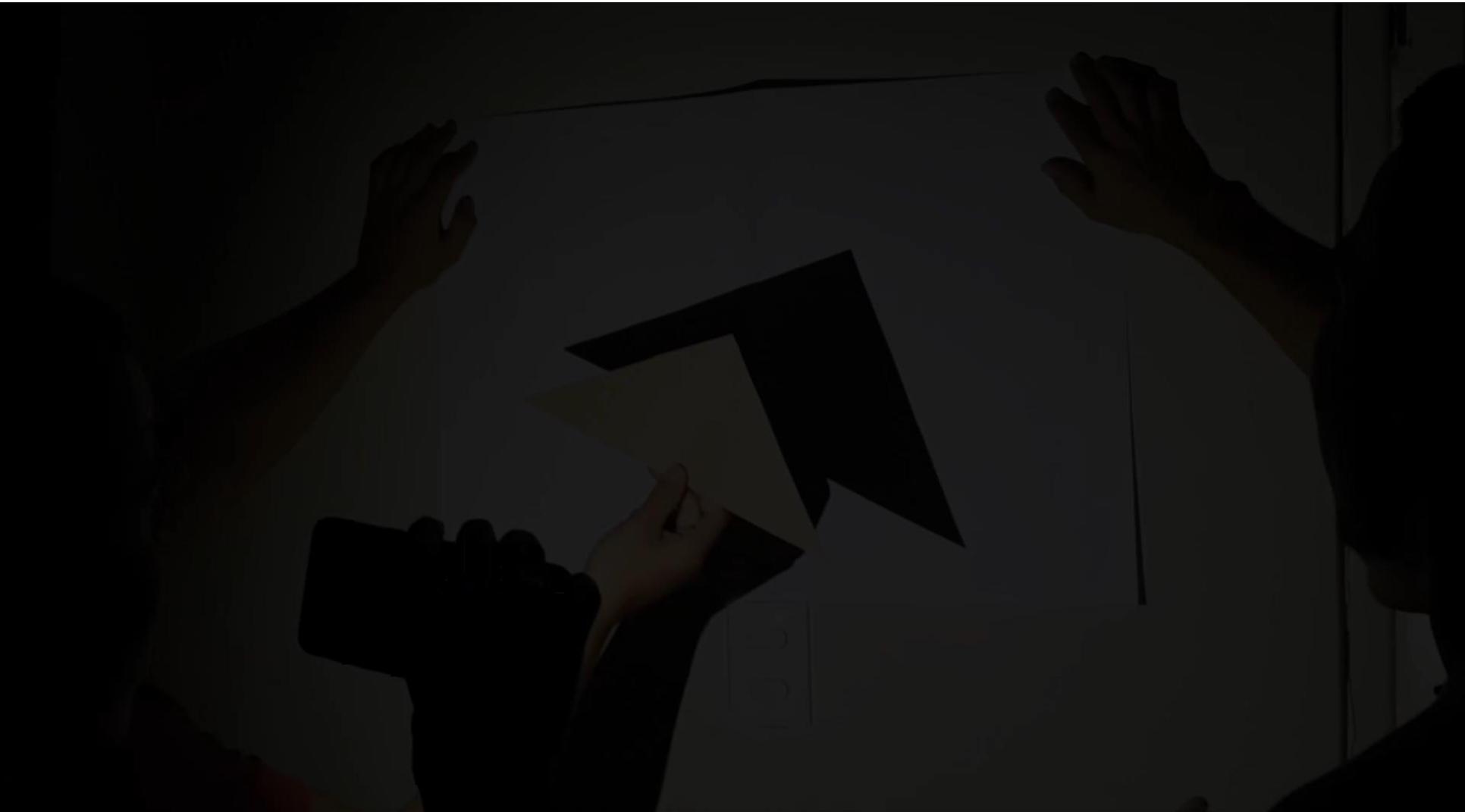
(Gutiérrez, 1998)



Revista Quartz
<<https://goo.gl/ry3uqV>>

Aspectos culturais influenciam a maneira de se representar objetos geométricos!

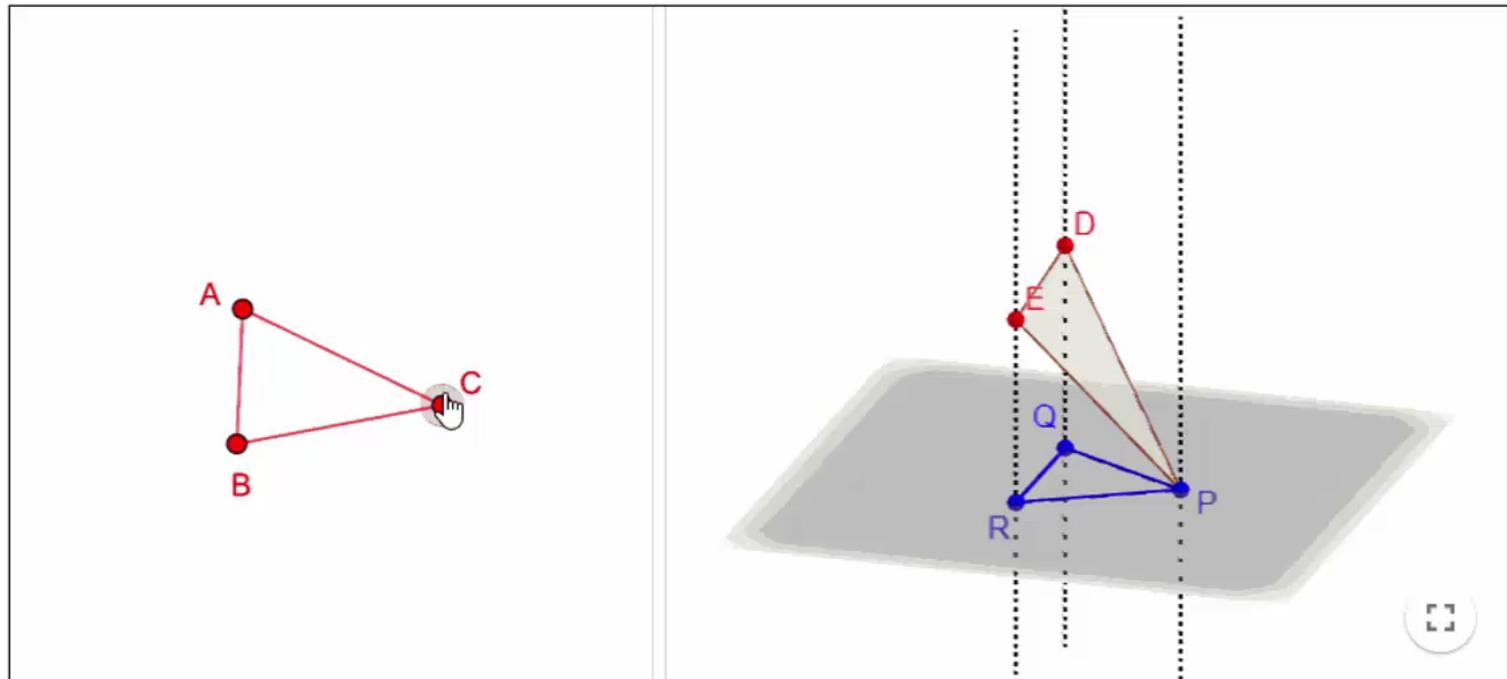
EXEMPLO: PROJEÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL



DESDOBRAMENTO

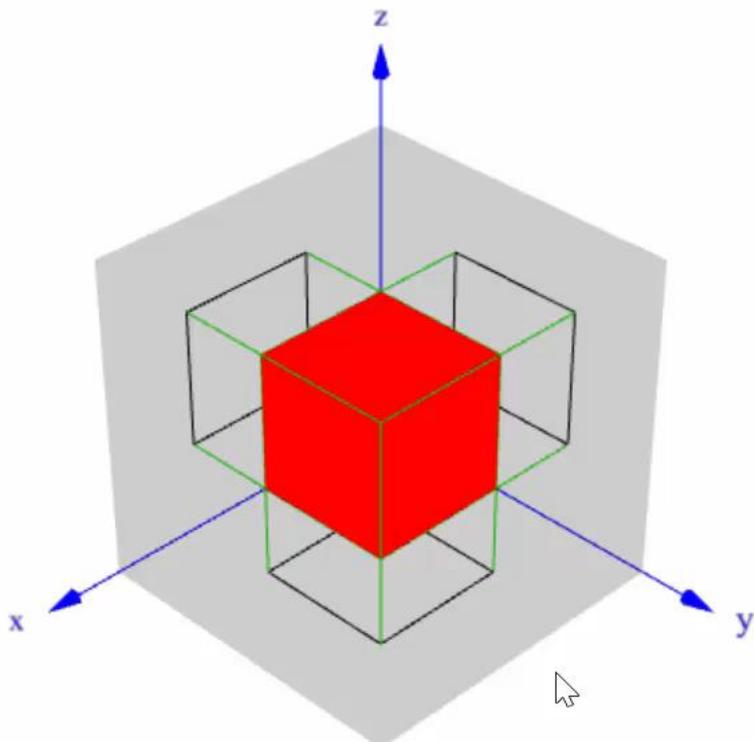
SOMBRA DE TRIÂNGULOS AO SOL: UMA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA DE LHUILLIER EM GEOMETRIA ESPACIAL

Humberto José Bortolossi Victor Ibrahim Santos El Adji
Universidade Federal Fluminense



DESDOBRAMENTO

Este é um projeto de iniciação científica desenvolvido com o apoio da FAPERJ e uma ação do Projeto [Livro Aberto de Matemática](#).



Sólidos Platônicos

Cubo

Transparência:

Controle x:

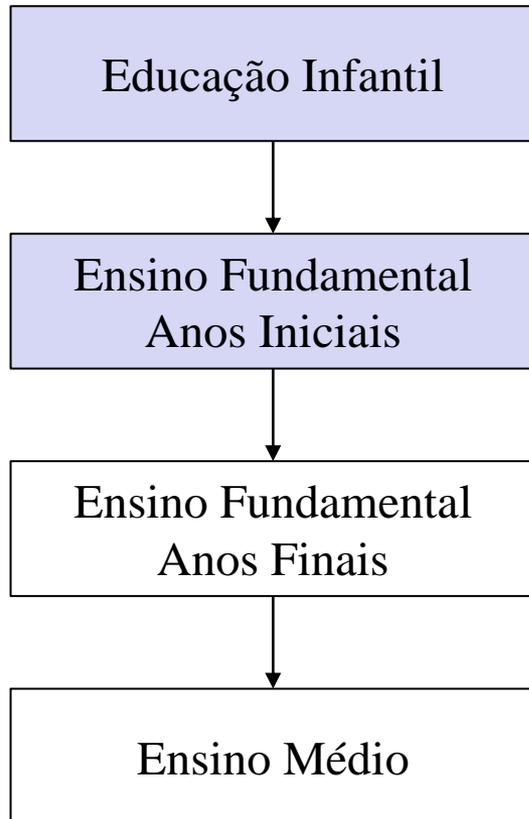
Controle y:

Controle z:

- Exibir projeção no plano xy
- Exibir projeção no plano xz
- Exibir projeção no plano yz
- Exibir segmentos auxiliares
- Realçar vértices
- Exibir arestas
- Exibir faces

CONSIDERAÇÕES FINAIS

PRECISAMOS AMPLIAR O ESCOPO!



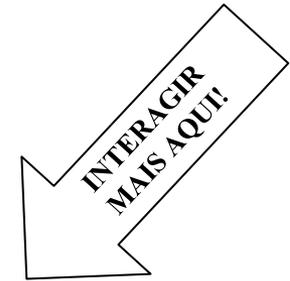
<https://umlivroaberto.org/>



PRECISAMOS AMPLIAR O ESCOPO!

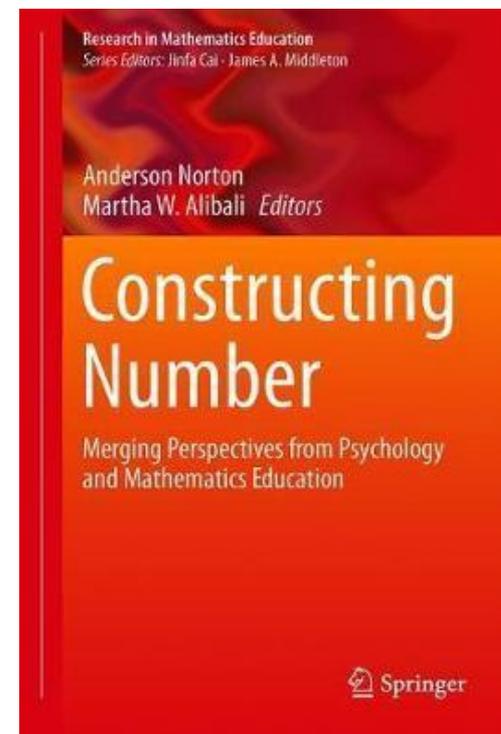
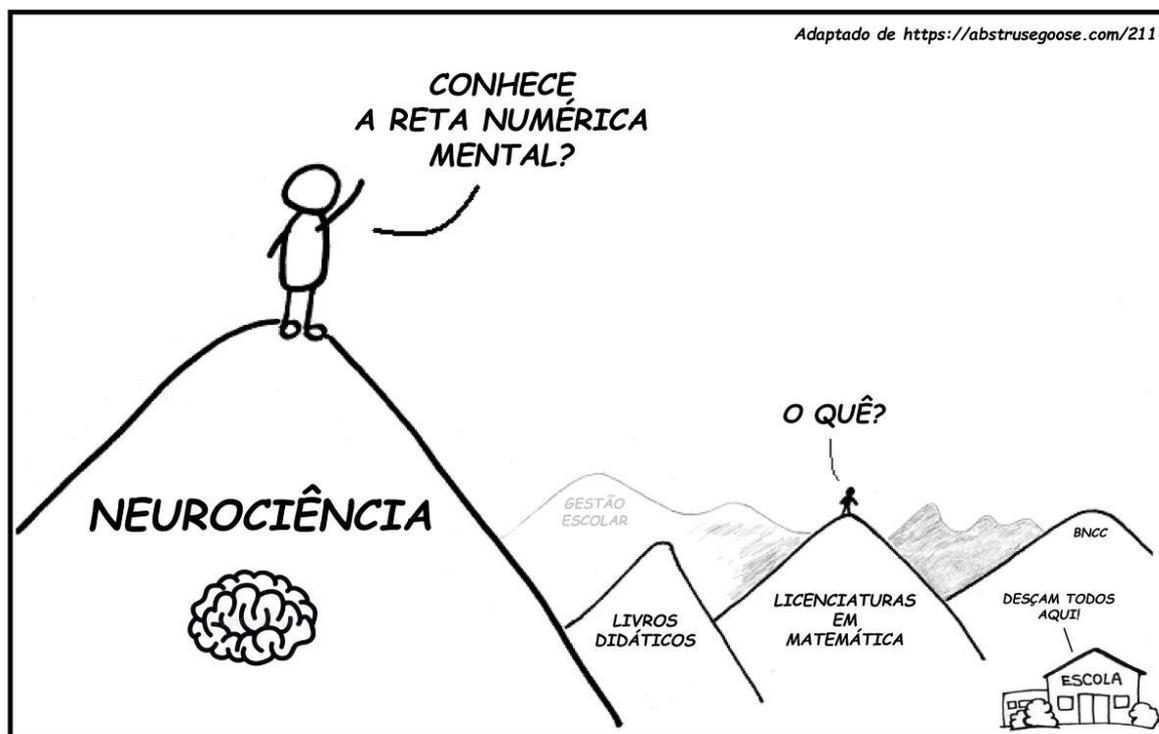
SOFTWARE:

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DIDÁTICA
PSICOLOGIA (PME)
⋮



HARDWARE:
NEUROCIÊNCIA,
PSICOLOGIA,
⋮

PRECISAMOS AMPLIAR O ESCOPO!



FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

OBRIGADO!

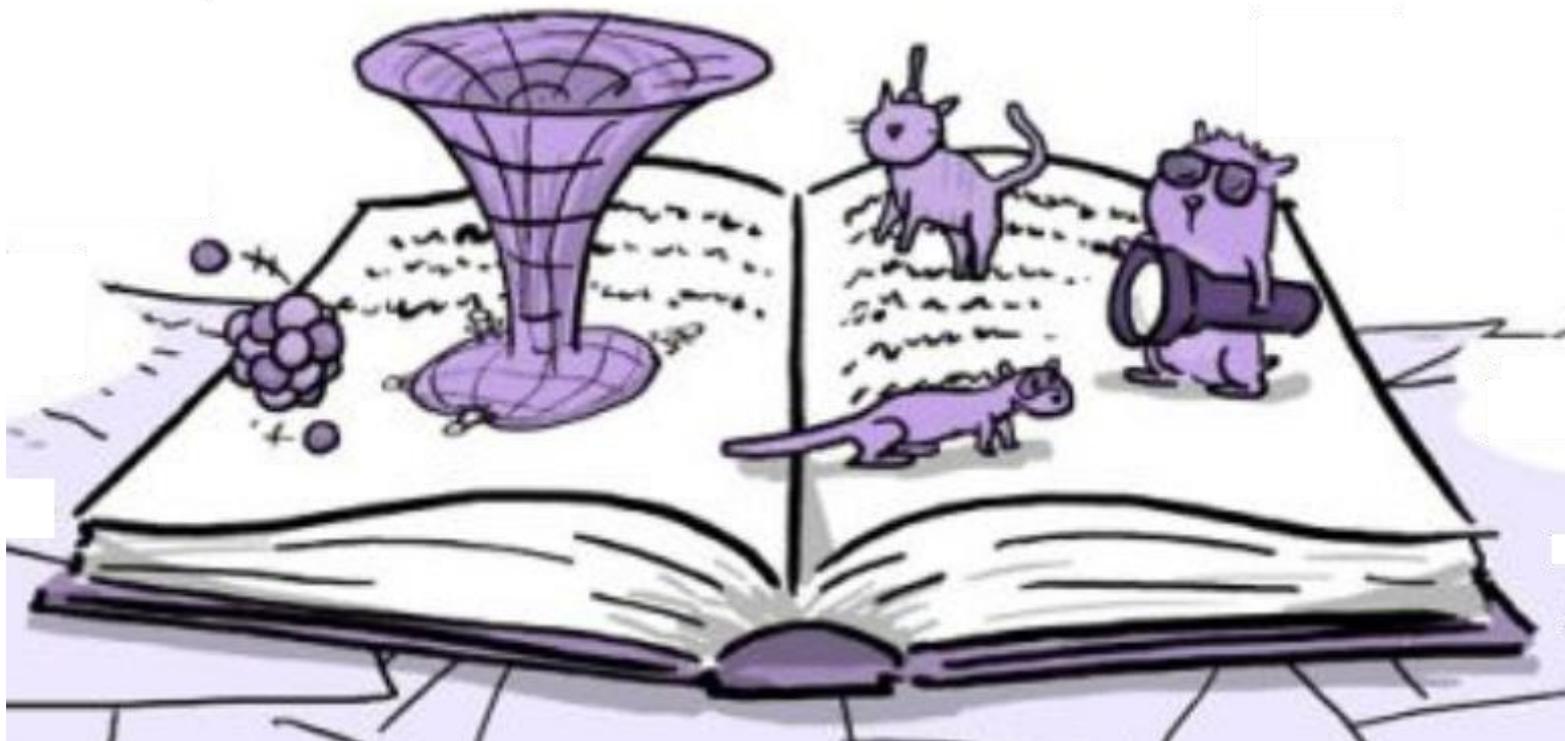
COLABORE CONOSCO:

<http://umlivroaberto.org>

#livroabertovisita



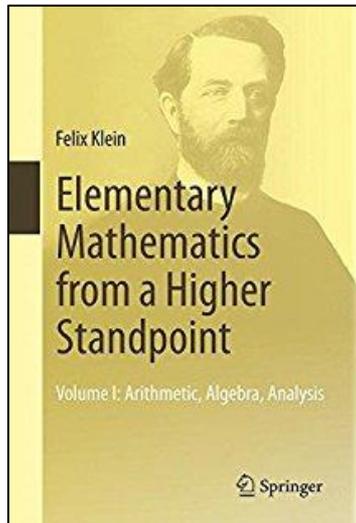
UM LIVRO ABERTO



NÃO PODEMOS ESQUECER A FORMAÇÃO INICIAL!



FÉLIX KLEIN



DUPLA DESCONTINUIDADE NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

[...] Por muito tempo [...] os homens da universidade preocuparam-se exclusivamente com as suas ciências, sem considerarem as necessidades das escolas, nem mesmo se preocupando em estabelecer uma conexão com a Matemática escolar. Qual foi o resultado desta prática? O jovem universitário se encontrava, no início, confrontado com problemas que não sugeriam, de maneira nenhuma, as coisas com as quais ele tinha se ocupado na escola. Ele chegava à Universidade e naturalmente, ele esquecia estas coisas rápida e completamente. Quando, ao fim de seus estudos, ele se tornava um professor, encontrava-se repentinamente na posição de ter que ensinar a tradicional matemática elementar da antiga e pedante maneira; e, uma vez que ele praticamente não era capaz, sem ajuda, de distinguir qualquer conexão entre esta tarefa e sua Matemática universitária, logo se acomodava ao que a tradição honrava, e seus estudos universitários permaneciam apenas uma lembrança mais ou menos agradável, que não tinha nenhuma influência sobre seu ensinar.