



V SEMANA DA MATEMÁTICA  
DA UFLA

25 A 29 DE OUTUBRO DE 2021



## Álgebras de Clifford, Espinores, Agregados de Fierz e Identidades de Fierz-Pauli-Kofink

Deborah G. Fabri<sup>1</sup>, Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr.<sup>2</sup>

O objetivo central deste trabalho foi estudar as definições gerais e propriedades das álgebras de Clifford aprofundando o estudo em exemplos de assinaturas específicas como a álgebra de Clifford do espaço euclidiano e a álgebra de Clifford do espaço-tempo, estudar a teoria dos espinores por meio das álgebras de Clifford e também a teoria dos bilineares covariantes associado aos espinores clássicos e algébricos do espaço-tempo de Minkowski, dessa forma, a metodologia da pesquisa se deu em três passos baseados nesses três estudos teóricos. Primeiramente, introduzimos as definições gerais e alguns aspectos das álgebras de Clifford. Apresentamos a álgebra exterior, uma vez que é ela que fornece estrutura multivetorial das álgebras de Clifford e que por sua vez também é uma álgebra de Clifford. Construimos e trabalhamos com a álgebra do espaço euclidiano (de assinatura  $(3, 0)$ ) e a álgebra do espaço-tempo (de assinatura  $(1, 3)$ ) evidenciando conceitos valiosos dentro destas álgebras, como a descrição de seus elementos, novas operações, propriedades geométricas e algébricas, representações e relações com outras álgebras e estruturas isomorfas, caracterização de alguns subespaços importantes e a generalização do produto de Clifford. Em segundo, tendo em mãos os aspectos fundamentais das álgebras de Clifford, introduzimos o grupo de Spin, uma vez que os espinores carregam representação desse grupo. Como o grupo de Spin tem relação com grupos definidos nos espaços vetoriais das álgebras estudadas, investigamos as isometrias do espaço euclidiano e de Minkowski, dando enfoque nas rotações no espaço euclidiano, nas isometrias do Espaço-Tempo (transformações de Lorentz) e os grupos relacionados com tais conceitos, depois adentramos nas álgebras de Clifford estudadas discutindo sobre as rotações nesse espaço e definindo como principal resultado a exposição do grupo Spin(3) e Spin(1,3). No mesmo capítulo, estudamos a teoria dos espinores. Passamos pela definição clássica, algébrica e operatorial dos espinores na álgebra de Clifford do espaço euclidiano e depois dedicamos uma grande parte para o estudo dos espinores clássicos e algébricos no espaço-tempo de Minkowski. Por fim, estudamos os bilineares covariantes. Partimos do espinor clássico de Dirac e introduzimos os bilineares covariantes para o espaço-tempo de Minkowski. Mostramos algumas de suas propriedades, o cálculo e seu significado físico, algébrico, a transliteração para outras estruturas algébricas além de mostrar como as informações de um espinor podem ser resgatadas a partir de seus bilineares. Ademais, também trabalhamos com novos conceitos como as identidades de Fierz-Pauli-Kofink, o agregado de Fierz (e o caso boomerang) que enriquecem ainda mais a teoria pois nos leva à uma generalização dos bilineares covariantes para os espinores regulares e singulares. Finalizamos o trabalho com a classificação de Lounesto, que classifica os vários tipos de espinores de acordo com seus bilineares covariantes. Em suma, o estudo das álgebras de Clifford para o espaço euclidiano tridimensional e o espaço-tempo de Minkowski em todo projeto se deu inspecionando suas diversas propriedades e riquezas estruturais de forma detalhada, enfatizando importantes aspectos matemáticos tanto na álgebra em si e também aplicando-a em teorias físicas como a Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade onde o conceito de espinor, aparece naturalmente quando desenvolvemos a Teoria de Schrödinger-Pauli e

<sup>1</sup>Universidade Federal do ABC, [deborah.fabri@aluno.ufabc.edu.br](mailto:deborah.fabri@aluno.ufabc.edu.br)

<sup>2</sup>Universidade Federal do ABC, CMCC.

a Teoria de Dirac que por sua vez podemos aprofundar bastante ao estudar os bilineares covariantes. Esse trabalho foi financiado pelo CNPq.

**Palavras-chave:** álgebras de Clifford; espinores; bilineares covariantes.