

Resumos
IX Wokshop de Matemática e Matemática
Aplicada

04, 05 e 06 de dezembro de 2024

Comunicações Orais

Evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais

Ady Cambraia Junior¹

Alessandro Gaio Chimenton²

Carlos Lúcio Nunes de Oliveira Filho³

Marco Antônio do Couto Fernandes⁴

Mostafa Salarinoghabi⁵

Resumo: A *evoluta* de uma curva plana regular $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o envelope das retas perpendiculares à γ . Este objeto é conhecido desde pelo menos 200 A.C. mas um tratamento moderno só foi dado a partir de 1673 por Huygens [Huy66]. Suas aplicações, inclusive atuais em óptica [ZP18] são bastante difundidas e até hoje são objeto de investigação. Denotemos por $\gamma_{\pi/2}$ a evoluta de uma curva $\gamma = \gamma(s)$. As propriedades básicas de $\gamma_{\pi/2}$ se manifestam especialmente quando γ é *convexa*, ou seja, quando sua curvatura $k = k(s)$ é estritamente positiva. Em particular, os vértices de γ correspondem a singularidades do tipo *cúspides* em $\gamma_{\pi/2}$ [GW14]. Estimativas para o comprimento da evoluta de uma curva e a área por ela delimitada foram obtidas em função dos mesmos dados da curva γ [JC14] para o caso plano.

Nesta apresentação, iremos apresentar os α -*evolutoídes* de curvas convexas $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M_c$, em que M_c denota qualquer uma das três superfícies completas de curvatura Gaussiana constante $c = -1, 0, 1$. Esta noção estende [GW14] e é tratada especificamente no caso hiperbólico em [IPST04] e nos recentes trabalhos [ZP21] e [WYCL23]. Mais precisamente, seja $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M_c$ uma curva regular, fechada e convexa. Seja $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ seu referencial ortonormal de Frenet-Serret. Fixe $\alpha \in [0, \pi/2]$. O envelope de todas as geodésicas $\sigma_s : [0, \infty) \rightarrow M_c$ tais que $\sigma_s(0) = \gamma(s)$ e $\sigma'_s(0) = \cos(\alpha)\mathbf{t}(s) + \sin(\alpha)\mathbf{e}(s)$ é aqui denominado de α -evolutoíde de γ . Esta família de geodésicas pode ser descrita por

$$\mathcal{F}_\alpha(s, t) = \exp_{\gamma(s)}^c(t\mathbf{v}_\alpha(s)), \quad (1)$$

em que \exp^c é a aplicação exponencial riemanniana de M_c . Assim, existe ρ_α tal que o α -evolutoíde de γ é descrito por

$$\gamma_\alpha(s) = \exp_{\gamma(s)}^c(\rho_\alpha(s)\mathbf{v}_\alpha(s)) \quad (2)$$

¹Universidade Federal de Viçosa,
ady.cambraia@ufv.br

²Universidade Federal Fluminense,
alessandrogaio@id.uff.br

³Universidade Federal de São Carlos,
carlos.oliveira@estudante.ufscar.br

⁴Universidade Federal de Viçosa,
marco.a.fernandes@ufv.br

⁵Universidade Federal de Viçosa,
84.mostafa@gmail.com

para alguma função $\rho_\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$. Entre os resultados obtidos estão a determinação completa da função ρ_α para qualquer forma espacial e o estudo da regularidade de γ_α . Além disso, usando ferramentas da Teoria de Singularidades, iremos apresentar como as singularidades aparecem nos α -evolutoídes. Também apresentaremos a família de *wave-fronts* associadas aos α -evolutoídes.

Referências

- [GW14] Peter J Giblin and J Paul Warder. Evolving evolutooids. *The American Mathematical Monthly*, 121(10):871–889, 2014.
- [Huy66] Christiaan Huygens. *Horologium oscillatorium*. 1966.
- [IPS03] Shyuichi Izumiya, Donghe Pei, and Takasi Sano. Singularities of hyperbolic gauss maps. *Proceedings of the London mathematical Society*, 86(2):485–512, 2003.
- [IPST04] Shyuichi Izumiya, Dong He Pei, Takashi Sano, and Erika Torii. Evolutes of hyperbolic plane curves. *Acta Mathematica Sinica*, 20:543–550, 2004.
- [JC14] Jesús Jerónimo-Castro. On evolutooids of planar convex curves. *Aequationes mathematicae*, 88:97–103, 2014.
- [WYCL23] Yongqiao Wang, Lin Yang, Yuan Chang, and Haiming Liu. Evolutooids and pedaloids of frontals on timelike surfaces. *Open Mathematics*, 21(1):20230149, 2023.
- [ZP18] Cuilian Zhang and Donghe Pei. Evolutes of (n, m) -cusp curves and application in optical system. *Optik*, 162:42–53, 2018.
- [ZP21] Xin Zhao and Donghe Pei. Evolutooids of the mixed-type curves. *Advances in Mathematical Physics*, 2021(1):9330963, 2021.

Algumas Contribuições da Matemática no Estudo do Código Genético e em Sistemas de Comunicação

Anderson José de Oliveira¹

Resumo: A Matemática Aplicada é uma área da Matemática na qual é possível aplicar conhecimentos matemáticos a outras áreas do saber. Uma das possibilidades de aplicação refere-se ao processo de modelagem do código genético, que representa uma área em franca expansão, na qual diversos pesquisadores vem desenvolvendo trabalhos, buscando conexões entre essas duas importantes áreas (Matemática e Biologia). Em [1] são apresentados resultados relacionados à geração de sequências de proteínas mediante a utilização de códigos corretores de erros, onde a base de construção utiliza estruturas de grupos, anéis, corpos e extensões de Galois. Por meio do desenvolvimento de um algoritmo para geração de proteínas, diversas sequências de DNA foram analisadas, com importantes perspectivas para o estudo de fenômenos mutacionais.

No trabalho de [2] são apresentadas algumas análises algébricas associadas ao processo de mapeamento do código genético, por meio de estruturas como os diagramas de Hasse, onde características físico-químicas puderam ser classificadas mediante as construções realizadas. Além disso, foram apresentados algoritmos envolvendo soma entre códons, a fim de analisar mutações genéticas e representações polinomiais, vetoriais e por potência associadas a cada um dos códons do código genético. Desta forma, pode-se perceber a busca de representações matemáticas do que o mundo biológico possui e as possibilidades de análise das propriedades e características das mesmas.

Além disso, outra importante aplicação está associada ao estudo e análise de sistemas de comunicação, por meio da teoria dos códigos corretores de erros, que tem como objetivo o desenvolvimento de métodos e técnicas capazes de detectar e/ou corrigir erros que possam surgir durante a transmissão ou armazenamento de dados, como apresentado em [3], onde elementos de álgebra abstrata, grafos, equações diferenciais fuchsianas e geometria hiperbólica apresentam importante papel na estruturação desse processo de aplicação e análise. Alguns trabalhos com resultados relacionados a esses tópicos são [4], [5] e [6].

O objetivo deste trabalho é apresentar uma série de resultados obtidos no processo de caracterização do código genético, analisando fenômenos biológicos, como casos de mutações, além da análise e interpretação do processo de construção de códigos corretores de erros envolvidos no processo de transmissão da informação em sistemas de comunicação.

Por meio dessas construções e análises buscaremos estabelecer conexões entre essas importantes áreas do conhecimento, como a Matemática, a Biologia e a Engenharia, além da possibilidade de continuação da pesquisa em trabalhos futuros.

¹Docente do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

Os resultados apresentados fazem parte de pesquisas desenvolvidas sob minha orientação em trabalhos de conclusão de curso, iniciação científica, dissertações de mestrado, dos cursos de graduação em Matemática - Licenciatura e de pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria, em que atuo. Além disso, alguns resultados fazem parte das pesquisas desenvolvidas pelo grupo de pesquisa do qual faço parte, em “Códigos Quânticos e Hiperbólicos”.

Referências

- [1] L. C. B. Faria. *Existências de Códigos Corretores de Erros e Protocolos de Comunicação em Sequências de DNA*, Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2011.
- [2] A. J. Oliveira. *Análise Algébrica dos Rotulamentos Associados ao Mapeamento do Código Genético*, Dissertação de Mestrado, FEEC-Unicamp, 2012.
- [3] S. Lin; D. J. Costello Jr *Error control coding: fundamentals and applications*, Prentice Hall, 1983.
- [4] A. J. Oliveira. *Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação*, Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2017.
- [5] A. J. Oliveira; R. Palazzo Jr. Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem, *Computational and Applied Mathematics*, 2017.
- [6] A. J. Oliveira, et al. Algebraic and geometric characterizations related to the quantization problem of the $C_{2,8}$ channel, *Computational and Applied Mathematics*, 2024.

Redes Neurais para Treinamento em Tempo Real: Explorando a Teoria da Ressonância Adaptativa

Angela Leite Moreno¹
Reginaldo José da Silva²

Resumo: As redes neurais artificiais são modelos computacionais inspirados no funcionamento do cérebro humano. Elas consistem em uma rede de interconexões entre unidades de processamento simples, conhecidas como neurônios artificiais, cujo objetivo é aprender com base em um conjunto de dados apresentado. Esses algoritmos têm a capacidade de aprender e generalizar a partir de dados, possibilitando que sistemas automatizados tomem decisões e executem tarefas complexas sem a necessidade de programação específica.

Entretanto, durante o processo de aprendizagem, as redes neurais enfrentam o dilema da estabilidade-plasticidade. Isso significa que elas precisam equilibrar a capacidade de aprender novas informações (plasticidade) sem esquecer o que já foi aprendido (estabilidade), evitando o conhecido como esquecimento catastrófico. É nesse contexto que surgem as redes neurais baseadas na Teoria da Ressonância Adaptativa que oferecem uma abordagem eficaz para lidar com esse problema [1].

Nestes modelos existe uma camada de reconhecimento de baixo-para-cima (*bottom-up*) e uma camada generativa de cima-para-baixo (*top-down*) o que permite que o modelo direcione sua atenção para recursos que são considerados importantes para previsões com base em aprendizados anteriores [2]. Se o padrão de entrada e o padrão realimentado aprendido coincidirem, ocorrerá um processo dinâmico chamado de “Ressonância Adaptativa”, isto é, ocorre a amplificação e prolongamento da atividade neural. A teoria afirma que a ressonância regula a aprendizagem em redes neurais com *feedback* (recorrência). Este modelo utiliza um mecanismo de aprendizado não-supervisionado e competitivo criando protótipos (*clusters*) dos padrões aprendidos.

Essa rede, como as demais redes neurais, tem sua estrutura definida anteriormente à apresentação do problema, ou seja, o número de neurônios é definido independente de como a rede se comporte durante o aprendizado. É aqui que a rede proposta por Moreno [3] se difere das demais redes ART: na capacidade de se auto-expandir. A rede se inicia com um único neurônio ativo e, de acordo com a necessidade de incorporação de novos padrões, a rede vai criando novos neurônios para incorporá-los. Essa rede se configura de acordo com o problema que está sendo abordado, não dependendo de uma configuração inicial. Assim surge a rede neural Auto-expansível baseada na Teoria da Ressonância Adaptativa. No entanto, como as demais redes ART, todo o processo de aprendizagem é realizado offline, ou seja, os dados são apresentados à rede neural e ela se auto-organiza em *clusters* para representar os dados.

¹Universidade Federal de Alfenas, UNIFAL-MG,
angela.moreno@unifal-mg.edu.br

²Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, FEIS/UNESP,
reginaldo.silva@unesp.br

Com o objetivo de realizar o treinamento adaptativo e contínuo, surge a rede neural baseada na teoria da ressonância adaptativa com treinamento online, ou seja, a rede se adapta ao problema conforme novos dados são fornecidos pelo usuário. Quais são suas vantagens? Em problemas biológicos, como o câncer, por exemplo, características como o modo de vida, tipo de alimentação, carga de trabalho, entre outros, influenciam nas características da população com a enfermidade. Em uma rede neural convencional seria necessário reiniciar o treinamento ao integrar dados de cada nova população. Entretanto, quando se trata da rede com aprendizado online, ao se apresentar dados de uma população diferente à rede previamente treinada, alguns de seus clusters vão sendo reconfigurados e outros clusters são incorporados permitindo à rede assimilar e se adaptar a essa nova realidade sem reiniciar o treinamento por completo. Um exemplo de como funciona esse tipo de rede pode ser visto na Figura 1.

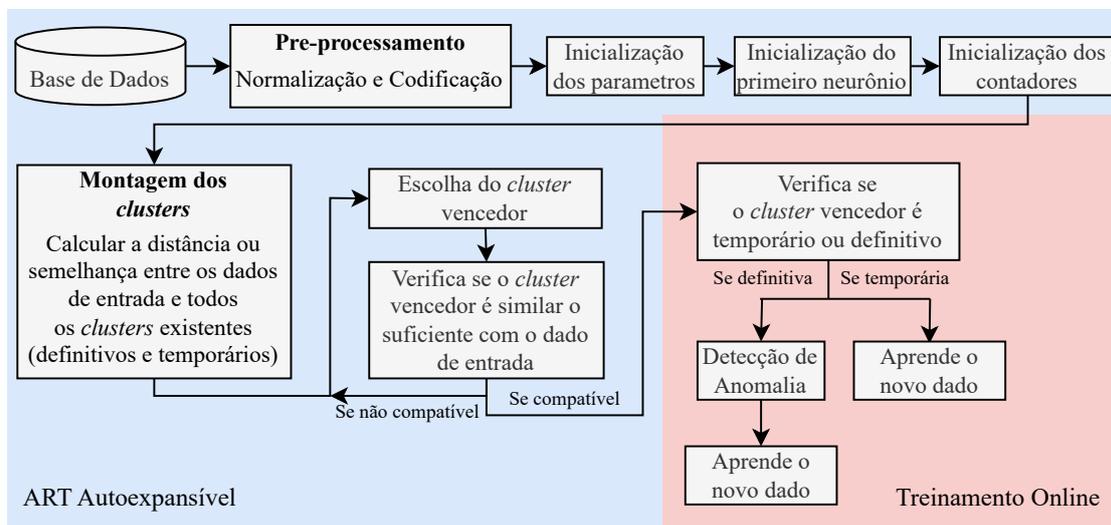


Figura 1: Esquema de funcionamento da Rede com Treinamento Online

Referências

- 1 CARPENTER, G. A.; GROSSBERG, S. A massively parallel architecture for a self-organizing neural pattern recognition machine. *Computer vision, graphics, and image processing*, Maryland Heights, US, v. 37, n. 1, p. 54–115, 1987. DOI:<[https://doi.org/10.1016/S0734-189X\(87\)80014-2](https://doi.org/10.1016/S0734-189X(87)80014-2)>.
- 2 GROSSBERG, S. A path toward explainable ai and autonomous adaptive intelligence: deep learning, adaptive resonance, and models of perception, emotion, and action. *Front Neurobot*, Lausanne, CH, v. 14, p. 36, 2020. DOI:<<https://doi.org/10.3389/fnbot.2020.00036>>.
- 3 MORENO, A. L. *Redes Neurais ART e ARTMAP com Treinamento Continuado: Uma apresentação detalhada dos principais tipos de redes neurais do tipo ART e ARTMAP*. Saarbrücken: Novas Edicoes Academicas, 2016. ISBN 978-3330740051.

Dispositivo prático para desenvolver o Binômio $(ax + b)^n$

Carlos Alberto da Silva Junior ¹

Resumo: O binômio $(ax + b)^n$ é usado nas mais diversas áreas da ciência como, por exemplo, na matemática, física, engenharia, etc. A sua expansão é usada no estudo de polinômios, cálculos envolvendo probabilidades, estudo de convergência de séries infinitas, entre outras aplicações. De uma forma geral, a expansão desses binômios $(ax + b)^n$ são feitas por números binomiais e suas propriedades [1].

Mesmo sendo contas relativamente simples, o desenvolvimento de binômios com um valor elevado de expoente, pode ser trabalhoso. Nesta comunicação apresentamos um Dispositivo Prático (DP) que permite a obtenção dos coeficientes de forma simples pode facilitar no uso do binômio. O DP [2] utiliza técnicas de cálculo diferencial e uma fórmula de recorrência para expandir o binômio $(ax + b)^n$, sendo esse um dispositivo simples e eficaz. Cada termo do DP é obtido pela derivada do termo anterior, dividido por uma correção, que está relacionada com a posição que o termo ocupa na sequência da expansão e os coeficientes do binômio. Para chegar ao dispositivo, primeiro é necessário provar que o termo geral do binômio $(ax + b)^n$, denotado por T_k , pode ser obtido por derivação sucessiva.

Teorema 1 *Seja $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que o termo geral do binômio $(ax + b)^n$ é dado por*

$$T_k = \frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n) a^{n-k} b^k}{k!}.$$

Demonstração: Precisamos mostrar que o termo geral $T_k = \frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n) a^{n-k} b^k}{k!}$ tem o mesmo valor que $T_k = \binom{n}{k} (ax)^{n-k} b^k$, que é o termo geral obtido pelo desenvolvimento do binômio por números binomiais [3].

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n)}{k!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) x^{n-k}}{k!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^{n-k}}{k!} = \binom{n}{k} x^{n-k}. \end{aligned}$$

¹Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, carlosdamat@ufs.edu.br

Conseqüentemente,

$$\frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n)a^{n-k}b^k}{k!} = \binom{n}{k} (ax)^{n-k}b^k,$$

como se queria demonstrar. \square

Com isso, cada termo do binômio $(ax + b)^n$ pode ser obtido por derivação, de forma recorrente.

Corolário 1 Cada termo do desenvolvimento do binômio $(ax + b)^n$ é obtido por

$$T_k = \frac{d}{dx}T_{k-1} \cdot \frac{b}{a(k-1)}, \text{ para } k \geq 1.$$

Demonstração: Provemos por indução. Para o segundo termo da expansão temos que

$$T_1 = \frac{d}{dx}T_0 \cdot \frac{b}{a} = \frac{d}{dx}(xa)^n \cdot \frac{b}{a} = nx^{n-1}a^{n-1}b$$

e, por isso, a fórmula de recorrência é válida para o segundo termo da expansão. Agora se a sequência seja válida para k , ou seja,

$$T_k = \frac{d}{dx}T_{k-1} \cdot \frac{b}{a(k-1)} = a_{k-1}x^{n-k+1}a^{n-k+1}b^{k-1},$$

então, para $k + 1$ temos que

$$T_{k+1} = \frac{d}{dx}(x^{n-k+1}a^{n-k+1}b^k) \cdot \frac{b}{ak} = \frac{a_{k-1} \cdot (n-k+1)}{k} x^{n-k}a^{n-k}b^k,$$

do Teorema temos que $a_k = \frac{a_{k-1} \cdot (n-k+1)}{k}$ e, portanto, $T_{k+1} = \frac{d}{dx}T_k \cdot \frac{b}{ak}$, para $k \geq 1$. \square

Assim temos o **Dispositivo Prático Para expandir o Binômio $(ax + b)^n$ [2]**: O primeiro termo da expansão é $a^n x^n$. A partir daí, cada termo é obtido pela derivada do termo anterior multiplicado por $\frac{b}{a(k-1)}$, onde k é a posição do termo na expansão.

Referências

- [1] GRIMALDI, R. P. Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction. **Pearson**, 2003.
- [2] DA SILVA JUNIOR, C. A. Dispositivo Prático Para Desenvolvimento do Binômio da forma $(ax + b)^n$. XI Bienal da Matemática. **SBM**, São Carlos, 2024.
- [3] MORGADO, A. C. de O.; PITOMBEIRA, J. B.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. **SBM**, 11^a Ed., 2020.

Índice de Morse dos catenóides capilares na bola unitária euclidiana

Edno Pereira ¹

Resumo: Uma superfície Σ imersa na bola unitária euclidiana \mathbb{B}^3 é dita *CMC capilar* se Σ tem curvatura média constante, $\Sigma \cap \partial\mathbb{B}^3 = \partial\Sigma$ e Σ intersecta $\partial\mathbb{B}^3$ ao longo de um ângulo constante. Os exemplos mais simples conhecidos de superfícies CMC's capilares em \mathbb{B}^3 são os discos totalmente umbílicos e as porções de superfícies de Delaunay que são simétricas com relação aos planos coordenados. Uma superfície CMC capilar Σ é dita *mínima capilar* se Σ tem curvatura média constante nula. Por outro lado, uma superfície mínima capilar Σ é dita *mínima de fronteira livre* se Σ intersecta $\partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente. A principal motivação para o estudo das superfícies mínimas de fronteira livre é que elas surgem naturalmente como pontos críticos do funcional área para variações que permitem mover $\partial\Sigma$ ao longo do bordo de \mathbb{B}^3 . Exemplos simples de superfícies mínimas de fronteira livre são os discos equatoriais e o catenóide crítico, isto é, a porção do catenóide que intersecta \mathbb{B}^3 ortogonalmente.

O interesse no estudo das superfícies CMC's capilares tem aumentado significativamente nos últimos anos. Sobretudo, após os trabalhos de R. Schoen e A. Fraser [1, 2, 3] que estabeleceram profundas conexões entre superfícies mínimas de fronteira livre na bola e o problema de autovalor de Steklov.

O índice de Morse de uma superfície mínima capilar Σ é definido como sendo o número de autovalores estritamente negativos, contando multiplicidades, do operador de Jacobi em Σ com condições de Robin na fronteira. Em [4], H. Tran deu uma caracterização completa do catenóide crítico em termos do seu índice. Precisamente, ele mostrou que o catenóide crítico é a única superfície mínima de fronteira livre na bola unitária com índice de Morse igual a 4. Posteriormente, H. Tran e D. Zhou [5] forneceram uma abordagem ao estudo do índice de Morse de superfícies mínimas capilares em termos da análise dos autovalores de outros dois problemas mais simples. Inspirados nos trabalhos de H. Tran e D. Zhou, mostramos que o índice de Morse de um catenóide capilar varia de acordo com o ângulo de capilaridade, podendo ser igual a 3, 4, 6 ou 7.

Os valores explícitos do Índice de Morse para uma família de superfícies mínimas capilares com a mesma topologia, variando apenas o ângulo de contato, mostra como a capilaridade pode afetar o índice dessas superfícies.

Trabalho em colaboração com Ezequiel Rodrigues Barbosa² e Wilson Berrocal Meza³

¹Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ,
ednopereira@ufs.ju.edu.br

²Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG,
ezequiel@mat.ufmg.br

³Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga - UNSCH,
wilson.berrocal.26@unsch.edu.pe

Referências

- [1] Fraser, A., Schoen, R.: *Minimal surfaces and eigenvalue problems*. Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations. Amer. Math. Soc., 599, (2013), 105–121.
- [2] Fraser, A., Schoen, R.: *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*. Invent. Math., 203(3), (2016), 823–890.
- [3] Fraser, A., Schoen, R.: *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*. Adv. Math., 226(5), (2011), 4011–4030.
- [4] Hung Tran, *Index characterization for free boundary minimal surfaces*. Comm. Anal. Geom. 28(1), (2020), 189–222.
- [5] Hung Tran and Detang Zhou, *On the morse index with constraints: An abstract formulation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 526(1), (2023), 127317.

Critical Metrics of the S^k Operator

Flávio Almeida Lemos ¹
Ezequiel Barbosa ²

Resumo

Given a smooth compact Riemannian n -manifold (M, g) with positive scalar curvature, we prove that any complete critical metric of the L^k -norm of the scalar curvature, has constant scalar curvature.

1 Introduction

Let (M^n, g) , $n \geq 3$, be a n -dimensional smooth Riemannian manifold and consider the functional

$$S^k(g) = \int_M R^k dV_g \quad (1)$$

on the space of Riemannian metrics on M^n , where $k \in \mathbb{N}$, R_g and dV_g denote the scalar curvature and the volume for of g respectively. In the case $k = 2$, Giovanni Catino [4] proved the following theorem

Theorem 1.1 *Let (M^n, g) , $n \geq 3$, be a complete critical metric of S^2 with positive scalar curvature. Then (M^n, g) has constant scalar curvature.*

Urging for a more general result, we calculated the first variation of $S^k(g)$, using derivatives formulas (see [3]) in the direction of h ($g(t) = g + th$)

$$\begin{aligned} \delta S^k(g)[h] &= \int_M (kR^{k-1}\delta R + \frac{1}{2}R^k tr(h))dV_g \\ &= \int_M (-kR^{k-1}\Delta_g tr(h) + kR^{k-1}div^2(h) - kR^{k-1} \langle Ric, h \rangle_g + \frac{1}{2}R^k tr(h))dV_g \\ &= \int_M (-k\Delta_g R^{k-1}g + k\nabla_g^2 R^{k-1} - kR^{k-1}Ric + \frac{1}{2}R^k g)hdV_g. \end{aligned}$$

Remark 1.1 *We take h with compact support, such that we can apply the Divergence Theorem for $(2, 0)$ -tensor.*

¹Universidade Federal de Ouro Preto,
flavioalemos@ufop.edu.br

²Universidade Federal de Minas Gerais ,
ezequiel@mat.ufmg.br

Hence, the Euler Lagrange equation for a critical metric of \mathcal{S}^k in the direction of h is given by

$$R^{k-1} Ric - \nabla_g^2(R^{k-1}) + \Delta_g(R^{k-1})g = \frac{1}{2} \frac{R^k}{k} g. \quad (2)$$

By induction, we can proof that

$$\nabla_g^2(R^{k-1})(X, Y) = (k-1)R^{k-2}\nabla_g^2 R(X, Y) + (k-1)(k-2)R^{k-3}X(R)Y(R). \quad (3)$$

By (2) and (3)

$$\Delta_g R = \left(\frac{(n-2k)}{2k(n-1)(k-1)} \right) R^2 - (k-2) \frac{|\nabla_g R|^2}{R} \quad (4)$$

By above equalities; any critical metric of \mathcal{S}^k is scalar flat if n is odd, whereas it is either scalar flat or Einstein if $n = 2k$.

In this paper we will focus on complete critical metrics of \mathcal{S}^k . As far as we know, complete critical metrics of \mathcal{S}^k were not studied yet. Our main result characterizes critical metrics with positive scalar curvature.

Theorem 1.2 *Let (M^n, g) , $n \geq 3$, be a complete critical metric of \mathcal{S}^k with positive scalar curvature and $k \geq 2 \in \mathbb{N}$. Then (M^n, g) has constant scalar curvature.*

Theorem 1.3 *Let (M^n, g) , $n \geq 3$, be a complete critical metric of \mathcal{S}^k with positive scalar curvature and $k \geq 2 \in \mathbb{N}$. If $n < 2k$, then (M^n, g) is scalar flat.*

In particular, from equations (2) and (3), if $n \neq 2k$, there are no complete critical metrics of \mathcal{S}^k with positive scalar curvature, whereas, every complete $2k$ -dimensional critical metric \mathcal{S}^k with positive scalar curvature is either flat or Einstein with positive scalar curvature.

Referências

- [1] M. T. Anderson - *Extrema of curvature functionals on the space of metrics on 3-manifolds,*, Cal. Var. PDEs 5 (1997), 199-269.
- [2] M. T. Anderson - *Extrema of curvature functionals on the space of metrics on 3-manifolds, II,* Cal. Var. PDEs 12 (2001), 1-58.
- [3] Bennett Chow, Peng Lu and Lei Ni - *Hamilton's Ricci Flow*, Lectures in Contemporary Mathematics, Science Press, Beijing (2006).
- [4] Giovanni Catino - *Critical Metrics of the L^2 -Norm of the Scalar Curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 3981-3986.
- [5] G. Wei and W. Wylie - *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricc tensor*, J. Differential Geom. 83 (2009), no. 2, 377-405.

Generacity Hyperbolic Aubry Set

Josué Geraldo Damasceno¹

José Antônio G. Miranda²

Carlos Carballo³

Resumo:

Let M be a smooth Riemannian manifold without boundary of dimension 2, and $H : T^*M$ be a Tonelli Hamiltonian of class C^2 . The Hamiltonian function is connected to variational problems and in [5] was showed by Mather that one can construct a compact invariant subset of T^*M which has several interesting properties like being a Lipschitz graph over part of M . This set is called Aubry set and denoted by A_H , it retain many important feature of Hamiltonian dynamics. In the international mathematical congress at 1998, Michael Herman arose the following question about generacity hyperbolic Aubry set:

“Let H be a C^∞ -generic Hamiltonian and μ be a generic ergodic minimal measure of Mather. Is the Hamiltonian flow $\phi_t^H|_{\text{supp}\mu}$ on H^{-1} a hyperbolic flow?” In [2] this problem was solve on surface, for the C^2 -topology. The twist map version for this problem in the C^1 topology, was lift by Katok a little time ago and solved by Le-Calvez [1]. It treat about the existence for a generic area-preserving twist map of the annulus, of a dense open set of \mathbb{R} such that every Aubry-Mather set whose number of rotation belongs to it is hyperbolic. In this talk we shall treat as extend this result for a Tonelli Hamiltonian generic, of class C^k , $k \geq 2$, on a compact surface without boundary, like consequence of upper semi-continuity properties.

Referências

- [1] Le Calvez, P., Les ensembles d’Aubry-Mather d’un difféomorphisme conservatif de l’anneau déviant la verticale sont en général hyperboliques, C.R. Acad. Sci. Paris. t. 306, Série I, p. 51-54, 1988.
- [2] Contreras, G., Figalli, A., Rifford, L., Generic hyperbolic of Aubry sets on surfaces, Invent, Math, 2015

¹Universidade Federal de Ouro Preto,
josue@ufop.edu.br

²Universidade Federal de Minas Gerais ,
jan@ufmg.br

³Universidade Federal de Minas Gerais ,
jan@ufmg.br

- [3] Figalli, A. Fathi, A. Rifford, L., On the Hausdorff dimension of the Mather quotient, Communications on Pure and Applied Mathematics , vol. 62, 2009.
- [4] Bernard, P., On the Conley decomposition of Mather sets, Rev. Mat. Iberoam., N. 1, vol 26, 2010.
- [5] Mather, J., Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems, Mathematische Zeitschrift, vol 207, 1991.

Multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations with critical growth in \mathbb{R}^N

Paes-Leme, L. C.¹
 Rodrigues, B. M.²
 de Souza, G.³
 Oliveira, F. L. P.⁴

Resumo: In this presentation, we consider the following Kirchhoff type problem involving the critical Sobolev exponent:

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \lambda k(x) |u|^{q-2} u + \mu |u|^{2^*-2} u, \\ x \in \mathbb{R}^N, u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1)$$

where $N \geq 3$, $a \geq 0$, $b > 0$, $1 < q < 2$ and λ, μ are positive parameters. Moreover, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ is the critical Sobolev exponent for the embedding of $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in [1, 2^*]$, and $k(x) \in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ is a positive function.

The problem (1) was first studied by Kirchhoff [1] in 1883. Kirchhoff proposed to study an analogous stationary model of the following extension of the wave equation:

$$u_{tt} - \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x, u).$$

The presence of the nonlocal term $\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u$ causes great mathematical difficulties that do not show up in local equations. Nonlocal equations have been studied by many researchers, following J.L. Lions [2], who first introduced the functional analysis framework to investigate the problem. These equations also model biological systems, in which u describes a process that depends on its mean – for instance, the growth and movement of certain specific species [3].

Kirchhoff type equations with critical exponents have stirred the interest of many researchers following the pioneering work of Alves, Corrêa and Figueiredo [4]. In 2016, Li

¹Universidade Federal de Ouro Preto,
leandro.leme@ufop.edu.br

²Universidade Federal de Ouro Preto,
brunomendes@ufop.edu.br

³Universidade Federal de Ouro Preto,
gdesouza@ufop.edu.br

⁴Universidade Federal de Ouro Preto,
fernandoluiz@ufop.edu.br

and Liao [5] established results for the existence and multiplicity of solutions for problem (1) in the case $N \geq 4$ and $2 \leq q < 2^*$ (superlinear). In 2018, Li, Liao, and Zhang [6] studied problem (1) on bounded domains, in the case $N \geq 4$, $1 < q < 2$ (sublinear) and $k(x) \equiv 1$. They also proved the existence and multiplicity of solutions.

We use a version of the concentration-compactness principle, due to P.L. Lions [7, 8] and Krasnoselskii's genus theory [9], to establish the existence and multiplicity of solutions to the problem (1).

Our results here complement the work of Li and Liao [5] for the case $N \geq 3$ and $1 < q < 2$. Furthermore, problem (1) can be viewed as an extension of the problem studied by Li, Liao, and Zhang [6] to \mathbb{R}^N , for $N \geq 3$. We also demonstrate existence and multiplicity of solutions in the degenerate case ($a = 0$), for $N \geq 3$, which is rare in literature.

Referências

- [1] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, (1883).
- [2] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in: *Contemporary Development in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, North-Holland, Math. Stud. 30 (1978) 284-346.
- [3] P. Pucci, M. Xiang, B. Zhang, Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger-Kirchhoff type equations involving the fractional p-Laplacian in \mathbb{R}^N , *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 54(3) (2015) 2785–2806.
- [4] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth, *Differ. Equ. Appl.* 23 (2010) 409–417.
- [5] H.Y. Li, J.F. Liao, Existence and multiplicity of solutions for a superlinear Kirchhoff-type equations with critical Sobolev exponent in \mathbb{R}^N , *Comput. Math. Appl.* 72 (2016) 2900–2907.
- [6] J.F. Liao, H.Y. Li, P. Zhang, Existence and multiplicity of solutions for a nonlocal problem with critical Sobolev exponent, *Comput. Math. Appl.* 75 (2018) 787–797.
- [7] P.L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part 1, *Rev. Mat. Iberoam.* 1 (1985) 145–201.
- [8] P.L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part 2, *Rev. Mat. Iberoam.* 2 (1985) 45–121.
- [9] M.A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, MacMillan, New York, 1964.

O grupo de isotropia das derivações localmente finitas

Marcelo Veloso¹

Luis Cid²

Resumo:

Ao longo deste trabalho, assumimos que \mathbb{K} é um corpo de característica zero. Denotaremos o anel polinomial em n variáveis com coeficientes em \mathbb{K} por $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, ou simplesmente por $\mathbb{K}^{[n]}$. Seja D uma função sobre o anel polinomial, $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, definida da seguinte maneira

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial X_2} \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial X_n},$$

onde $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Chamamos D de *derivação*.

Dizemos que uma derivação D é *localmente finita* se, para todo $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, o espaço vetorial gerado pelos polinômios

$$f, D(f), D^2(f), \dots, D^i(f), \dots$$

tem dimensão finita sobre \mathbb{K} . É trivial verificar que as derivações lineares, f_i linear para $i = 1, \dots, n$, são localmente finitas.

Seja $\text{Aut}(\mathbb{K}^{[n]})$ o conjunto dos \mathbb{K} -automorfismos do anel polinomial $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. O *grupo de isotropia* da derivação D , denotado por $\text{Aut}(D)$, é o subgrupo formado pelos \mathbb{K} -automorfismos do grupo $\text{Aut}(\mathbb{K}^{[n]})$ que comutam com D .

Nosso objetivo, neste trabalho, é apresentar uma descrição do grupo de isotropia das derivações localmente finitas sobre os anéis polinomiais em uma e duas variáveis.

A caracterização, no caso de duas variáveis, é possível graças ao seguinte resultado:

Lema 1 (Corolário 4.7, [3]) *Se D é uma derivação localmente finita, então existe um automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{[2]})$ tal que $\varphi D \varphi^{-1}$ assume uma das seguintes formas*

1. $D = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y}$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{K}$
2. $D = \frac{\partial}{\partial x} + by \frac{\partial}{\partial y}$
3. $D = ax \frac{\partial}{\partial x} + (amy + x^m) \frac{\partial}{\partial y}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$
4. $D = f(x) \frac{\partial}{\partial y}$.

¹Universidade Federal de São João del-Rei, veloso@ufsj.edu.br

²Universidade de Talca, luis.cid@inst-mat.otalca.cl

◇

O grupo de isotropia da $D = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$ já é conhecido, veja [1]. Nosso principal resultado é caracterizar o grupo de isotropia para as demais derivações listadas no Lema 1. A seguir temos a caracterização do grupo de isotropia da derivação localmente finita

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}.$$

Teorema 1 *Let $D = \frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}$, onde $b \in \mathbb{K}$. Então $\text{Aut}(D)$ é gerado pelos automorfismos*

1. $(X + g(Y), Y)$ e $(X, r + sY)$, onde r e $s \in \mathbb{K}$ and $g \in \mathbb{K}[Y]$, se $b = 0$.
2. $(r + X, Y)$ and $(X, s + Y)$, onde r e $s \in \mathbb{K}$, se $b \neq 0$.

◇

Referências

- [1] R. Baltazar, M. Veloso. On isotropy group of Danielewski surfaces, *Communications in Algebra*, DOI: 10.1080/00927872.2020.1825724, 2020.
- [2] L. Cid, M. Veloso. *Isotropy group of locally finite automorphism element on $k^{[n]}$* , preprint, 2024.
- [3] A. Van Den Essen. Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **116** (3): 861–871, 1992.

Second order geometry of 3-manifolds

Pedro Benedini Riul ¹

Resumo:

The geometry of regular and singular 3-manifolds in \mathbb{R}^6 and \mathbb{R}^5 , respectively, is the focus of this lecture. Given the second fundamental form of a 3-manifold, one can associate a net of quadrics. This association provides a tool to investigate the second order geometry of such objects. Furthermore, the affine classification of the curvature loci will be presented. The results can be found in [1].

Referências

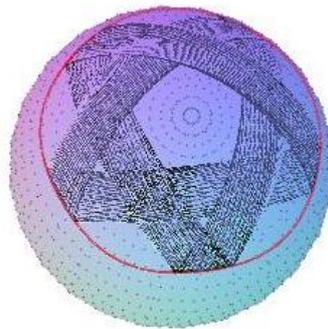
- [1] Benedini Riul, P., Oset Sinha, R., Ruas, M. A. S *Curvature loci of 3-manifolds*, *Mathematische Nachrichten*, 296(10), 4656-4672, **2023**.

¹Universidade Federal de São João del Rei ,
benedini@ufsj.edu.br

Bilhares Genéricos em Superfícies

Rafael da Costa Pereira¹Sônia Pinto de Carvalho²

Resumo: O problema dos bilhares convexos no plano euclidiano foi originalmente proposto por Birkhoff no início do século XX. Esse problema consiste no movimento livre de uma partícula dentro de uma região planar fechada e convexa, assumindo que a partícula se move a uma velocidade constante e que colide elasticamente nos impactos com a fronteira. Uma maneira de generalizar o problema de bilhares convexos no plano é considerar o movimento geodésico de uma partícula em uma superfície dentro de uma região limitada por uma curva convexa.



Considerando apenas o ponto de impacto na fronteira e direção do movimento, podemos definir um difeomorfismo Twist T no cilindro, considerando o parâmetro comprimento de arco s e a componente tangencial do momento $p = \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre a direção do movimento e a tangente na fronteira no ponto de impacto. Gostaríamos de responder como é o comportamento típico de um bilhar. O que difere o estudo das propriedades genéricas de um difeomorfismo em relação a aplicação de bilhar é a impossibilidade de se realizar perturbações locais. Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst e Pinto de Carvalho [1,2] introduzem uma maneira de perturbar a aplicação de bilhar, perturbando a curva do bordo. Além disso eles obtêm uma expressão algébrica para o primeiro coeficiente de Birkhoff e com isso conseguem garantir propriedades genéricas para bilhares convexos no plano euclidiano. Nós estendemos esses resultados para a semiesfera e o plano hiperbólico e provamos que:

¹Universidade Federal de Minas Gerais,
rafaeldacostapereira@gmail.com

²Universidade Federal de Minas Gerais,
sonia@mat.ufmg.br

Teorema 1 *Genericamente os bilhares ovais em superfícies de curvatura constante possuem um número finito de órbitas n -periódicas, todas não degeneradas.*

Teorema 2 *Genericamente as variedades estáveis e instáveis de dois pontos periódicos hiperbólicos, não necessariamente distintos, para bilhares ovais em superfícies de curvatura constante ou não possuem interseção ou possuem pelo menos uma interseção transversa.*

Teorema 3 *Possuir uma órbita 2-periódica elíptica é uma propriedade aberta e genericamente essas órbitas são não degeneradas e não ressonantes para bilhares ovais. Além disso qualquer bilhar oval com uma 2-periódica elíptica pode ser aproximados por um bilhar oval com uma órbita 2-periódica elíptica com ilhas elípticas.*

Vieira Morais [3] mostra que o bilhar convexo dentro de uma vizinhança normal é uma aplicação Twist para qualquer superfície. Nosso objetivo futuro é desenvolver ferramentas e técnicas para estudar a genericidade de bilhares convexos em qualquer superfície.

Referências

- [1] Mario Jorge Dias Carneiro, Sylvie Oliffson Kamphorst, and Sônia Pinto de Carvalho. Elliptic islands in strictly convex billiards. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 23, 2003.
- [2] Mario Jorge Dias Carneiro, Sylvie Oliffson Kamphorst, and Sônia Pinto de Carvalho. Periodic orbits of generic oval billiards. *Nonlinearity (Bristol)*, 20, 2007.
- [3] Mario Jorge Dias Carneiro, Sylvie Oliffson Kamphorst, Sônia Pinto de Carvalho, and Cássio Henrique Vieira Morais. On the role of the surface geometry in convex billiards. *Nonlinearity*, 37(11):115020, 2024.
- [4] Luciano Coutinho dos Santos and Sônia Pinto de Carvalho. Periodic orbits of oval billiards on surfaces of constant curvature. *Dynamical Systems*, 32(2):283–294, 2017.
- [5] Sylvie Oliffson Kamphorst and Sônia Pinto de Carvalho. The first birkhoff coefficient and the stability of 2-periodic orbits on billiards. *Experimental Mathematics*, 14, 01 2005.

Nonexistence of blow-up for the generalized Quasi-geostrophic equations in some level curves scenarios

Ricardo Guimarães¹
Lucas C. F. Ferreira²

Resumo: We analyze finite-time blowup scenarios of locally self-similar type for the inviscid generalized surface quasi-geostrophic equation (gSQG) in \mathbb{R}^2 , given by

$$\begin{cases} \theta_t + u \cdot \nabla \theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u = -\nabla^\perp (-\Delta)^{-1+\frac{\beta}{2}} \theta, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $\beta \in (0, 2)$ is a fixed parameter, $\theta = \theta(x, t)$ is an unknown scalar function, the operator $(-\Delta)^{-s/2}$, $0 < s < 2$, is the Riesz potential, and $u = u(x, t)$ denotes a velocity field given by

$$u(x, t) = C_\beta P.V. \int_{\mathbb{R}^2} K_\beta(x - y) \theta(y, t) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

where

$$K_\beta(x) = \frac{x^\perp}{|x|^{2+\beta}}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

and C_β is a constant.

For $\beta = 0$, equation (1) reduces to the vorticity formulation of the 2D incompressible Euler equations, a model for the evolution of inviscid and incompressible fluid flows in \mathbb{R}^2 . Whereas for $\beta = 1$, (1) coincides with the surface quasi-geostrophic equation (SQG), which models the evolution of surface temperature or buoyancy in certain large-scale atmospheric or oceanic flows. Besides its physical relevance, the SQG equation has also received considerable attention due to its strong analytical and physical similarities to the 3D incompressible Euler equations.

We investigate potential finite-time blow-up scenarios for the inviscid generalized surface quasi-geostrophic (gSQG) equation in \mathbb{R}^2 within a more singular framework. In the hyperbolic case, we extend results established by Córdoba in [1] for the SQG equation, showing that if the level sets of the active scalar contain a hyperbolic saddle, this saddle cannot close in finite time. Additionally, we establish conditions that rule out the formation of sharp fronts and provide estimates for the emergence of semi-uniform fronts. In the elliptic scenario, we demonstrate that elliptic level curves cannot uniformly collapse in finite time, thereby excluding the possibility of finite-time blow-up in this setting.

¹Universidade Estadual de Campinas,
rmmg1315@unicamp.br

²Universidade Estadual de Campinas,
lcfff@unicamp.br

Referências

- [1] CÓRDOBA , Diego. Nonexistence of a simple hyperbolic blow-up for the quasigeostrophic equation. *Annals of Mathematics*, v. 148, n. 3, p. 1135-1152, 1998.
- [2] LI, Linrui; HONG, Mingli; ZHENG, Lin. Some Conditions of Non-Blow-Up of Generalized Inviscid Surface Quasigeostrophic Equation. *Advances in Mathematical Physics*, v. 2023, n. 1, p. 4420217, 2023.
- [3] CONSTANTIN, Peter; MAJDA, Andrew J.; TABAK, Esteban. Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar. *Nonlinearity*, v. 7, n. 6, p. 1495, 1994.

1/f noise in a SIS model for dengue epidemics

Romuel F. Machado ¹

Resumo: We have devised a simplified discrete mathematical model for the life cycle of *Aedes aegypti*, the dengue disease vector, relating the time evolution of eggs and mosquitoes populations. In order to investigate the epidemic dynamics this model is coupled to a SIS model. We simulate different scenarios for the mosquito development and epidemic evolution by manipulating the average temperature of a real temperature time series (TTS) which allows us to turn into time dependent the temperature dependent parameters of the *A. aegypti* life cycle obtained from empirical data. The resulting time series of mosquitoes and infected individuals populations display two distinct behaviors depending on the average temperature T_m of the TTS: low (high) values and low (high) amplitude fluctuations for T_m below (above) 20°C which is the threshold temperature T_l for the development of a sustainable population of infected individuals I_t when the temperature is kept constant. The power spectra of I_t exhibit $f^{-\gamma}$ behavior with γ depending on T_m : it decreases steadily with T_m until T_l is reached, then suffers a sharp decrease and remains constant for $T_m > T_l$. This bottom value of γ depends on the parameter α in the SIS model that is inversely proportional to the recovery time from the disease. Our simulations suggest that as α increases the exponent γ tends to 1.0, which is the signature of the $1/f$ noise. Our claim is that $1/f$ noise arises as a consequence of separation of time-scales in the model, since as α increases the recovery time decreases becoming much smaller than the time scale of the mosquito life cycle.

¹Universidade Federal de Ouro Preto,
romuel.machado@ufop.edu.br

Fatorações, elasticidades e sequências soma-zero

Sávio Ribas¹

Resumo: O *Teorema Fundamental da Aritmética* afirma que todo número natural pode ser escrito de forma única como produto de primos. Em outras estruturas algébricas, a fatoração pode não existir ou pode não ser única. Por exemplo, se a é um elemento de um monoide H , então é possível que $a = u_1 \dots u_k = v_1 \dots v_m$, onde u_i, v_j são irredutíveis distintos. O conjunto de comprimentos de $a \in H$, $L(a) = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists u_1, \dots, u_k \text{ irredutíveis com } a = u_1 \dots u_k\}$, e o sistema do conjunto de comprimentos, $\mathcal{L}(H) = \{L(a) \mid a \in H\}$, são formas de descrever a não-unicidade de fatorações em H . Para $k \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{U}_k(H) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m \text{ irredutíveis com } u_1 \dots u_k = v_1 \dots v_m\}$, $\lambda_k(H) = \min \mathcal{U}_k(H)$ e $\rho_k(H) = \sup \mathcal{U}_k(H)$ (k -ésima elasticidade). Os conjuntos $\mathcal{L}(H)$ e $\mathcal{U}_k(H)$ são, em geral, bem estruturados e, sob hipóteses razoavelmente fracas, temos $\mathcal{U}_k(H) = [\lambda_k(H), \rho_k(H)]$. E mais, se H é o anel de inteiros de algum corpo de números algébricos K , então $L(a)$ é um intervalo para quase todo $a \in H$. É conhecido que $\lambda_k(H)$ pode ser escrito como função de $\rho_k(H)$. Por outro lado, uma sequência sobre um grupo significa finitos termos cuja ordem é desconsiderada e a repetição é permitida. Uma sequência S sobre um grupo abeliano $(G, +, 0)$ é soma-zero se a soma dos seus termos é 0. A constante de Davenport de um grupo G , $D(G)$, denota o maior comprimento possível entre todas as sequências soma-zero minimais. Existe uma relação intrínseca entre $\rho_k(H)$ e $D(G)$, onde G é o grupo de classes de ideais de H . Isso faz de $\rho_k(H)$ e de $D(G)$ dois dos objetos mais importantes para descrever a não-unicidade de fatorações em H . Nessa palestra, vamos introduzir a relação entre teoria da fatoração, focado em não-unicidade, e os problemas de soma-zero. Vamos apresentar os principais resultados e conjecturas sobre $\rho_k(H)$.

O autor foi parcialmente financiado pela FAPEMIG APQ-02546-21 e APQ-01712-23.

Referências

- [1] A. Geroldinger. *Sets of lengths*. Amer. Math. Monthly 123, 960–988, 2016.
- [2] A. Geroldinger and F. Halter-Koch. *Non-Unique Factorizations: Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory*, vol 278 of Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [3] A. Geroldinger and I.Z. Ruzsa. *Combinatorial Number Theory and Additive Group Theory*, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Birkhäuser, 2009.

¹Universidade Federal de Ouro Preto,
savio.ribas@ufop.edu.br

- [4] W.A. Schmid. *Some Recent Results and Open Problems on Sets of Lengths of Krull Monoids with Finite Class Group*. In: Chapman, S., Fontana, M., Geroldinger, A., Olberding, B. (eds) *Multiplicative Ideal Theory and Factorization Theory*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 170. Springer, 2016.

Tempo de primeira passagem por uma barreira variável

Telles Timóteo da Silva¹

Resumo: Considere uma partícula se movendo segundo um movimento Browniano unidimensional W_t , iniciado da origem, tal que $\mathbb{E}[W_t] = 0$ e $\mathbb{E}[W_t^2] = t$. Seja $c(t)$ uma curva C^1 com valores em $(0, \infty)$. Seja $\tau_{W,c} = \inf\{t > 0 : W_t \geq c(t)\}$ a variável aleatória (RV) que indica o tempo de primeira passagem (FPT) de W_t através de $c(t)$. Se $f(t)$ é a função densidade de probabilidade de $\tau_{W,c}$, então ela satisfaz a equação integral de Volterra [3]

$$\Psi\left(\frac{c(t)}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^t \Psi\left(\frac{c(t) - c(s)}{\sqrt{t-s}}\right) f(s) ds, \quad t > 0,$$

onde $\Psi(x) = \int_x^\infty \phi(z) dz$ e $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Quando $c(t) = at + b$, $b > 0$, a solução pode ser obtida explicitamente [1]: $f(t) = \frac{b}{t^{3/2}} \phi\left(\frac{at+b}{\sqrt{t}}\right)$. Em particular, se $a = 0$, $\tau_{W,c}$ segue uma distribuição de Lévy.

O valor médio de $\tau_{W,c}$ é infinito se a barreira for $c(t) = at + b$ com $a \geq 0$. Esta dificuldade pode ser contornada, mas para isso precisamos alterar a distribuição do processo. Um tipo de alteração é introduzir reinícios [2]. Considere o caso em que o contorno é $c_1(t) = x_0$ (barreira estática). Evans & Majumdar descobriram que reiniciar a difusão a uma taxa β leva a um valor finito para a média do FPT (MFPT), dada por

$$\mathbb{E}[\tau_{W,x_0,\beta}] = \frac{e^{x_0\sqrt{2\beta}} - 1}{\beta}.$$

Além disso, a MFPT pode ser minimizada com respeito a β e seu valor ótimo é $\beta^* \approx 1.2698/x_0^2$.

Neste trabalho modificamos o esquema introduzido por Evans & Majumdar e permitimos que a barreira se alterne segundo duas curvas, $c_1(t) = x_0$ e $c_2(t) = at + b$, tal que o processo se desenvolve da seguinte forma:

Passo 1: A partícula inicia a partir da origem e se difunde até que ou alcance a barreira $c_1(t) = x_0$ ou reinicie a partir da origem (vá para o Passo 2);

Passo 2: Se ela reinicia, então recomeça a difusão até alcançar a barreira $c_2(t - T) = a(t - T) + b$ (aqui T é o tempo do último reinício) ou reiniciar a partir da origem (vá para o Passo 3);

Passo 3: Se ela reinicia, retornamos ao Passo 1;

Passo 4: O processo se repete até que partícula ultrapasse a barreira variável.

A Figura 1(a) mostra um exemplo de caminho amostral para este processo.

¹Departamento de Estatística, Física e Matemática - Universidade Federal de São João del Rei (UFSJ), Ouro Branco - MG
timoteo@ufsj.edu.br

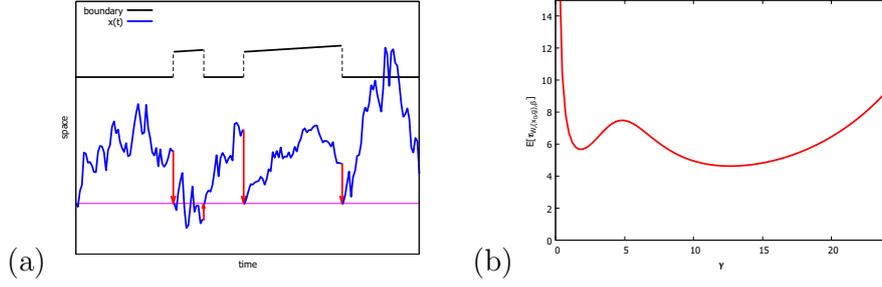


Figura 1: Na parte (a), o processo $X(t)$ é uma difusão entre os reinícios indicados pelas setas vermelhas. A barreira se alterna entre duas curvas. Está ilustrada a primeira passagem de $X(t)$ pelo contorno c_1 ; passagens de outras ordens também estão ilustradas. Parte (b) corresponde à MFPT com respeito a γ , no caso em que $x_0 = 1$, $a = 10$, $b = 0.2$.

Teorema 1 *Seja W_t um movimento Browniano uni-dimensional padrão com $W_0 = 0$. Seja τ_i uma seqüência de RV independentes e identicamente distribuídas, distribuídas exponencialmente com taxa β , independentes de W_t . Escreva $T_j = \sum_{i=1}^j \tau_i$. Fixe $x_0, b > 0$ e $g(t) = at + b$, onde $a \in \mathbb{R}$. Defina o processo X_t como $X_t = W_t - W_{T_j}$, if $t \in [T_j, T_{j+1})$. Para $n \geq 0$, considere os conjuntos $S_{2n} = \{t > 0 : X_t \geq x_0, t \in [T_{2n}, T_{2n+1})\}$, $S_{2n+1} = \{t > 0 : X_t \geq g(t - T_{2n+1}), t \in [T_{2n+1}, T_{2n+2})\}$ e $S = \cup S_n$. Então a RV $\tau_{W, (x_0, g), \beta} = \inf S$ tem média finita dada por*

$$\mathbb{E}[\tau_{W, (x_0, g), \beta}] = \frac{\left(e^{x_0 \sqrt{2\beta}} - 1\right) \left[2e^{b(a + \sqrt{2\beta + a^2})} - 1\right]}{\beta \left[e^{x_0 \sqrt{2\beta}} + e^{b(a + \sqrt{2\beta + a^2})} - 1\right]}. \quad (1)$$

A prova envolve uma dedução probabilística da equação integral para a probabilidade de sobrevivência $S(t) = \mathbb{P}(\tau_{W, (x_0, g), \beta} > t)$, a qual é então solucionada no espaço da transformada de Laplace. Uma consequência marcante da expressão (1) é que $\mathbb{E}[\tau_{W, (x_0, g), \beta}]$ apresenta múltiplos extremos. Na Fig. 1(b), é exibido um exemplo da variação de $\mathbb{E}[\tau_{W, (x_0, g), \beta}]$ com respeito a $\gamma = x_0 \sqrt{2\beta}$.

Palavras-chave: Movimento Browniano, Tempo de Primeira Passagem, Reinício.

Agradecimentos: O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMIG, sob os processos RED-00133-21 e APQ 01987-22.

Referências

- [1] J. L. Doob. Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems, *Ann. Math. Stat.*, **20** (3): pp. 393–403, 1949.
- [2] M. R. Evans & S. N. Majumdar. Diffusion with Stochastic Resetting, *Physical Review Letters*, **106**: pp. 160601, 2011.
- [3] G. Peskir. On integral equations arising in the first-passage problem for Brownian motion, *J. Integral Equations and Appl.*, **14**(4): pp. 397–423, 2002.

Apresentações de pôsteres

Sistemas de equações diferenciais não lineares no plano

Ana Carolina Nicodemos da Silva¹

Patrícia Tempesta²

Resumo: As equações diferenciais ordinárias (EDOs) são equações que envolvem uma função com uma incógnita e suas derivadas, elas são extremamente úteis para modelar fenômenos envolvendo taxas de variações, por esse motivo elas aparecem nos mais diversos ramos da ciência. Durante muitos anos, o estudo das equações diferenciais ordinárias esteve voltado para a busca de soluções explícitas pra essas equações. Entretanto este tipo de abordagem se tornou inviável uma vez que muitas das soluções possuem expressões complicadas ou nem mesmo podem ser expressas por meio de funções elementares. Henry Poincaré, no final do século XIX, propôs uma abordagem diferente para o problema. Essa abordagem propõe compreender o comportamento das soluções dos sistemas de equações de um ponto de vista geométrico, sem a necessidade de se calcular, explicitamente, as soluções dos mesmos. Assim se deu origem ao que conhecemos hoje como Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Nesta apresentação, serão discutidos e analisados alguns resultados teóricos importantes que abordam o comportamento geométrico das soluções de sistemas de equações diferenciais não lineares no plano, com foco na análise próxima aos pontos de equilíbrio e na relação com sistemas linearizados. Por meio do estudo dos retratos de fase e da classificação topológica das soluções com base nos autovalores de matrizes hiperbólicas, explora-se como as técnicas de linearização podem ser utilizadas para descrever o comportamento dessas soluções.

Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
- [2] BRAUN, M. **Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics**. 4. ed. New York: Springer, 1993.
- [3] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. Academic Press, 2012.

¹Aluna de Matemática(Licenciatura), Universidade Federal de São João del Rei, carolinanicodemos12@aluno.ufsj.edu.br

²Professora orientadora, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del Rei, tempesta@ufsj.edu.br

- [4] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

T -ideal da $UT_2(F)$

Ana Cristina Porto Silveira ¹Lorena Mara Costa Oliveira ²

Resumo: Este trabalho consiste no estudo das PI-álgebras, ou seja, álgebras que satisfazem identidades polinomiais não nulas. Denotamos por $\text{Id}(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de uma PI-álgebra A . Seja $UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre um corpo F de característica zero. O objetivo principal é mostrar que o conjunto das identidades polinomiais da $UT_2(F)$ é gerado, como T -ideal, por $[x_1, x_2][x_3, x_4]$, ou seja, $\text{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Referências

- [1] J. N. Malcev *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices.* Algebra i Logika 10 (1971).
- [2] R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria.* Impa, Vol. 1 (2021).

¹Aluna de Bacharelado em Matemática, Universidade Federal de São João del Rei - MG, acristinaps94@aluno.ufsj.edu.br

²Professora orientadora, Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT - UFSJ), lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Teoria da Informação no Estudo de Sequências de DNA

Bianca Lapa Ribeiro¹
Anderson José de Oliveira²

Resumo: A modelagem matemática do código genético possibilita a análise, a interpretação e a caracterização de propriedades associadas aos aminoácidos e possíveis interferências em diversas situações, como o caso das mutações genéticas. O código genético consiste na associação das trincas encontradas no RNA mensageiro, formadas pelas bases nitrogenadas adenina, citosina, guanina, timina/uracila e os aminoácidos que estão nas proteínas. As trincas de bases nitrogenadas são denominadas códon, sendo que cada codifica um aminoácido específico da proteína. [1].

A entropia da informação auxilia a identificar padrões, tanto dentro de uma sequência genética específica, quanto entre diferentes sequências genéticas, uma vez que, conhecida a entropia, é possível gerar métodos para que uma mensagem chegue ao destino com confiabilidade [2] e [3]. Nesse sentido, é possível aplicar esse conceito desde a base de informação, o DNA, até a síntese completa de uma proteína, conforme [2]. Na Teoria da Informação, a entropia é obtida em relação a uma sequência, um modelo e a distribuição de probabilidades fornecida pelo modelo, sendo utilizadas as Cadeias de Markov [4]. O valor da entropia é obtido por meio de cálculos sobre a distribuição de probabilidades dada pela aplicação do modelo à sequência. Desse modo, os estimadores de entropia auxiliam em aplicações biológicas, como detecção de íntron/éxon e comparação genômica. A metodologia adotada neste trabalho baseia-se em uma natureza qualitativa e quantitativa, por meio da realização de uma revisão de literatura sobre elementos de Biologia, Álgebra e Teoria da Informação, além da realização de cálculos para a obtenção da entropia. O objetivo deste trabalho é analisar sequências de DNA a partir de elementos estatísticos, em particular, a entropia.

Foi realizada uma análise da sequência de nucleotídeos no gene humano completo de β -globina, escolhida de maneira aleatória, apresentada em [1], com o propósito de analisar possíveis aplicações da Teoria da Informação em sequências de DNA. A partir dos cálculos efetuados foram obtidas as entropias associadas a dois modelos (M_1 e M_2), comparando e analisando os éxons da sequência, bem como a sequência completa selecionada.

A Tabela 1 apresenta uma comparação dos valores obtidos para as entropias relacionadas aos modelos M_1 e M_2 , para os casos envolvendo os éxons na sequência e a sequência completa. Assim, pode-se observar que os valores estão bem próximos, com destaque para o caso da sequência completa para o modelo M_2 , que apresentou um valor relativamente menor.

¹Discente do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG

bianca.ribeiro@sou.unifal-mg.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

	Modelo M_1	Modelo M_2
Éxons da sequência de nucleotídeos no gene humano completo de β -globina	1,9827	1,8759
Sequência de nucleotídeos no gene humano completo de β -globina	1,9707	1,1831

Tabela 1: Comparação entre os modelos utilizados no cálculo da entropia.

Sendo assim, foi possível observar que tanto para os éxons, quanto para a sequência completa, a escolha do modelo interfere diretamente na estimativa da entropia da mensagem. A entropia da mensagem obtida utilizando M_2 foi menor que a entropia da mesma mensagem utilizando M_1 para ambos os casos. O conhecimento da mensagem possibilita a escolha de um modelo mais adequado e com isso se reduz significativamente sua estimativa da entropia.

Outro ponto importante a ser analisado é sobre a classificação do modelo e neste estudo o modelo pode ser classificado como adaptativo, pois há um modelo inicial presente tanto no transmissor quanto no receptor e à medida que o código é transmitido, o modelo também se ajusta, acarretando em custos para sua manutenção. Com isso, a transmissão ocorre símbolo por símbolo, permitindo que tanto o transmissor quanto o receptor atualizem suas distribuições de probabilidades.

A partir do que apresentado anteriormente, pode-se perceber uma interessante conexão existente entre elementos de Álgebra, Biologia, Engenharia e Teoria da Informação, bem como a possibilidade de aplicações da Teoria da Informação em fenômenos biológicos.

Referências

- [1] R. Nussbaum. *O Genoma Humano: Estrutura e Função dos Genes e Cromossomos*, Thompson e Thompson Genética Médica. Elsevier Brasil, 2008.
- [2] J. O. C. Horta. *Estimadores de entropia para sequências de DNA*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo-USP, São Paulo, 136f, 2001.
- [3] V. M. A. Afreixo. *Análise estatística da linguagem genética*. 2002. 128f. Dissertação de Mestrado. University of Western Sydney, Austrália, 2002.
- [4] F. Nogueira. *Modelagem e Simulação - Cadeias de Markov*. 39f. Notas de aula.

Uma conexão entre álgebra e topologia: o grupo fundamental

Damata, Carlos Eduardo¹
Benedini Riul, Pedro²

Resumo: A topologia é a ciência da continuidade e da deformação de espaços. Sua ideia central é a de que se é possível deformar um espaço no outro e vice-versa, logo estes espaços serão iguais do ponto de vista topológico. Devido a esse fato, a ciência é coloquialmente conhecida como: “a geometria da folha de borracha” (ver [1]).

Esta ciência surgiu na verdade de um problema no campo da Física, o chamado problema dos três corpos, e na esperança de resolvê-lo, Poincaré fundou a topologia, que na época ele chamava de *analysis situs* - a análise da posição. Conforme o século seguia seu curso, Poincaré apresenta os conceitos de homotopia e homologia, a homotopia em especial, é o estudo da deformação de laços em espaços topológicos (ver [5]).

Neste trabalho, o objetivo é estudar o primeiro grupo de homotopia, mais conhecido como grupo fundamental. O grupo fundamental de um espaço topológico é definido pelas classes de equivalência de laços baseados em um determinado ponto de um espaço topológico. A relação de equivalência utilizada é a homotopia de laços: dois laços são homotópicos se um pode ser deformado em outro de maneira contínua. O grupo fundamental capta informações sobre o “formato” de um espaço topológico, medindo, em um certo sentido, a quantidade de “buracos 1-dimensionais” deste espaço.

Uma propriedade interessante do grupo fundamental é que, se dois espaços topológicos possuem grupos fundamentais não isomorfos, estes espaços obrigatoriamente não são homeomorfos, isto é, não é possível deformar continuamente um no outro. Usando este resultado, mostra-se, por exemplo que uma esfera não é homeomorfa ao toro. Por outro lado, espaços topológicos com grupos fundamentais isomorfos podem não ser homeomorfos, como por exemplo, uma esfera e um disco. Dessa forma, o grupo fundamental de um espaço topológico é um invariante do mesmo, mas não é um invariante completo.

O grupo fundamental do círculo unitário é obtido, além de propriedades gerais, como a independência do ponto base em espaços conexos por caminhos e a invariância homotópica do grupo fundamental. Mais ainda, como aplicação é demonstrado o Teorema do Ponto Fixo de Brower para o disco bidimensional.

Para o desenvolvimento do projeto, assume-se prévio conhecimento de conceitos de topologia geral. Para mais detalhes, sugere-se [2], [3] e [4].

¹Aluno de Graduação do Bacharelado em Matemática, Universidade Federal de São João del Rei - MG,
carlosdamata.exatas@aluno.ufsj.edu.br

²Professor orientador, Universidade Federal de São João del-Rei - MG, Departamento de Matemática e Estatística,
benedini@ufsj.edu.br

Referências

- [1] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.
- [2] DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Espaços métricos e introdução à topologia**. Atual, 1982.
- [3] LAGES LIMA, Elon. **Espaços métricos**. Projeto Euclides, Brasília DF, 1977.
- [4] MUNKRES, James R. **Topology: Pearson New International Edition**. Pearson Higher Ed, 2013.
- [5] STEWART, Ian. **Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos**. Zahar, 1991.

Decodificação de Códigos BCH através do Algoritmo de Peterson

Débora Barbosa Souza ¹
Anderson José de Oliveira ²

Resumo: Claude E. Shannon, a partir de sua tese de mestrado *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* (1937), possibilitou o início do desenvolvimento da teoria da informação e a criação de modelos de códigos para detectar e/ou corrigir erros em sistemas de comunicação. Os códigos cíclicos, introduzidos por Eugene Prange em 1957, evoluíram significativamente para lidar com correções de erros aleatórios e em rajada. Ao longo dos anos, diversas classes de códigos cíclicos, como os códigos BCH, foram desenvolvidas. Eles formam uma subclasse dos códigos de bloco linear e são amplamente utilizados em sistemas de comunicação devido à sua eficácia na detecção de erros.

O objetivo deste trabalho é descrever um processo de decodificação de códigos cíclicos BCH, por meio do detalhamento do algoritmo de Peterson, onde será apresentada uma aplicação em um exemplo envolvendo um processo de transmissão de informação, por um canal ruidoso.

Considere um sistema de comunicação que irá projetar um código de bloco linear da forma $C(n, k) = C(7, 4)$, onde n representa o comprimento e k a dimensão do código, para transmitir mensagens através de um canal, onde podem ser introduzidos ruídos. Em seguida, cabe ao destinatário realizar a decodificação, utilizando o algoritmo de Peterson.

Para isso, seja o corpo $GF(2^3)$, gerado pelo polinômio primitivo $p(X) = 1 + X + X^3$, se α é um elemento primitivo de $GF(2^3)$, então α é raiz de $p(X)$, logo $\alpha^3 = 1 + \alpha$. Assim, é possível obter todos os elementos deste corpo.

O polinômio gerador para códigos BCH com capacidade de correção de dois erros é obtido por meio de: $g(X) = MMC\{\phi_1(X), \phi_3(X)\}$. O polinômio mínimo $\phi(X)$ de um elemento β em $GF(2^m)$ é dado por: $\phi(X) = \prod_{i=0}^{e-1} (X + \beta^{2^i})$.

Como $g(X) = MMC\{\phi_1(X), \phi_3(X)\} = (X^3 + X^2 + X + 1)(X^3 + X^2 + X + 1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} g(X) &= X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X^4 + X^3 + X^2 + X + X^3 + X^2 + X + 1 \\ &= X^6 + X^4 + X^2 + 1. \end{aligned}$$

Admita que um vetor transmitido tenha sido corrompido por ruído durante a transmissão, resultando no vetor recebido $r = 1001000$. Logo, o polinômio recebido é da forma $r(X) = 1 + X^3$.

¹Discente do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
debora.souza@sou.unifal-mg.edu.br

²Docente do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

Para o caso binário, somente as síndromes ímpares são utilizadas na decodificação, logo:

$$S_1 = r(\alpha^1) = 1 + \alpha^3 = 1 + 1 + \alpha = \alpha \text{ e } S_3 = r(\alpha^3) = 1 + (\alpha^3)^3 = 1 + \alpha^9 = 1 + \alpha^2 = \alpha^6.$$

Os coeficientes do polinômio localizador de erros em função dos componentes da síndrome para $1 \leq t \leq 2$ são dados por $\sigma_1 = S_1$ e $\sigma_2 = \frac{S_3 + S_1^3}{S_1}$, portanto $\sigma_1 = \alpha$ e $\sigma_2 = \frac{\alpha^6 + \alpha^3}{\alpha} = \frac{1 + \alpha^2 + 1 + \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^4}{\alpha} = \alpha^3$.

Portanto, o polinômio localizador de erros é $\sigma(X) = 1 + \sigma_1 X + \sigma_2 X^2 = 1 + \alpha X + \alpha^3 X^2$.

As raízes de $\sigma(X)$ podem ser encontradas testando-se os valores de $\sigma(\alpha^0)$ até $\sigma(\alpha^6)$, obtendo-se como raízes α^0 e α^4 .

As posições de erros são dadas pelos inversos das raízes do polinômio localizador de erros. Então:

- $\beta_1 = \frac{1}{\alpha^0} = 1 \Rightarrow$ erro na posição X^0 ;
- $\beta_2 = \frac{1}{\alpha^4} = \alpha^{-4} = \alpha^3 \Rightarrow$ erro na posição X^3 .

Logo, o polinômio localizador de erros torna-se: $e(X) = X^0 + X^3 = 1 + X^3 \Rightarrow e = 1001000$. Assim, o vetor transmitido é $v = r + e = 1001000 + 1001000 = 0000000$.

O algoritmo de Peterson mostrou-se uma técnica eficaz para a decodificação de códigos BCH, possibilitando a correção de erros de transmissão, reestabelecendo a mensagem original.

Referências

- [1] GOMES, G. G. R. *Códigos BCH Binários - Notas de Aula*. Santa Rita do Sapucaí, 2011. Instituto Nacional de Telecomunicações - INATEL.
- [2] LIN, S.; COSTELLO JR., D. J. *Error Control Coding*. 2 ed. Prentice Hall, 2004.
- [3] PETERSON, W. W; WELDON, E. J. *Error-correcting codes*. 2 ed. Cambridge, MA: MIT, 1994.
- [4] SANTOS, V. S. MACWILLIAMS, F. J. *The Theory of Error-Correcting Codes*. Amsterdam: North- Holland, 1977.
- [5] SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, v. 27, p. 379-423, 1948.

Anéis Noetherianos e o Teorema da Base de Hilbert

Fidel Eduardo Huayhuas Chipana ¹

Resumo: Neste trabalho, apresentaremos os anéis Noetherianos e demonstraremos o Teorema da Base de Hilbert, que nos revela uma relação entre a geometria e a álgebra. Mais precisamente, tal teorema nos fornece uma correspondência biunívoca entre as variedades afins, que são objetos geométricos, e os radicais de ideais em um anel de polinômios, que é um objeto algébrico.

Referências

- [1] **K. Spindler.** *Abstract Algebra with Applications: Volume 2: Rings and Fields* . CRC Press, 2018.
- [2] **T. W. Hungerford.** *Algebra. Vol. 73.* Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] **M. F. Atiyah.** *Introduction to Commutative Algebra.* CRC Press, 2018.

¹Universidade Federal de Uberlândia
fidematematico@gmail.com

O Quinto Postulado de Euclides: Equivalências, Impasses e o Surgimento das Geometrias Não-Euclidianas

Erich Müller Dutra^{1*}Sérgio Henrique Nogueira^{2*}Alexandre Alvarenga Rocha^{3*}

Resumo: A geometria, uma das áreas mais antigas da matemática, conta com contribuições significativas de muitos autores, dentre os quais se destaca Euclides de Alexandria (300 a.C.). Visando organizar o conhecimento matemático de sua época, Euclides publicou uma coletânea de treze livros conhecida como “Os Elementos”. Ele percebeu que toda afirmação matemática requer justificativa por meio de outras já consideradas verdadeiras, o que poderia resultar em um encadeamento sem fim [4]. Para evitar tal problema, Euclides enunciou afirmações simples chamadas postulados que servem de base para a construção das demais proposições. Seu intuito era apresentar afirmações tão elementares que qualquer pessoa as tomaria como verdade [1]. No primeiro livro de sua obra, que trata sobre geometria plana, Euclides enuncia cinco postulados. O quinto postulado foi alvo de discussão por muitos séculos.

V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado do qual estão os menores do que dois retos. [2]

Diversos matemáticos acreditavam que esse postulado não era necessário, ou seja, que essa afirmação poderia ser derivada dos outros quatro postulados. Atualmente é sabido que o quinto postulado independe dos outros quatro.

Durante as tentativas de se provar que o quinto postulado é derivado dos demais, alguns matemáticos verificaram que existem afirmações que podem substituir o quinto postulado e gerar o mesmo modelo de geometria. Ou seja, com essa substituição é possível provar as mesmas proposições da geometria euclidiana.

O objetivo desse trabalho foi verificar a equivalência de três enunciados. Além disso, investigamos os desdobramentos históricos: as tentativas de demonstração do quinto postulado e a contribuição desses fatos para o surgimento das geometrias não-euclidianas, que são modelos de geometria em que o quinto postulado é negado.

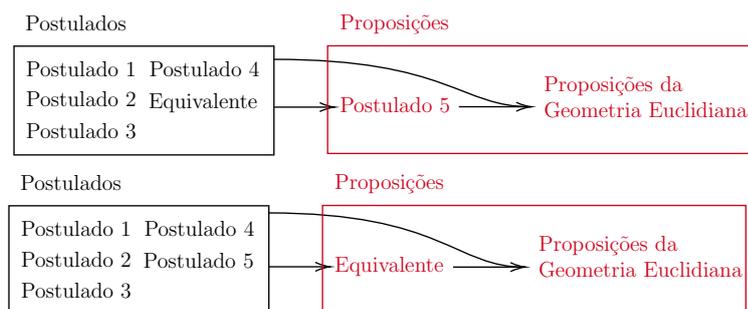
Neste trabalho, para verificar que um enunciado E_n é um equivalente do quinto postulado, mostramos primeiramente que ele deriva dos cinco postulados de Euclides ($V \implies E_n$) e, em seguida, que o enunciado do quinto postulado deriva dos quatro primeiros postulados unidos com esse enunciado equivalente ($E_n \implies V$).

¹Graduando em Licenciatura em Matemática, erich.dutra@ufv.br

²Professor orientador, Instituto de Ciências Exatas, sergio.nogueira@ufv.br

³Professor orientador, Instituto de Ciências Exatas, alexandre.rocha@ufv.br

*Universidade Federal de Viçosa



Neste trabalho foi possível verificar que os seguintes enunciados são equivalentes do quinto postulado.

E_1 Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada.

E_2 A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° .

E_3 Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o último também é reto.

Em certo momento foi necessário acrescentar dois ou outros axiomas, o Axioma de Pasch e o Axioma de Arquimedes. Tais axiomas foram utilizados algumas vezes por Euclides mesmo não tendo sido postulados inicialmente.

Tais equivalentes desempenharam papel fundamental nas tentativas de se provar o quinto postulado e também no surgimento das geometrias não-euclidianas. A maioria das tentativas se deu por redução ao absurdo, portanto negava-se o quinto postulado afim de encontrar uma contradição. Ao negar o quinto postulado era possível observar proposições diferentes da geometria euclidiana, entretanto nenhuma contradição era gerada.

É possível negar o quinto postulado (E_1) de duas formas distintas, cada uma dá origem a um modelo de geometria diferente.

- (Axioma Hiperbólico) Por um ponto fora de uma reta pode se traçar ao menos duas retas paralelas à reta dada.
- (Axioma Elíptico) Quaisquer duas retas sempre se intersectam.

Admitindo o axioma hiperbólico ao invés do quinto postulado, foi possível concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

Referências

- [1] Barbosa, J. L. M. *Geometria hiperbólica*
- [2] Euclides. *Os elementos*; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: UNESP, 2009.
- [3] Sachs, Linya. *O quinto postulado de Euclides*. v. 1, n. 1, p. 11-29, 2016.
- [4] Wolfe, H. E. *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Indiana University - The Dryden Press, New York, 1945.

Alguns problemas sobre grafos: as pontes de Königsberg e um entregador eficiente

Giovana da Mata Nunes¹

Wilker Thiago Resende Fernandes²

Resumo: A Teoria dos Grafos surgiu através da necessidade de resolver o famoso problema das pontes de Königsberg (atualmente Kaliningrado, Rússia), onde haviam sete pontes que cruzavam o Rio Pregel, estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio. O problema das pontes consiste na seguinte pergunta: seria possível fazer um “passeio” pela cidade cruzando cada uma das sete pontes exatamente uma vez? O famoso Matemático Leonard Euler publicou um artigo, em 1736, demonstrando a resposta desse problema e, a partir dessa resposta, surgiram diversos outros problemas e resultados da Teoria dos Grafos. Um desses problemas é o seguinte: um entregador precisa entregar produtos em cinco cidades que estão conectadas por uma rede de sete estradas. Ele pretende passar por cada cidade exatamente uma vez terminando na cidade na qual começou. É possível que o entregador passe por cada cidade exatamente uma vez e termine a viagem na cidade que ele começou? Assim, vamos introduzir o conceito de grafo, apresentar alguns de seus principais resultados e exibir a solução dos problemas das pontes de Königsberg e do entregador.

Referências

- [1] JURKIEWICZ, S. **Programa de iniciação científica da OBMEP 2007**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [2] LOVÁSZ, L., PELIKÁN, J., VESZTERGOMBI, K. **Matemática discreta**. 1. ed. New York: Springer, 2003.
- [3] SHIELDS, I., SAVAGE, C. D. A note on Hamilton cycles in Kneser graphs. *Bulletin of the Institute for Combinatorics and Its Applications*, **40**, pp. 13–22, 2004.

¹Discente do curso de Matemática - Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, giiunnes@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, wilker@ufs.edu.br

Aplicativos Educacionais Relacionados à Matemática Financeira Diagrama de Caso de Uso de uma Calculadora Financeira

Jomara Sergio Pereira¹

Alexandre Celestino Leite Almeida²

Sérgio de Oliveira³

Resumo:

Vivendo no mundo cada vez mais digital, os recursos tecnológicos se tornaram ferramentas indispensáveis para grande parte das pessoas, principalmente para os jovens, que muitas das vezes, passam horas do dia utilizando suas funcionalidades. Segundo Medeiros (2021, p.6), “a geração de estudantes nascida nesse milênio e que está dentro das escolas, nunca experimentou viver sem tecnologia. Eles não sabem o que é um mundo sem internet, sem computadores, sem *smartphones*, sem *tablets*, entre outros. ”

As pessoas estão cada vez mais interligadas às tecnologias digitais. Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, apontam que, no ano de 2023, 87,6% da população brasileira acima de 10 anos de idade possuíam telefone móvel para uso pessoal (NERY, 2024).

Devido à naturalidade dos jovens quanto ao uso das tecnologias digitais, podemos considerá-las como uma importante ferramenta de apoio para o ensino, principalmente quando esse pensamento está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular quando diz que “o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens” (BRASIL, 2018).

Nesse sentido, por meio da análise de uma atividade desenvolvida na aplicação de uma sequência didática sobre matemática e educação financeira – que é parte do projeto de pesquisa do meu trabalho de conclusão de curso do Mestrado em Matemática (Profmat) -, foi possível identificar alguns anseios dos estudantes quanto ao que um aplicativo educacional relacionado à Matemática Financeira e ao planejamento financeiro precisaria ter para que fosse colaborativo com o ensino.

Contudo, o presente estudo objetivou sugerir propostas para o desenvolvimento de aplicativos educacionais que atendessem à distintas necessidades educacionais e financeiras dos estudantes e, principalmente, que estivessem de acordo com as necessidades que foram explicitadas pelos alunos durante as aulas da sequência didática. Assim, apresentamos diferentes propostas de aplicativos, tais como: Calculadora Financeira; Aplicativo de Orçamento e Planejamento Financeiro; Simulador de Investimentos e um Assistente Virtual Financeiro.

No nosso entendimento, o desenvolvimento de uma calculadora financeira é uma proposta que acreditamos se destacar em relação às demais pois, pode apresentar um impacto direto no

¹ Aluna de Mestrado do PROFMAT, Turma 2022, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), jomarasergio@yahoo.com.br

² Professor Orientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, celestino@ufs.edu.br

³ Professor Coorientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, sergiool@ufs.edu.br

aprendizado de Matemática Financeira. Esta ferramenta não só atenderia às necessidades dos alunos, como também complementaria o conteúdo que eles já estão aprendendo em sala de aula, permitindo que praticassem em tempo real os conceitos de juros, descontos e outros cálculos financeiros essenciais. Ela seria um aplicativo multifuncional, projetado para realizar uma série de operações financeiras com foco em simplicidade, interatividade e explicações didáticas. Além de gráficos ilustrativos, simulações personalizadas e funcionalidade offline.

Conclui-se, portanto, que a apresentação de um Diagrama de Caso de Uso, como proposta para um futuro desenvolvimento da calculadora financeira, destaca a aplicabilidade do software como importante ferramenta educacional auxiliadora no aprendizado dos conteúdos relacionados à Matemática Financeira.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Documento oficial. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_ELEF_110518_versaofinal_site.pdf.

MEDEIROS, A. de P. S. *Aplicativos de ensino: uma breve discussão do uso na matemática*. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021. Centro de Ciências Exatas e da Natureza.

NERY, C. *Em 2023, 88,0% das pessoas com 10 anos ou mais utilizaram Internet* — Agência de Notícias. Agência IBGE Notícias, 2024. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/41026-em-2023-87-2-das-pessoas-com-10-anos-ou-mais-utilizaram-internet>.

Modelagem Matemática para Análise da Influência da Vacinação no Combate à Dengue na Cidade de Divinópolis - MG

Julia Azevedo Gomes ¹

Erasmio Tales Fonseca²

Resumo: A dengue é uma doença que faz parte do grupo das arboviroses transmitidas pela fêmea do mosquito *Aedes aegypti*, existindo atualmente quatro sorotipos em circulação (DENV-1, DENV-2, DENV-3, DENV-4). Esta doença possui caráter sazonal, com maior incidência no verão, devido às altas temperaturas e índice de pluviosidade elevado, o que favorece o aumento da densidade vetorial. Os sintomas causados pela infecção são febre alta, cefaléia, prostração, dor retro-orbitária, mialgia, artralgia, além de sintomas respiratórios, como tosse, rinite e garganta inflamada, sendo comum, também, o aparecimento de manchas vermelhas pelo corpo no terceiro ou quarto dia da doença, com duração entre 24 a 72 horas. Em quadros de agravo da doença, manifesta-se febre alta, fenômenos hemorrágicos e insuficiência circulatória.

No Brasil, foram registradas epidemias de dengue nos anos de 1916 e 1923, em São Paulo e no Rio de Janeiro, respectivamente. Em 1955 o vetor foi erradicado no Brasil, e em outros países do continente americano, por meio de uma campanha que tinha como principal objetivo conter os casos de Febre Amarela e também, impedir a circulação do vírus da dengue. Entretanto, o mosquito voltou a ser encontrado no Brasil e, desde então, a principal forma de contenção dos casos de dengue tem sido o combate ao vetor. Contudo, diante do aumento do número de casos da doença, fez-se necessário o desenvolvimento de estudos voltados para a produção de uma vacina que oferecesse proteção completa contra casos graves e hospitalizações por dengue. Nessa perspectiva, a vacina desenvolvida pelo laboratório Takeda Pharma mostrou bom desempenho e eficácia contra todos os sorotipos da doença, tendo sua aplicação liberada em 2024 para uma parcela da população.

Uma vez que o desenvolvimento da vacina é muito recente, não existem modelos matemáticos para representar o comportamento da doença mediante a aplicação das duas doses recomendadas. Em vista disso, este trabalho tem como escopo propor um modelo matemático que simule o impacto da vacinação na incidência do número de contágios pela dengue na cidade de Divinópolis – MG. Para tal, tomaremos como base o modelo proposto por Barelli, Bigardi e Minatogau (2023), dado que não iremos considerar a possibilidade de reinfecção pela dengue, uma vez que não dispomos, na literatura, de informações sobre como ela se comporta após a vacinação e também, por não existir uma relação direta entre a vacinação e o número de vetores da doença.

¹Aluna de Graduação, Universidade do Estado de Minas Gerais - UEMG/Unidade Divinópolis, juliaazevedogomes18@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Ciências Exatas, UEMG/Divinópolis erasmio.fonseca@uemg.br

Posto isso, propomos o modelo matemático abaixo para simular os impactos da vacinação no número de casos de dengue na cidade de Divinópolis – MG.

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{P}S(t)I(t) - (\eta - \mu_s)S(t) - \alpha S(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\beta}{P}S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu_i I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + \alpha S(t) \quad (3)$$

Neste modelo, temos: P é a representação da população total da região analisada; S é o número de pessoas suscetíveis; I é o número de pessoas infectadas; R é o número de pessoas recuperadas; β : o coeficiente de transmissão; γ : a taxa de recuperação dos indivíduos infectados; η : a taxa de nascimento de indivíduos suscetíveis; μ_s : a taxa de mortalidade dos indivíduos suscetíveis; μ_i : a taxa de mortalidade dos indivíduos infectados; α : é a taxa de indivíduos vacinados.

Com o intuito de entender o comportamento da doença, após a aplicação da vacina, iremos realizar algumas simulações numéricas, estimando parâmetros do modelo a partir de dados sobre a dengue disponibilizados pela Secretaria Municipal de Saúde da cidade de Divinópolis – MG. Os resultados numéricos obtidos servirão como uma estimativa que poderão prever os impactos da vacinação a curto e longo prazo.

Referências

- [1] BARELLI, Vitor E. G.; BIGARDI, Tiago M.; MINATOGAU, Felipe S. Aplicação do modelo SIR com dinâmica vital no estudo da transmissão da dengue no município de Campinas-SP. **Biomatemática**, Campinas, v. 33, n. 1, p. 115-130, 2023.
- [2] BRASIL. Ministério da Saúde. Fundação Nacional de Saúde. Departamento de Operações. Coordenação de Controle de Doenças Transmissíveis por Vetores. **Manual de Dengue: Vigilância Epidemiológica e Atenção ao Doente**. Brasília, 2 ed. 1996.
- [3] TEIXEIRA, Maria da Glória; BARRETO, Maurício Lima. Porque Devemos, de Novo, Erradicar o *Aedes Aegypti*. **Ciência Saúde Coletiva**, [S.L.], v. 1, n. 1, p. 122-136, 1996. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/csc/a/ttnD3XcCNqF8z6H9yDz6FhG/>. Acesso em 12 de agosto de 2024.
- [4] TRABULSI, L.R.; ALTHERTUM, F. **Microbiologia**. Atheneu, São Paulo, 6 ed. 2015.

Métodos de Diferenças Finitas para Equações Diferenciais Parciais: Um Estudo Comparativo entre Métodos Explícito e Implícito

Kaleb de Jesus Silva e Souza ¹

Franco Bassi Rocha ²

José Paulo Carvalho dos Santos ³

Resumo: Os métodos de diferenças finitas são ferramentas importantes na análise e simulação de fenômenos físicos, como a difusão de calor, descrita por uma equação diferencial parcial [1, 2]. A estabilidade e a precisão são aspectos essenciais nesses métodos, pois permitem que as simulações reproduzam com precisão o comportamento dos sistemas estudados.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise comparativa entre os métodos de diferenças finitas explícito e implícito aplicados à equação do calor, expressa por $u_t = au_{xx}$, onde u representa a temperatura em função do tempo t e da posição x , a é o coeficiente de difusão térmica, u_t é a derivada parcial de u em relação ao tempo, e u_{xx} é a derivada parcial de u em relação à posição, indicando como a temperatura varia ao longo do espaço.

No método explícito, aproximamos as derivadas espaciais e temporais pela diferença $U_{i,j+1} = U_{i,j} + \sigma(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j})$, onde $\sigma = \frac{ak}{h^2}$. Nesse contexto, h representa o passo espacial, ou seja, a distância entre pontos adjacentes na malha espacial; k indica o passo temporal, ou o intervalo de tempo entre iterações na simulação; e σ , como parâmetro de estabilidade, em que relaciona o coeficiente de difusão a com os passos k e h . A estabilidade deste método requer que $\sigma \leq 0.5$, limitando-o ao tamanho do passo [3, 4]. Em contrapartida, o método implícito, que utiliza diferenças centradas e regressivas, resulta em um sistema linear tridiagonal $-\sigma U_{i-1,j} + (1+2\sigma)U_{i,j} - \sigma U_{i+1,j} = U_{i,j-1}$, onde σ mantém o mesmo valor do parâmetro de estabilidade. Este método é incondicionalmente estável, permitindo passos de tempo maiores sem comprometer a precisão [3, 4].

Simulações realizadas em Python demonstraram que o método explícito é eficiente para pequenos passos de tempo, mas pode se tornar instável quando os valores de σ são maiores. Com os parâmetros iniciais definidos como $h = 0,25$ e $k = 0,025$, o valor de σ resultante foi 0,04, que atende à condição de estabilidade do método explícito. No entanto, ao aumentar k para 0,1, σ subiu para 1,6, levando à instabilidade. Em contraste, o método implícito permaneceu estável em todas as configurações testadas, revelando-se mais eficiente nas simulações, porém com um custo computacional maior.

¹Aluno de Graduação, Universidade Federal de Alfenas, kaleb.souza@sou.unifal-mg.edu.br

²Professor Orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, franco.rocha@unifal-mg.edu.br

³Professor Orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, jose.santos@unifal-mg.edu.br

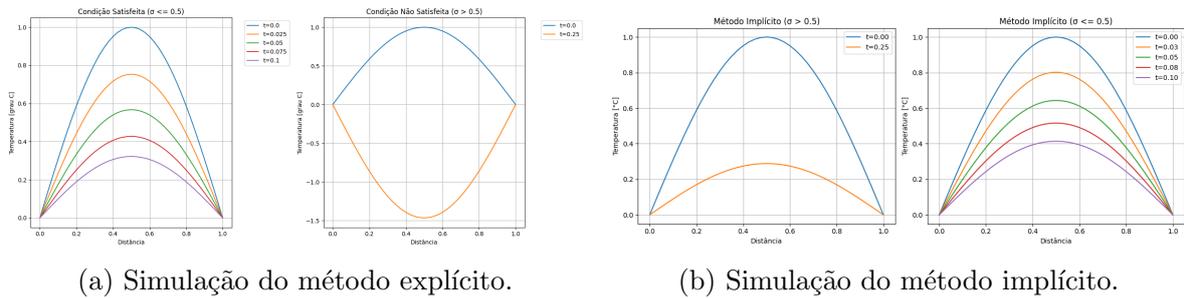


Figura 1: Comparação dos métodos explícito e implícito para a equação do calor.

Esses resultados reforçam a escolha do método implícito para simulações de longa duração ou cenários onde a precisão temporal é considerada.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio concedido para a realização do trabalho, conforme o Edital N^o 13/2023 da PRPPG.

Referências

- [1] NACHBIN, A.; TABAK, E. Introdução à modelagem matemática e computação científica. In: Anais do XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1997. [S.l.: s.n.], 1997. p. [páginas].
- [2] VILLATE, J. E. Equações diferenciais e equações de diferença. Cidade do Porto: [s.n.], 2001. Disponível em: <http://www.villate.org/pt/books.html>. Acesso em: [29/07/2024].
- [3] CUMINATO, J. A.; JUNIOR, M. M. Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas. Colégio Brasileiro de Matemática Aplicada. São Paulo: SBM, 2013.
- [4] SERRANHO, P. Matemática Aplicada e Análise Numérica: Uma Introdução com Octave. Secção de Matemática, Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta, 2017.

Estatística e Ciência de Dados nas Olimpíadas 2024: Uma Abordagem em Python e R

Larissa Castro Silva ¹

Daniela Carine Ramires de Oliveira²

Resumo: A análise de dados esportivos tem se tornado uma área de crescente relevância devido aos avanços nas tecnologias de coleta, armazenamento e processamento de informações. Eventos esportivos de grande porte, como as Olimpíadas, geram uma vasta quantidade de dados, abrangendo desde estatísticas de desempenho de atletas até métricas relacionadas à infraestrutura e organização. Tais eventos proporcionam uma oportunidade singular para a aplicação de técnicas avançadas de estatística e ciência de dados, capazes de fornecer insights profundos e embasar a tomada de decisões em diversas esferas.

Nas Olimpíadas de 2024, o volume de dados gerados foi ainda maior, dado o uso intensivo de tecnologias como rastreamento, sensores, inteligência artificial e internet das coisas (IoT). Esse ambiente dinâmico e repleto de dados cria um cenário ideal para a exploração de técnicas estatísticas e de ciência de dados, que podem ser aplicadas para entender padrões de desempenho, prever resultados, avaliar a eficácia de treinamentos e estratégias, além de auxiliar na detecção de tendências emergentes no esporte.

Nesse contexto, o presente trabalho realizou uma análise aprofundada dos dados gerados durante as Olimpíadas de 2024, utilizando as ferramentas oferecidas pelos softwares Python e R. Ambas as linguagens são amplamente reconhecidas no campo da estatística e ciência de dados devido à sua flexibilidade, poder de processamento e vasta biblioteca de pacotes, que facilitam desde análises exploratórias até modelagens preditivas complexas. Python, com sua capacidade de lidar com grandes volumes de dados e integrar algoritmos de aprendizado de máquina, e R, com suas ferramentas robustas para análise estatística e visualização de dados, formaram uma combinação poderosa para a exploração de dados esportivos.

Mais especificamente, utilizando os softwares Python e R e os dados obtidos da plataforma Kaggle, apresentamos a distribuição de medalhas por país e continente (ouro, prata e bronze) por meio de gráficos de barras/pizza para a visualização das medalhas distribuídas; analisamos a relação entre o PIB e o desempenho no quadro de medalhas por meio da regressão linear simples, testes de significância dos coeficientes do modelo (valor-p) e coeficiente de determinação (R^2) para avaliar a força da associação; a relação entre o tamanho das delegações e a quantidade de medalhas, por meio do coeficiente de correlação de Pearson; além de verificar o desempenho e a participação de países emergentes ou menos desenvolvidos, utilizando a análise descritiva (médias, medianas e desvios-padrão).

¹Aluna do Bacharelado em Matemática, Universidade Federal de São João del Rei, lacasi.682@aluno.ufsj.edu.br

²Professora orientadora, Departamento de Matemática e Estatística, daniela@ufsj.edu.br

Referências

- [1] D. C. Montgomery. *Design and Analysis of Experiments*, 8th edition. Wiley, 2012.
- [2] G. James, D. Witten, T. Hastie e R. Tibshirani. *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R*, 1st edition. Springer, 2013.
- [3] H. Wickham e G. Grolemund. *R para Data Science*, 1a. edição. Alta Books: 2019.
- [4] J. A. Rice. *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 3rd Edition. Cengage Learning, 2010.
- [5] W. McKinney. *Python para análise de dados: tratamento com Pandas, NumPy e IPython*, 3a. edição. Novatec, 2023.

Análise de Estabilidade de uma Classe de Sistemas Não Lineares usando Lugar das Raízes e Resposta em Frequência

Luis Eduardo de Magella Mattos Tavares¹

Ronilson Rocha²

Josué Geraldo Damasceno³

Resumo:

A análise de estabilidade usando métodos baseados no Lugar das Raízes e Resposta em Frequência consiste em uma ferramenta interessante para o estudo analítico do comportamento dinâmico de um sistemas com realimentação composto por um filtro passa-baixa associado a um elemento não linear, uma vez que permite determinar a posição de algumas bifurcações, estimar amplitude e frequência de sinais, e identificar áreas no espaço de parâmetros onde possam ocorrer pontos fixos, órbitas periódicas, comportamento caótico, instabilidades e multi-estabilidade com oscilações escondidas.

A linearização de um sistema com realimentação $F_i(s)$ composto por um filtro passa-baixa associado a um elemento não linear em torno de um ponto de equilíbrio P_i resulta em

$$F_i(s) = \frac{m_i G(s)}{1 + m_i G(s)}, \quad (1)$$

onde $G(s)$ é a função de transferência do filtro passa-baixa e m_i é a aproximação linear do elemento não linear $u(x)$ em torno do ponto de equilíbrio P_i . A estabilidade local dos pontos de equilíbrio P_i é avaliada a partir dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado, os quais podem ser mapeados em função de m_i no plano complexo como as raízes de $1 + m_i G(s)$ usando o método do lugar das raízes. A análise da estabilidade local permite verificar características e padrões de trajetórias no espaço de estados e avaliar topologias de atratores [1, 2].

Uma vez que um filtro passa-baixa $G(s)$ atenua harmônicas de ordem superior produzidas pelo elemento não linear $u(x)$ quando excitado por um sinal senoidal, a harmônica fundamental é a única componente representativa neste sistema não linear. Neste contexto, o elemento não linear $u(x)$ pode ser aproximado por um ganho variável $N(X)$ conhecido como função descritiva, e a resposta em frequência $G(j\omega)$ do filtro passa-baixa pode ser representada graficamente pelo gráfico polar no plano complexo chamado diagrama de Nyquist. Uma vez que um sistema é instável quando a equação característica $1 + N(X)G(j\omega) = 0$ é satisfeita, o critério da estabilidade de Nyquist estendido a um sistema com realimentação não linear estabelece que existe um ponto de equilíbrio estável na origem somente se a diferença entre o número de contornos nos sentidos anti-horário e horário do diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ com a frequência variando de $\omega = -\infty$

¹Universidade Federal de Ouro Preto - EM - PROPEM, luis.tavares@aluno.ufop.edu.br

²Universidade Federal de Ouro Preto - EM - DEMEC/PROPEM, rocha@ufop.edu.br

³Universidade Federal de Ouro Preto - ICEB - DEMAT, josue@ufop.edu.br

a $\omega = +\infty$ em volta do lugar geométrico de $-1/N(X)$ com a amplitude variando de $X = 0$ até $X = \infty$ é igual ao número de polos de $G(s)$ com parte real positiva. Se o lugar geométrico de $-1/N(X)$ intercepta o diagrama de Nyquist $G(j\omega)$, o sistema não linear tem um ciclo limite cuja estabilidade é avaliada segundo o critério de Loeb. De outra forma, o sistema com realimentação não linear é instável. A análise da estabilidade usando o método da resposta em frequência baseado em funções descritivas permite prever a existência e estabilidade de ciclos limites e oscilações escondidas [1, 3, 4].

A análise de estabilidade usando os métodos baseados em lugar das raízes e funções descritivas tem sido aplicada com sucesso no estudo do Circuito de Chua, um sistema não linear que apresenta um conjunto grande e diverso de fenômenos, proporcionando interessantes insights e revelando informações relevantes a respeito de seu comportamento dinâmico que até então eram desconhecidas [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Referências

- [1] K. Ogata. *Modern control engineering*, Prentice-Hall Inc., 1970.
- [2] A. Vaněček, S. Čelikovský. Chaos synthesis via root locus. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, **41**: 59–60, 1994.
- [3] J.J.E. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall Inc., 1991.
- [4] R. Rocha, R.O. Medrano-T.. Finding hidden oscillations in the operation of nonlinear electronic circuits. *Electron. Lett.*, **52** (12): 1010–1011, 2016.
- [5] R.O. Medrano-T, R. Rocha. The negative side of Chua’s circuit parameter space: Stability analysis, period-adding, basin of attraction metamorphoses, and experimental investigation. *Int. J. Bif. Chaos*, **24** (9): 1430025, 2014.
- [6] R. Rocha, R.O. Medrano-T.. Stability analysis and mapping of multiple dynamics of Chua’s circuit in full four-parameter spaces. *Int. J. Bif. Chaos*, **25** (13): 1530037, 2015.
- [7] R. Rocha, J. Ruthiramoorthy, T. Kathamuthu. Memristive oscillator based on Chua’s circuit: stability analysis and hidden dynamics. *Nonlinear Dyn.*, **88**: 2577–2587, 2017.
- [8] R. Rocha, R.O. Medrano-T.. Stability analysis for the Chua circuit with cubic polynomial nonlinearity based on root locus technique and describing function method. *Nonlinear Dyn.*, **102**: 2859–2874, 2020.
- [9] R. Rocha, R.O. Medrano-T.. Chua circuit based on the exponential characteristics of semiconductor devices. *Chaos Soliton Frac.*, **156**: 111761, 2022.
- [10] R. Rocha, R.O. Medrano-T.. Stability analysis of the Chua’s circuit with generic odd nonlinearity. *Chaos Soliton Frac.*, **176**: 114112, 2023.

Explorando a Dinâmica do *Shift* no Espaço de Sequências Binárias

Maria Cláudia Sousa Resende ¹
Wilker Thiago Resende Fernandes ²

Resumo: Neste trabalho apresentamos resultados sobre a dinâmica do *shift* no espaço de sequências binárias, um exemplo clássico de sistema dinâmico discreto em um conjunto não enumerável. O *shift* é uma transformação definida por $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ onde $f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, ou seja, f “apaga” a primeira coordenada x_0 e desloca as demais para a esquerda. Analisamos propriedades fundamentais, como pontos periódicos, órbitas densas, comportamento topologicamente *mixing* e a manifestação de caos neste sistema. Os resultados mostram que embora de definição simples, o *shift* revela uma complexidade dinâmica significativa e sua análise contribui para a compreensão dinâmica de outros sistemas discretos, servindo de base para a investigação de fenômenos mais complexos na teoria dos sistemas dinâmicos.

Palavras-chave: *Shift*, sistemas dinâmicos discretos, caos.

Referências

- [1] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. Springer-Verlag, 1996.
- [2] BACKES, L.; BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M. **Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
- [3] DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Westview Press, 2003.

¹Aluna de Graduação em Matemática, Universidade Federal de São João del-Rei, mccsousaresende@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística, wilker@ufsj.edu.br

Introdução a Teoria de Álgebras com ênfase a Grupos Solúveis e Grupos Nilpotentes

Maria Luiza de Lima Costa ¹
Dra. Lorena Mara Costa Oliveira²

Resumo: Este trabalho tem como objetivo central apresentar alguns resultados sobre grupos solúveis e grupos nilpotentes. Na primeira parte do projeto contém os pré-requisitos necessários para compreender estes resultados, tais como: definição de grupo; Teorema de Lagrange; Teorema de Cauchy; p-grupos; definição de centro de um grupo e suas relações com p-grupos; subgrupo comutador; grupos simétricos.

Em seguida veremos sobre os grupos solúveis, sua definição, caracterização de grupos solúveis e relações entre a solubilidade e a ordem de um grupo.

Por fim, mostraremos o que define um grupo ser nilpotente, sua relação com as séries centrais superiores e inferiores e alguns teoremas relacionados.

Referências

- [1] MELO, C. H. CUNHA. Sobre uma classe especial de grupos nilpotentes, Monografia de Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.
- [2] ASSIS, E. HELENA. Sobre grupos solúveis finitos, Monografia de Especialização de Curso, Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.
- [3] MILIES, C. POLCINO. Grupos Nilpotentes: Uma introdução, IME-USP, 2003.

¹Aluno de graduação, Universidade Federal de São João Del Rei, marialuizadelimacosta@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João Del Rei, lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Um estudo sobre a geometria diferencial de curvas através do contato e da \mathcal{R} -equivalência

Mariza Aparecida Teixeira¹

Pedro Beneditini Riul²

Resumo: A geometria diferencial de certo modo é um ramo “novo” na matemática, tendo seus pioneiros vividos no século XVII. Alguns grandes nomes desse início são Isaac Newton e Christiaan Huygens. Newton foi o primeiro a fazer o estudo da curvatura de curvas com a ajuda do cálculo diferencial e integral e Huygens introduziu o estudo de evolutas e involutas.

Já a Teoria de Singularidades é um estudo mais recente ainda, em meados das décadas 50 e 60 Hassler Whitney e René Thom começaram seus estudos e lançaram a pedra fundamental da teoria como a conhecemos hoje. A teoria de singularidades é aplicada em várias áreas da matemática e da física, inclusive dentro da geometria diferencial. Algumas de suas contribuições podem ser vistas e estudadas em [1].

O objetivo é apresentar uma contribuição da Teoria de Singularidades na geometria diferencial de curvas em \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Isso é feito através do estudo do contato dessas curvas com “objetos padrão”. Tais objetos são homogêneos, no sentido de que, localmente, eles são iguais em todos os seus pontos. No caso de curvas em \mathbb{R}^2 estudaremos o contato com retas e círculos e no caso de curvas em \mathbb{R}^3 com planos e esferas.

Para tal investigação, além da geometria diferencial clássica de curvas (como o estudo de sua curvatura e torção), utilizamos a \mathcal{R} -equivalência de funções reais: uma relação de equivalência no conjunto de funções reais que é capaz de detectar o tipo de singularidade de uma função. Dessa forma, as singularidades das funções altura e distância ao quadrado nos dirão a respeito do contato das curvas com os objetos padrão, como desejado.

Nesse trabalho iremos omitir as definições prévias da geometria diferencial clássica, porém todas podem ser encontradas em [2].

Referências

- [1] Bruce, James William, and Peter John Giblin. *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. Cambridge university press, 1992.
- [2] Tenenblat, Keti. Introdução à geometria diferencial. Editora Blucher, 2008. Tenenblat, Keti. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blucher, 2008.

¹Aluna de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de São João del Rei, mariza.aparecida.102@aluno.ufsj.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del Rei, benedini@ufsj.edu.br

Pensamento Computacional e BNCC: Abordagens Inovadoras para a Resolução de Problemas Matemáticos.

Patrick Corrêa dos Santos ¹

Resumo:

Este estudo investiga a implementação do Pensamento Computacional no Ensino Médio, em conformidade com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017. O Pensamento Computacional é uma abordagem lógica e sistemática voltada para a resolução de problemas e a formulação de algoritmos, integrando competências essenciais como abstração, identificação de padrões e criação de soluções eficazes. O objetivo geral deste trabalho é promover o desenvolvimento do Pensamento Computacional como uma habilidade fundamental no currículo escolar atual, considerando sua relevância para a formação de alunos críticos e preparados para enfrentar desafios contemporâneos. Para alcançar esse objetivo, foram delineados quatro objetivos específicos: (a) investigar os conhecimentos, competências e habilidades teóricas relacionadas ao ensino do Pensamento Computacional, conforme a BNCC; (b) realizar uma revisão bibliográfica sobre os conceitos-chave do Pensamento Computacional; (c) avaliar livros didáticos de Matemática do Ensino Médio para mapear como os conceitos de Pensamento Computacional são abordados; e (d) desenvolver uma sequência didática que integre o Pensamento Computacional aos conteúdos do ensino médio, promovendo uma prática pedagógica mais eficaz e engajadora. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, envolvendo revisão da literatura, análise da BNCC e do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), além da investigação de materiais didáticos disponíveis. Resultados parciais indicam que, apesar do reconhecimento da importância do Pensamento Computacional pela BNCC, existem lacunas significativas na sua implementação prática, evidenciando a necessidade urgente de formação contínua para professores e do desenvolvimento de materiais didáticos de qualidade. Este trabalho conclui destacando a relevância de pesquisas futuras que explorem a eficácia de sequências didáticas e investiguem as percepções de alunos e educadores sobre a aplicação do Pensamento Computacional em diversos contextos educacionais.

Palavras-chave: Pensamento Computacional ; BNCC ; Resolução de Problemas; Educação Matemática.

¹Aluno do PROFMAT/SBM, Universidade Federal de Lavas - UFLA, patrick.santos@estudante.ufla.br

Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base*. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.
- [2] BRASIL. Resolução CNE/CEB nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Disponível em: https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/view/CNE_RES_CNECEBN32018.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.
- [3] GRAVE, L. A. S. O pensamento computacional na prática: uma experiência usando Python em sala de aula de matemática básica. 2021, 64 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Santa Maria - RS, Santa Maria - RS, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/21866/DIS_PPGMRN_2021_GRAVE_LEOMIR.pdf?sequence=1. Acesso em: 22 out. 2024.
- [4] DA SILVA, F.; GEROMEL, R. C. Uma análise de questões de Matemática em exames de admissão para o ensino superior sob a perspectiva do pensamento computacional. *EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 13, n. 3, p. 1-27, 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/254678>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [5] SELBY, C.; WOOLLARD, J. *Computational thinking: the developing definition*, 2013 apud ANDRÉ, Cláudio F. O pensamento computacional como estratégia de aprendizagem, autoria digital e construção da cidadania. *TECCOGS - Revista Digital de Tecnologias Cognitivas*, n. 18, jul./dez. 2018, p. 94-109. Disponível em: https://www.pucsp.br/pos/tidd/teccogs/artigos/2018/edicao_18/teccogs18_artigo05.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.

Machine Learning para a Classificação de Funções de Proteínas Descritas em Grafos Acíclicos Diretos

Pedro Paulo Miranda Afonso¹

Angela Moreno²

Resumo: Proteínas ligam-se com outras moléculas para desempenhar atividades essenciais no organismo. Por conseguinte, prever as funções de uma proteína no organismo é essencial para compreender doenças, evolução, e a própria vida a nível molecular [1]. Prever a função de uma proteína pode contribuir para a cura de doenças, tanto humanas quanto animais, e pode gerar benefícios em áreas como a medicina e a agricultura. Todavia, o processo de se classificar uma proteína em laboratório é dispendioso e vagaroso, além de que proteínas são descobertas mais rapidamente do que classificadas. Além disso, devido as mais diversas circunstâncias e características, algumas proteínas sequer podem ser classificadas em laboratório [2].

Este trabalho apresenta um algoritmo capaz de classificar funções de proteínas descritas em grafos acíclicos diretos usando aprendizado de máquina. O intuito é auxiliar profissionais a definirem quais proteínas devem ser experimentadas de forma prioritária em laboratórios. Também poderá servir como estimativa precisa para proteínas ainda não experimentadas ou impossível de serem experimentadas em laboratórios.

As macromoléculas classificadas neste trabalho foram cedidas pela plataforma Kaggle [2]. Elas foram anotadas por profissionais seguindo os conceitos da *Gene Ontology Consortium* (GO). As proteínas são divididas em 3 aspectos: Função Molecular (*Molecular Function*, MFO), Componente Celular (*Cellular Component*, CCO) e Processo Biológico (*Biological Process*, BPO).

Uma função molecular se refere a funções realizadas em nível molecular, em geral por genes individuais, dadas algumas exceções. Enquanto o Componente Celular é referente a estruturas e compartimento celulares ocupados pelas proteínas. Processo biológico em geral se refere a funções realizadas por várias funções moleculares. Para compreender melhor cada um destes aspectos, apresenta-se a seguir o que ocorre com a hemoglobina: uma das funções moleculares da hemoglobina é se ligar as moléculas de oxigênio; cujo componente celular é o citosol das hemácias; tem como um de seus processos biológicos realizar o transporte de oxigênio.

É possível pensar na base de dados deste projeto como um grafo acíclico direto, que parte da proteína para seus três principais nós, correspondentes aos 3 aspectos da GO, e então para os demais. Cada nó subsequente ao primeiro corresponde a uma classe, e cada ligação exemplifica a relação da proteína com suas classificações. Por exemplo, a proteína é parte do citosol das hemácias, no qual parte pode ser considerado uma ligação.

¹Aluno do Bacharelado em Ciência da Computação, Universidade Federal de Alfenas, pedro.miranda@sou.unifal-mg.edu.br

²Professora orientadora, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas angela.moreno@unifal-mg.edu.br

Por consequência destas características e relações entre as proteínas e suas funções, o problema deste trabalho, tem uma alta dimensionalidade.

A base de dados contém 142.246 Proteínas anotadas por especialistas em mais de 20.000 funções. Em virtude da alta dimensionalidade do problema, o número de funções no qual as proteínas foram classificadas foram reduzidas para 1.850, conforme sua significância e recorrência na base dados. Este passo foi necessário para tornar o algoritmo computável. Foram utilizados 3 modelos durante este trabalho. Uma regressão linear denominada *Ridge*, uma rede neural direta e um *Multi Layer Perceptron MLP*. Cada um dos modelos realizou um *self-ensemble* por treinar com diferentes sementes de randomicidade. O treinamento foi realizado pelo método *K-fold*, através de uma validação cruzada com K pastas, com $K = 5$, mutuamente excludentes. O conjunto é dividido em aproximadamente 20% para teste e 80% para treino. A iteração é realizada 5 vezes, de modo que cada proteína é utilizada uma vez para teste e 4 vezes para treino. Ao fim, foi realizado um ensemble gerado pela média entre as previsões dos 3 modelos selecionados. Esta técnica é utilizada para gerar robustez ao modelo.

Os modelos propostos alcançaram individualmente acurácias entre 91,8% e 93,9%, o ensemble final entre eles alcançou 94,2%. A principal métrica do modelo foi, porém, o F1w. O F1w é derivado do F1-Score, e corresponde a média aritmética do F1-Score de cada uma dos 3 aspectos da GO. O F1-Score combina precisão e *recall* em uma média harmônica, útil para dados desbalanceados. O F1-MFO alcançou 62,2%, o F1-BPO 41,7% e o F1-CCO 59,6%, conseqüentemente, o F1w é 51,1%.

Quando comparado a outros estudos que utilizaram CNNs para a predição de proteínas, o modelo se destaca por sua alta acurácia em comparação com seu custo computacional de treinamento. Esses resultados sugerem que o ensemble proposto é uma ferramenta promissora para guiar profissionais em experimentações para confirmar as funções de proteínas, atingindo os benefícios já discutidos e auxiliando futuros modelos em seus treinamentos. Trabalhos futuros podem treinar o modelo em ambientes com maior capacidade computacional e refiná-lo. Também é possível integrar modelos ao *Ensemble* como o *Blast*. Proteínas anotadas futuramente também podem aprimorar o modelo.

Referências

- [1] Y. J. Jang, Q. Q. Qin, S. Y. Huang, et al. *Accurate prediction of protein function using statistics-informed graph networks*. Nature Communications, vol. 15, 6601, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41467-024-50955-0>
- [2] Kaggle. *CAFA-5 Protein Function Prediction Competition*. Available at: <https://www.kaggle.com/competitions/cafa-5-protein-function-prediction>. Accessed on: Oct 30, 2024.
- [3] GENE ONTOLOGY CONSORTIUM. *Ontology documentation*. Available at: <https://geneontology.org/docs/ontology-documentation/>. Accessed on: Aug 15, 2024.

A xícara de café dos matemáticos

Rafael de Castro Andretto ¹

Pedro Benedini Riul ²

Resumo: É um senso comum que matemáticos são máquinas que transformam café em teoremas. Consequentemente, é natural esperar que suas xícaras de café sejam objetos de estudo. Considere a seguinte situação: um(a) matemático(a) com baixa quantidade de cafeína no sangue pega sua xícara de café (ou de chá, caso seja excêntrico(a)). Deixando que a luz incida dentro da xícara ele/ela observa o desenho formado pelos raios de luz refletidos pela lateral da xícara e que acumulam no seu fundo (ver Figura 1). O desenho observado é uma curva cáustica. O termo “cáustica” se refere à curva ou superfície envelope (ou envoltória) de raios de luz refletidos ou refratados. Se observarmos, por exemplo uma taça cheia de água, os desenhos formados pelos raios de luz que a atravessam e se acumulam são cáusticas formadas por raios de luz que são refratados pela água e pelo vidro ao incidirem em sua superfície.



Figura 1: Curva formada por raios de luz refletidos no fundo de uma xícara.

O objetivo desta pesquisa é mostrar que a cáustica formada no fundo da xícara é uma curva bastante conhecida: a epicloide, uma curva cíclica definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre outra.

Essa investigação será feita de duas maneiras. A primeira delas é encontrar a curva envelope [2] (ou envoltória) de uma família de retas, a saber os raios de luz refletidos pela lateral da xícara em seu fundo. O segundo método utiliza as parábolas osculadoras [3]. Sabemos que raios de luz que incidem em uma parábola, paralelos ao seu eixo de simetria, acumulam-se em seu foco. Logo, a parábola cujo eixo de simetria é paralelo aos raios de luz incidentes na xícara e que melhor se encaixa em uma seção transversal circular da

¹Aluno de licenciatura em Matemática, Universidade Federal de São João del-Rei, rafaelvilaandretto2003@aluno.ufsj.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística - Universidade Federal de São João del-Rei, benedini@ufsj.edu.br

mesma terá grande contato com essa seção, e será chamada de parábola osculadora. Seu foco será o ponto de maior acúmulo de raios refletidos, ou seja, a cáustica procurada (ver [1]).

Referências

- [1] B. J. Loe, N. Beagley. The coffee cup caustic for calculus students. *The College Mathematics Journal* **28**, (4): 277-284, 1997.
- [2] J. W. Bruce, P. Giblin. *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. Cambridge university press, 1992.
- [3] Z. Har'el. Curvature of curves and surfaces a parabolic approach. *Department of Mathematics, Technion-Israel Institute of Technology*, 1995.

Grupos Fuchsianos Associados a uma Curva Algébrica de Quinto Grau e Possíveis Aplicações

Rafael Ferreira Cardoso,¹ Anderson José de Oliveira,² Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz³

Resumo: A análise complexa e a geometria hiperbólica constituem duas importantes linhas de estudo para os sistemas de comunicação atualmente. O objetivo deste trabalho é propor uma nova forma de obter e interpretar os grupos fuchsianos [2] associados à curva algébrica $y^2 = z^5 \pm 1$, que pode ser descrita por uma EDO [4]. A pesquisa em nível de mestrado, constitui-se, principalmente, pela identificação dos grupos por meio de uma revisão sistemática de conteúdos prévios, necessários para a compreensão da Conjectura de Whittaker, analisando possíveis alterações nos cálculos e/ou novas abordagens algébricas a serem utilizadas, diferente das abordagens numéricas já apresentadas na literatura. Como resultados, espera-se obter os grupos fuchsianos e a representação de seus elementos na forma de radicais.

Definição 1 *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tais que $ad - bc > 0$, e a função:*

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (1)$$

Transformações de \mathbb{H} (modelo hiperbólico do semiplano superior) desta forma são chamadas de transformações de Möbius.

Definição 2 *Um grupo fuchsiano é um subgrupo discreto das transformações de Möbius de \mathbb{H} , $Möb(\mathbb{H})$.*

Uma das abordagens utilizadas no estudo e na análise de sistemas de comunicação faz uso das chamadas curvas algébricas, que estão associadas de alguma forma a tesselações. Curvas algébricas são definidas por polinômios e seu grau está diretamente associado ao gênero da superfície a ser tesselada. Pode-se ainda entender estas curvas como um conjunto de pontos e, assumindo as raízes de um polinômio, obtém-se as singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, cujos coeficientes tem relação com essa curva. Na literatura analisada, essas raízes, complexas e reais, têm seus coeficientes aproximados por números decimais. A ideia de representá-las na forma de radicais é apresentar as raízes quadradas irracionais sem aproximações, a fim de entender o padrão de formação com o grau da curva.

Em [3], é apresentada uma descrição inicial desses conceitos prévios necessários para o entendimento da teoria, tendo como objetivo principal identificar as raízes de curvas

¹Mestrando em Estatística Aplicada e Biometria, Universidade Federal de Alfenas, rafael.cardoso@sou.unifal-mg.edu.

²Docente orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br.

³Docente coordenadora, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, catia.quilles@unifal-mg.edu.br.

algébricas, com o auxílio de seqüências de Farey. Com relação aos resultados obtidos em [3], os autores apresentam as singularidades de três equações diferenciais fuchsianas específicas, relacionadas às curvas algébricas, as quais representam os coeficientes de maior ordem das equações. As curvas mencionadas são: $z^2 - z$, $z^3 - z$ e $z^5 + 1$, com grau 2, 3 e 5, respectivamente.

Definição 3 *Uma equação diferencial ordinária (EDO) fuchsiana, de segunda ordem, com n singularidades, é da forma:*

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0, \quad (2)$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções meromorfas em um domínio $S \subset \mathbb{C}$.

Exemplo 1 *Seja a curva algébrica $y^2 = z^5 - 1$, associada a uma EDO do tipo hipergeométrica, que pode ser reescrita como um produto de suas raízes z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 .*

$$y^2 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5). \quad (3)$$

Com o intuito de obter a parametrização por radicais, é necessário a utilização de novas abordagens, atentando-se para onde ocorrem as aproximações numéricas nos trabalhos citados e buscando alternativas. Por exemplo, na etapa 1 dos trabalhos analisados, são utilizadas raízes complexas aproximadas para as curvas em análise. É o caso de $p_1(z) = z^5 - 1$, cuja raiz $e^{\frac{2\pi}{5}}$ é adotada por [1] como $z_1 = 0.309017 + 0.9510565i$ ao invés de $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Portanto, com este trabalho almeja-se contribuir para as bases teóricas e práticas associadas a canais de comunicação, por meio da caracterização da $y^2 = z^5 \pm 1$, que já tem os grupos fuchsianos associados a ela obtidos pela Conjectura de Whittaker. Neste trabalho, busca-se a representação dos elementos desse grupo em formato de radicais, ao invés do uso de aproximações numéricas, para as raízes das curvas algébricas, por exemplo. Com isso, espera-se que a pesquisa desenvolvida contribua para uma nova caracterização algébrica dos grupos fuchsianos e possíveis aplicações em sistemas de comunicação.

Referências

- [1] E. P. D. O. Guazzi, R. Palazzo Jr. Influência da Alocação de Pólos Associados a Curvas Algébricas com $g=1$ na Determinação de Grupos Fuchsianos. Em: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, 2018.
- [2] S. Katok. *Fuchsian groups*. Chicago: University of Chicago Press, 1992.
- [3] A. J. Oliveira, R. Palazzo Jr. Uniformização de Curvas Algébricas Planares via EDOs Fuchsianas no Estudo de Sistemas de Comunicação. Em: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, 2018.
- [4] D. G. Zill, M. R. Cullen. *Equações diferenciais*. Londres: Pearson Education, 2001.

Empregando *embeddings* para a classificação de arritmias cardíacas

Reginaldo José da Silva¹

Angela Leite Moreno²

Resumo: Arritmias cardíacas são distúrbios no ritmo dos batimentos, que podem se manifestar de diversas formas, desde alterações leves e assintomáticas até condições graves, como fibrilação atrial e taquicardia ventricular, que elevam o risco de complicações como insuficiência cardíaca, acidentes vasculares e até morte súbita. A detecção precoce e precisa das arritmias é crucial para o tratamento, mas a interpretação manual de eletrocardiogramas (ECG) pode ser demorada e sujeita a erros [1].

Diante dessa necessidade, a detecção automática de arritmias têm ganhado relevância, com destaque para o uso de aprendizado de máquina (*Machine Learning*, ML), que permite identificar padrões complexos em dados de ECG de forma rápida e precisa. Algoritmos de ML podem aprimorar o diagnóstico, reduzindo o tempo de resposta e aumentando a precisão na identificação de arritmias [2].

Este estudo utiliza o conjunto de dados de arritmias MIT-BIH [3], um dos mais adotados em pesquisas sobre arritmias. O conjunto é composto por gravações de ECG com 30 minutos de duração, amostradas a 360 Hz de 47 indivíduos distintos.

O processamento dos sinais ECG seguiu uma sequência de etapas que começa com a extração da derivação MLII. Em seguida, aplicou-se um filtro *notch*, responsável por eliminar interferências de 60 Hz provenientes da rede elétrica, garantindo um sinal mais limpo para análise. Para padronizar o sinal, foi utilizado o *z-score* ($z = \frac{x-\mu}{\sigma}$), em que μ é a média e σ o desvio padrão do sinal. Essa padronização é fundamental para que os dados estejam em uma escala uniforme, facilitando a aplicação dos algoritmos de aprendizado de máquina. A etapa seguinte envolveu a detecção dos picos R, executada pelo algoritmo XQRS da biblioteca WFDB. O pico R representa o momento de máxima despolarização dos ventrículos, sendo fundamental para avaliar o ritmo cardíaco. A partir dos picos R detectados, o sinal completo de 30 minutos foi segmentado em batimentos individuais, cada um delimitado em janelas de 300 pontos, abrangendo 100 pontos antes e 200 após cada pico R, formando assim a base para a classificação.

As 16 classes originais foram agrupadas em cinco categorias, conforme as diretrizes da *Association for the Advancement of Medical Instrumentation* (AAMI) EC57. Para minimizar o desbalanceamento dos dados, o problema foi dividido em dois subproblemas. No primeiro, as amostras foram classificadas como normais ou anormais, com as arritmias (SVEB: batimento ectópico supraventricular, VEB: batimento ectópico ventricular,

¹Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, FEIS/UNESP, reginaldo.silva@unesp.br

²Universidade Federal de Alfenas, UNIFAL-MG, angela.moreno@unifal-mg.edu.br

F: batimento de fusão, e Q: batimento desconhecido) agrupadas como “anormais”. No segundo subproblema, classificaram-se apenas essas quatro classes de arritmia, minimizando a influência dos dados normais.

Os sinais segmentados foram então processados por uma rede neural convolucional (CNN), que extraiu os *embeddings*. Esses *embeddings* mapeiam as características do sinal para um *manifold* de maior ou menor dimensão, organizando as características em um espaço que facilita a identificação e a distinção de padrões relevantes. Por fim, o algoritmo *Random Forest* foi aplicado para classificar as arritmias com base nos dados processados.

Os resultados deste estudo, apresentados na Tabela 1, mostram um desempenho superior em relação à literatura, com alta acurácia, sensibilidade e especificidade na classificação binária, superando os métodos baseados tanto no domínio da frequência, como os *Mel Frequency Cepstral Coefficients* (MFCC) e os *Linear Frequency Cepstral Coefficients* (LFCC), quanto no domínio do tempo. Na classificação multiclasse, a abordagem também obteve excelentes resultados, demonstrando sua eficácia na identificação de diferentes tipos de arritmia.

Tabela 1: Comparativo do resultados com a literatura.

Autor	Domínio	Tipo	ACC	<i>Se</i>	<i>Sp</i>	<i>Pr</i>	F_1	AUC
Este	Tempo	Binário	0,9864	0,8581	0,9983	0,9794	0,9147	0,9956
Estudo	Tempo	Multiclasse	0,9770	0,9770	0,9923	0,9770	0,9770	0,9975
		MFCC	Binário	0,9830	0,8285	0,9947	–	–
[4]	Tempo	Multiclasse	0,9635	0,9433	0,9858	–	–	0,9947
		LFCC	Binário	0,9569	0,8404	0,9940	–	–
[5]	Tempo	Multiclasse	0,9569	0,9426	0,9834	–	–	0,9832
		Multiclasse	0,9900	0,9400	0,9900	–	–	0,9975

ACC: Acurácia, *Se*: Sensibilidade, *Sp*: Especificidade, *Pr*: Precisão, F_1 : F_1 Score

Referências

- 1 Karunathilake, S. P.; Ganegoda, G. U. Secondary Prevention of Cardiovascular Diseases and Application of Technology for Early Diagnosis. *BioMed Research International*, v. 2018, p. 5767864, 2018.
- 2 Acharya, U. R. et al. Automated detection of arrhythmias using different intervals of tachycardia ecg segments with convolutional neural network. *Information Sciences*, v. 405, p. 81–90, 2017.
- 3 Moody, G. B.; Mark, R. G. The impact of the MIT-BIH Arrhythmia Database. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, v. 20, n. 3, p. 45–50, 2001.
- 4 Silva, R. J. et al. Comparação entre técnicas de extração de características para a classificação de arritmias cardíacas. In: Even3 (Ed.). *Anais do VIII ERMAC Regional 9 - Ilha Solteira*. Ilha Solteira: [s.n.], 2024.
- 5 Ahmed, A. A. et al. Classifying Cardiac Arrhythmia from ECG Signal Using 1D CNN Deep Learning Model. *Mathematics*, v. 11, n. 3, 2023.

Identidades Polinomiais da Álgebra de Grassmann

Vanessa Coelho dos Santos¹Lorena Mara Costa Oliveira²

Resumo:

Uma álgebra A é uma PI-álgebra se existe um polinômio f não nulo que satisfaz $f(a) = 0$, para todo $a \in A$. Nesse caso o polinômio f é chamado de identidade polinomial de A . Neste trabalho nós vamos nos ater à álgebra de Grassmann, definida como o quociente $\mathcal{G} = F\langle X \rangle / I$, onde $I = \langle x_i x_j + x_j x_i \rangle$ é um ideal da álgebra livre $F\langle X \rangle$ em F de característica zero. É natural representar esta álgebra da seguinte forma: $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é mostrar que $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para a álgebra \mathcal{G} e que $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

Palavras-chave: Identidade Polinomial, PI-álgebra, Álgebra de Grassmann, T-ideal.

Referências

- [1] SANTOS, R. B. dos; VIEIRA, A. C. PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.
- [2] KRAKOWSKI, D.; REGEV, A. The polynomial identities of the Grassmann algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 181, p. 429-438, 1973.

¹Aluno de Graduação em Matemática, Universidade Federal de São João del-Rei, vanessasantoscoelho6@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística, lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Os problemas do centro-foco e da isocronicidade para sistemas de EDOs simétricos

Wilker Thiago Resende Fernandes ¹

Resumo: No final do Século XIX e início do Século XX, as ideias de Henri Poincaré revolucionaram o estudo das equações diferenciais, focando no comportamento qualitativo das soluções da equação ao invés de seu cálculo explícito. Apesar dos mais de 120 anos de história, existem diversos problemas que estão em aberto desde aquela época. Um desses problemas está relacionado à caracterização da existência de centros e centros isócronos, conhecidos como *problema do centro-foco* e *problema da isocronicidade*.

Lembramos que um ponto singular para um sistema de equações diferenciais,

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

é chamado de *centro* quando todas as soluções do sistema, em sua vizinhança, são curvas fechadas, chamadas de soluções periódicas ou órbitas periódicas. Além disso, um centro é dito ser *isócrono* quando todas as soluções periódicas em sua vizinhança possuem o mesmo período.

Associado à investigação dos problemas do centro-foco e da isocronicidade, está o estudo da existência simultânea de dois ou mais centros para sistemas da forma (1). Nesse estudo, é natural investigar sistemas que possuem simetria. Investigações sobre a existência simultânea de centros em sistemas polinomiais simétricos foram realizadas por muitos autores ao longo dos últimos cem anos, veja por exemplo [1, 2, 3, 4, 5, 6] e as referências dadas neles.

Neste trabalho, apresentamos conceitos e resultados relacionados à investigação da existência simultânea de centros e centros isócronos para sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma (1), onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios de grau três e quatro que possuem diferentes tipos de simetria.

Referências

- [1] DUKARIĆ, M.; FERNANDES, W.; OLIVEIRA, R. Symmetric centers on planar cubic differential systems. *Nonlinear Analysis*, **197** (2020), 111668.
- [2] FERNANDES, W.; OLIVEIRA, R.; ROMANOVSKI, V. G. Isochronicity for a \mathbb{Z}_2 -equivariant quintic system. *J. Math. Anal. Appl.*, **467** (2018), 874–892.

¹Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del-Rei
wilker@ufsj.edu.br

- [3] FERNANDES, W.; VALÉRIO, V. P.; TEMPESTA, P. Isochronicity of bi-centers for symmetric quartic differential systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **27** (2021), 3991–4006.
- [4] GINÉ, J.; LLIBRE, J.; VALLS, C. Simultaneity of centres in \mathbb{Z}_q -equivariant systems. *Proc. R. Soc. A.*, **474** (2018), 20170811.
- [5] LIU, Y. R.; LI, J. B. Complete study on a bi-center problem for the \mathbb{Z}_2 -equivariant cubic vector fields, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **27** (2011), 1379–1394.
- [6] ROMANOVSKI, V. G.; FERNANDES, W.; OLIVEIRA, R. Bi-center problem for some classes of \mathbb{Z}_2 -equivariant systems. *J. Comput. Appl. Math*, **320** (2017), 61–75.
- [7] ROMANOVSKI, V. G.; SHAFER, D. S. *The Center and cyclicity Problems: A computational Algebra Approach*. Boston: Birkhauser, 2009.