

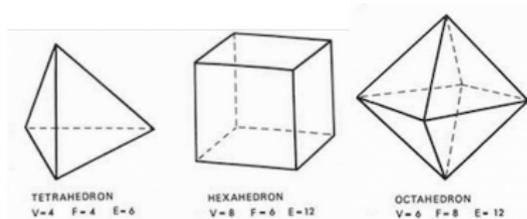
Uma demonstração elementar da “Fórmula de Euler”

Jean-Paul Brasselet / Nguyễn Thị Bích Thủy
CNRS - Universidade Aix-Marseille /
IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto)

V^a Workshop em Matemática e Matemática Aplicada
UFSJ, UFLA
25 Novembro 2020

História 1

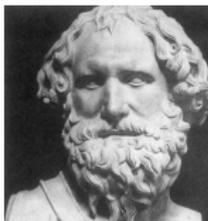
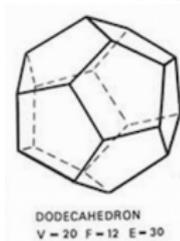
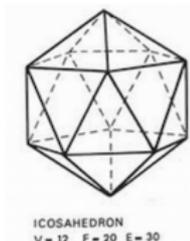
- Pitágoras (~ 570 – 495 av. J.-C.)



- Teeteto de Atenas (~ 415 - 365 av. J.-C.)



– Platão (~ 428 - 348 av. J.-C.)



- Arquimedes (~ 287–212 av. J.-C.)

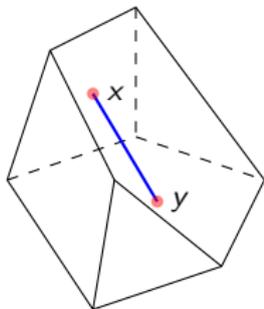


Descartes, 1596-1650.

Teorema (Descartes, *De solidorum elementis*, ~ 1640)

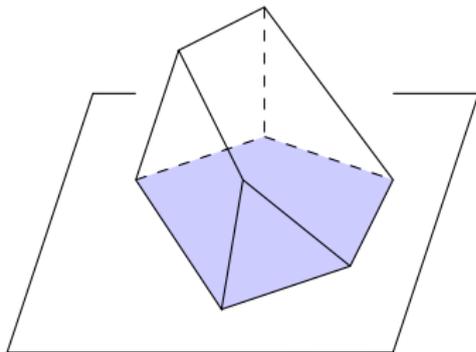
Se tomarmos o ângulo raso como a unidade, então a soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual a duas vezes do número de vértices (V) menos 2, isto é, $2(V - 2)\pi$.

O segmento ligando dois pontos do poliedro está sempre dentro do poliedro



Poliedro convexo

O poliedro está totalmente do mesmo lado do plano contendo qualquer face



História 2

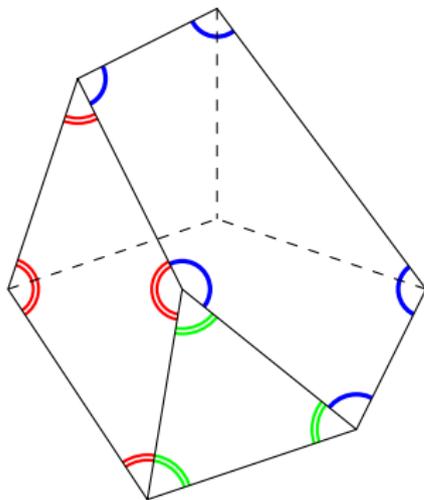
Teorema (Descartes, *De solidorum elementis*, ~ 1640)

Se tomarmos o ângulo raso como a unidade, então a soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual a duas vezes do número de vértices (V) menos 2, isto é, $2(V - 2)\pi$.

Aqui $V = 8$.

A soma dos ângulos
de todas as faces

vale $2(8 - 2)\pi = 12\pi$.



História 3



História 3

- 1640 - Descartes escreveu seu manuscrito, não publicado..
- 1649 - Em Estocolmo, Descartes mora na casa de Pierre Chanut (Embaixador da França em Estocolmo).
- 1650 - Morte de Descartes. –
- 1653 - Chanut envia os manuscritos de Descartes para Paris de barco em um cofre a Claude Clerselier, irmão da Sra Chanut. Chegando em Paris o barco afundou no rio Sena com o cofre. O cofre é recuperado 3 dias depois.
- 1672 - Estadia de Leibnitz em Paris. – Claude Clerselier, confia a Leibnitz os manuscritos de Descartes para publicar as obras de Descartes (não realizado).
- 1676 - Leibnitz retorna a Hanover com o manuscrito. Ele morreu em 1716.

• 1751^{er} - 1753 **Fórmula de Euler. Euler está em Berlim.**

- 1883 - Foucher de Careil, Embaixador da França na Áustria-Hungria, autor de várias obras sobre Descartes e Leibnitz, descobre entre os documentos de Leibnitz o manuscrito de Descartes “sob a poeira antiga que os cobria”.

- 1890 - Note aux CRAS de Ernest de Fauque de Jonquières na qual ele conta a história e afirma que Descartes descobriu a “fórmula de Euler”.



Leibnitz
1646 – 1716

História 4

Teorema (Descartes, *De solidorum elementis*, ~ 1640)

Se tomarmos o ângulo raso como a unidade, então a soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual a duas vezes do número V de vértices menos 2, isto é, $2(V - 2)\pi$.



Descartes (1596 - 1650)



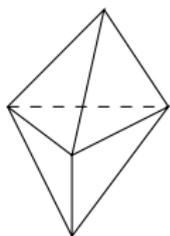
Euler (1707 - 1783)

Fórmula (Euler, 1751 - 1753)

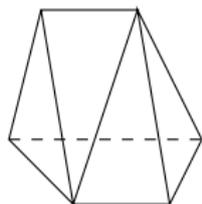
Seja K um poliedro convexo com números V de vértices, A de arestas e F de faces, então temos

$$V - A + F = 2.$$

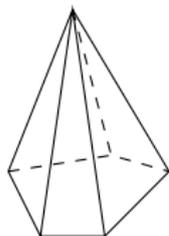
História 4



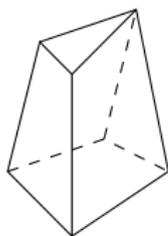
5 vértices



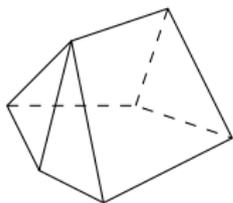
6 vértices



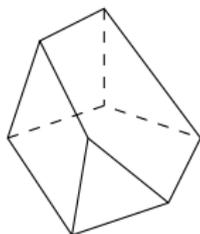
6 vértices



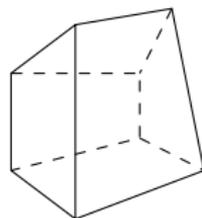
7 vértices



7 vértices



8 vértices



8 vértices

Hexaedros (6 faces) e 5,6,7 ou 8 vértices

Descartes \implies Euler

Teorema (Descartes, *De solidorum elementis*, \sim 1640)

Se tomarmos o ângulo raso como a unidade, então a soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual a duas vezes do número V de vértices menos 2 , isto é, $2(V - 2)\pi$.

Teorema de Descartes \implies Fórmula de Euler

Vamos calcular a soma S dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo de duas maneiras.

Por um lado, o Teorema de Descartes diz que a soma S dos ângulos de todas as faces do poliedro convexo vale $S = 2(V - 2)\pi$.

Descartes \implies Euler

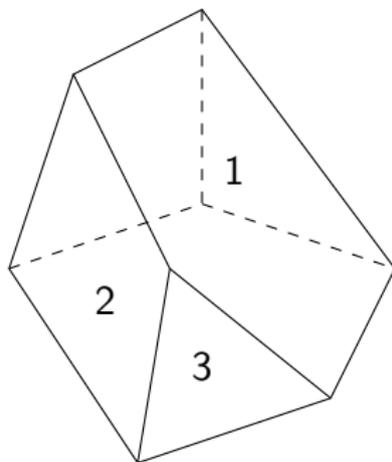
Por outro lado, sejam $i = 1, \dots, F$ as faces do poliedro convexo, seja k_i o número de arestas da face “ i ”.

$$k_1 = 5$$

$$k_2 = 4$$

$$k_3 = 3$$

\dots / \dots

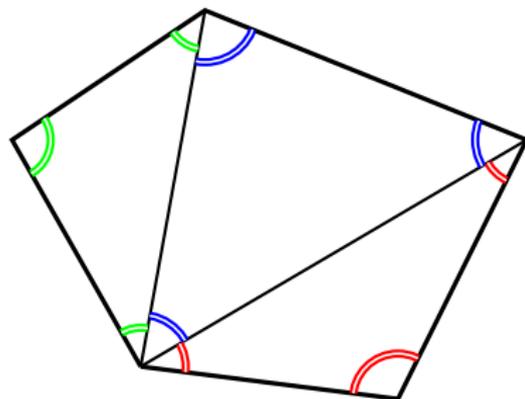


Descartes \implies Euler

Em um triângulo, a soma dos ângulos vale π .

Um polígono convexo de k_i arestas pode ser dividido em $(k_i - 2)$ triângulos.

Então a soma dos ângulos de um polígono convexo de k_i arestas vale $(k_i - 2)\pi$.



Descartes \implies Euler

Por outro lado, sejam $i = 1, \dots, F$ as faces do poliedro convexo, seja k_i o número de arestas da face “ i ”.

A soma dos ângulos de um polígono convexo de k_i arestas vale $(k_i - 2)\pi$.

Então a soma S dos ângulos de todas as faces do polígono convexo vale

$$\sum_{i=1}^F (k_i - 2)\pi = ((\sum_{i=1}^F k_i) - 2F)\pi$$

Agora, cada aresta é aresta de duas faces do poliedro.

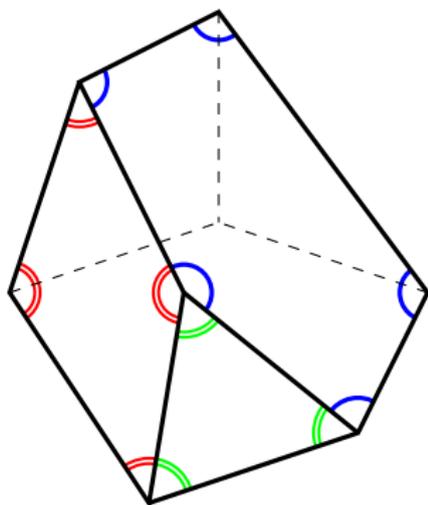
Então se A é o número de arestas,

$$\text{temos } \sum_{i=1}^F k_i = 2A$$

E temos $S = (2A - 2F)\pi$,

Conclusão : $S = 2(V - 2)\pi = 2(A - F)\pi$,

$$V - A + F = 2.$$



Teorema (Descartes, *De solidorum elementis*, ~ 1640)

Se tomarmos o ângulo raso como a unidade, então a soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual a duas vezes do número de vértices (V) menos 2, isto é, $2(V - 2)\pi$.

Fórmula (Euler, 1751 - 1753)

Seja K um poliedro convexo com números V de vértices, A de arestas e F de faces, então temos

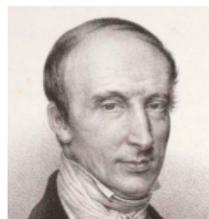
$$V - A + F = 2.$$

• Teorema de Descartes \implies Fórmula de Euler

• Primeira prova completa da fórmula por Legendre (1794).

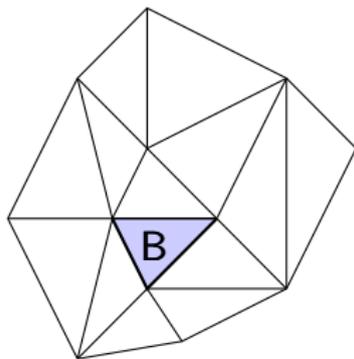


• Prova combinatória da fórmula por Cauchy (1811).



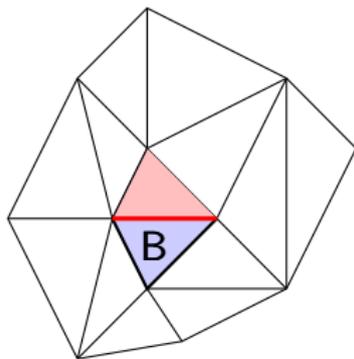
A prova de Cauchy: “Operação I” de Cauchy

Considere um poliedro convexo representando uma triangulação da esfera \mathbb{S}^2 . O primeiro passo é remover um triângulo (aberto), o que significa já contar $+1$ por F . Esta operação cria um buraco B que estenderemos por meio de duas operações, as “operações de Cauchy”.



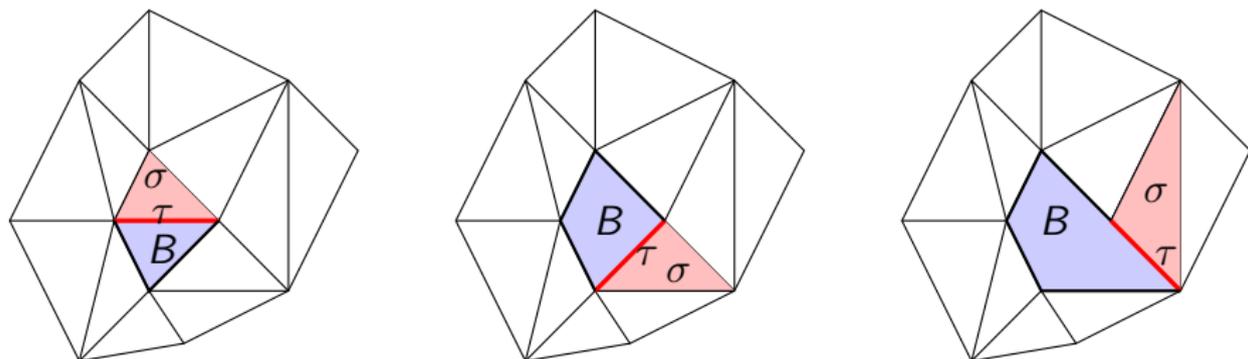
A prova de Cauchy: “Operação I” de Cauchy

Considere um poliedro convexo representando uma triangulação da esfera \mathbb{S}^2 . O primeiro passo é remover um triângulo (aberto), o que significa já contar $+1$ por F . Esta operação cria um buraco B que estenderemos por meio de duas operações, as “operações de Cauchy”.



A prova de Cauchy: “Operação I” de Cauchy

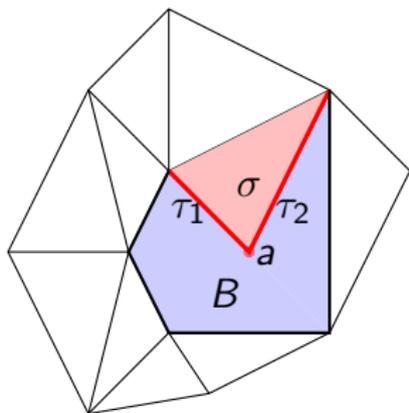
Considere um poliedro convexo representando uma triangulação da esfera \mathbb{S}^2 . O primeiro passo é remover um triângulo (aberto), o que significa já contar $+1$ por F . Esta operação cria um buraco B que estenderemos por meio de duas operações, as “operações de Cauchy”.



Extensão sucessiva do buraco B usando a operação I de Cauchy

A soma alternativa $V - A + F$ não muda.

A prova de Cauchy: “Operação II” de Cauchy



Extensão sucessiva do buraco B usando a operação II de Cauchy

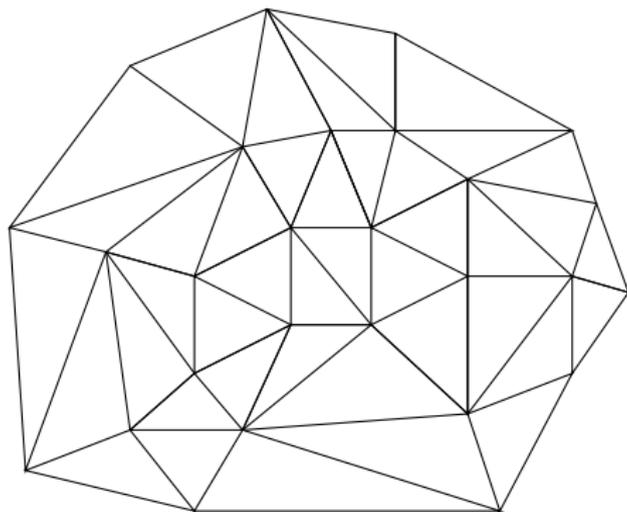
A soma alternativa $V - A + F$ não muda.

De acordo com Cauchy, ao final do processo de extensão, resta apenas um triângulo para o qual: $V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Adicionando o triângulo removido no início, obtemos, para a esfera \mathbb{S}^2 :

$$V - A + F = +2,$$

que é a fórmula de Euler.

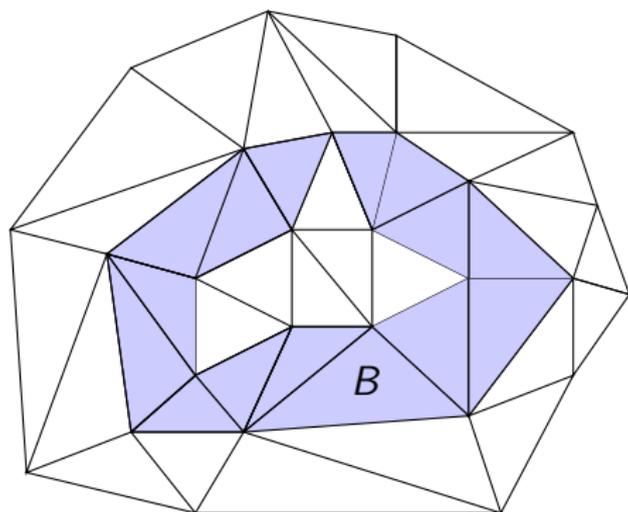
Uma polêmica



Considere a triangulação em que seguiremos a extensão do buraco usando operações de Cauchy

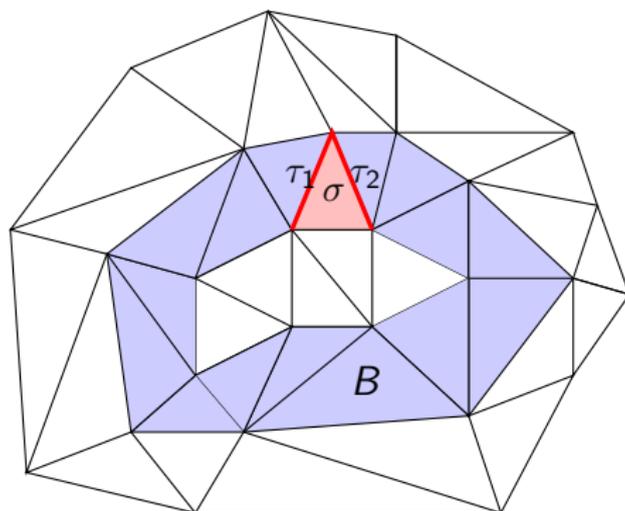
.

Uma polêmica



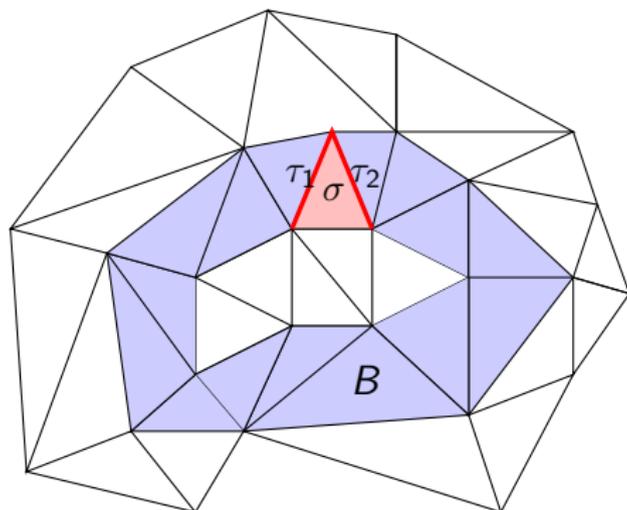
Estendemos o buraco usando operações de Cauchy.

Uma polêmica



Estendemos o buraco usando operações de Cauchy.

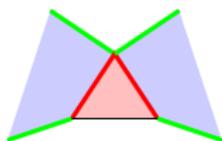
Uma polêmica



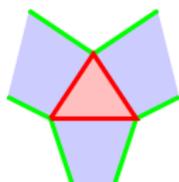
Se adicionarmos σ ao buraco, adicionamos $V - A + F = 0 - 2 + 1 = -1$.

Contróversias

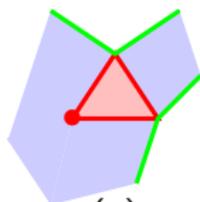
- Lakatos faz várias críticas (1976) “A Lógica do Descobrimento Matemático - Provas e Refutações”. em Português 1978 - Zahar Editores.
- Elon Lima : Matemática Universitária (Dec. 1985) “Na realidade há mais quatro possibilidades que não foram mencionadas (por Cauchy) ...”



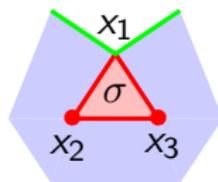
(a)



(b)



(c)



(d)

Buraco B com borda : ✓

Triângulo σ , extensão do buraco.

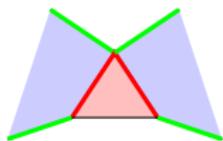
Elon Lima escreve que para evitar os três primeiros casos, é necessário usar resultados profundos da topologia algébrica.

Ele diz que a última situação (d) é óbvia. De fato, neste caso a soma alternada $V - A + F = 2 - 3 + 1$ não muda.

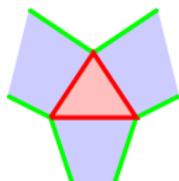
E ele conclui...

Contróversias

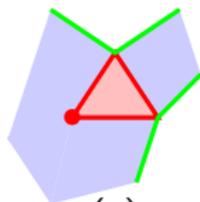
- Lakatos faz várias críticas (1976) “A Lógica do Descobrimento Matemático - Provas e Refutações”. em Português 1978 - Zahar Editores.
- Elon Lima escreve em Matemática Universitária (Dec. 1985) “Na realidade há mais quatro possibilidades que não foram mencionadas (por Cauchy) ...”



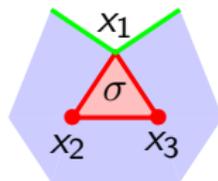
(a)



(b)



(c)



(d)

Buraco B com borda : ✓

Triângulo σ , extensão do buraco.

Não se pode, portanto, esperar obter uma demonstração elementar do Teorema de Euler com a hipótese de que P é homeomorfo a uma esfera, como fazem Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins.

i.e. como faz Cauchy

Elon Lima, Matemática Universitária, No 2 (1985).

O Teorema

Seja G um polígono triangulado (finito) de \mathbb{R}^2 , a característica de Euler-Poincaré de G é denotada por $\chi(G) = V_G - A_G + F_G$.

Teorema (clássico ?, mas onde ??)

Seja G um polígono (finito) triangulado em \mathbb{R}^2 , homeomorfo a um disco, com (possível) identificação de simplexos da borda $G_0 = \partial G$. Temos:

$$\chi(G) = \chi(G_0) + 1.$$

V_G = número de vértices em G ,

A_G = número de arestas em G ,

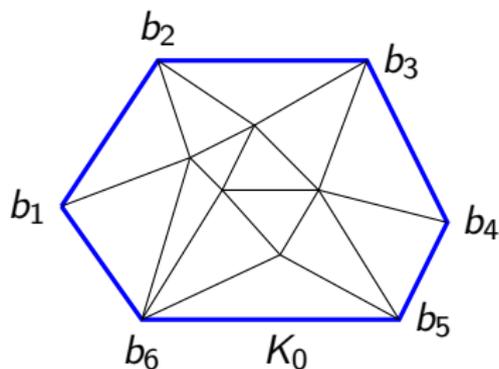
F_G = número de faces em G ,

$$\chi(G) = V_G - A_G + F_G.$$

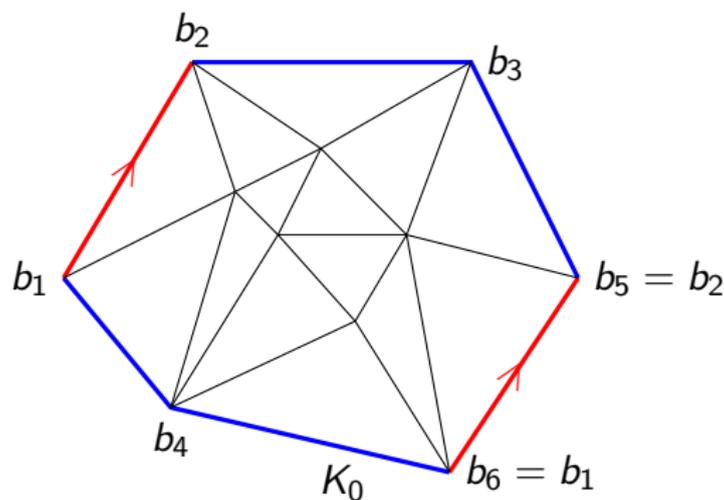
V_0 = número de vértices em G_0 ,

A_0 = número de arestas em G_0 ,

$$\chi(G_0) = V_0 - A_0.$$



Um exemplo



Neste exemplo, em G_0 temos $V_0 = 4$ vértices e $A_0 = 5$ arestas, então

$$\begin{aligned}\chi(G_0) &= V_0 - A_0 = 4 - 5 = -1 \\ \chi(G) &= \chi(G_0) + 1 = 0.\end{aligned}$$

O Teorema

Teorema (–, Nguyễn Thị Bích Thủy)

Seja G um polígono (finito) triangulado em \mathbb{R}^2 , homeomorfo a um disco, com (possível) identificação de simplexos da borda $G_0 = \partial G$. Usando apenas o método de Cauchy, podemos mostrar:

$$\chi(G) = \chi(G_0) + 1.$$

Para falar a verdade, usamos também :

- seja uma cesta de salada (francês),



- seja uma rede de pescador (vietnamita)



- e sub-triangulações...

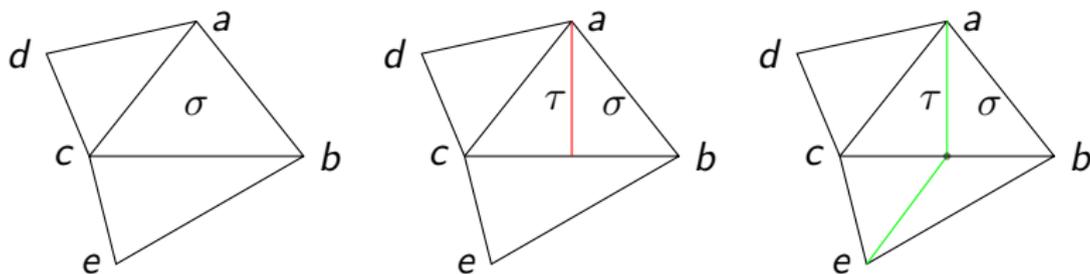
Um Lema

Lema (A- Sub-triangulações)

Seja σ um 2-simplexo de uma triangulação K de um poliedro e τ um segmento que divide σ em duas partes.

Então existe uma sub-triangulação K' de K tal que τ é um segmento de K' e o número $V - A + F$ não muda de K para K' .

Ou temos a seguinte situação :



Sub-triangulações 1.

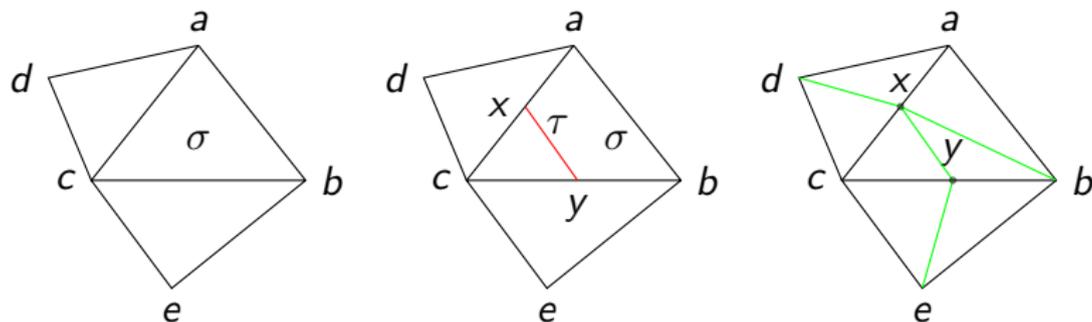
Um Lema

Lema (A- Sub-triangulações)

Seja σ um 2-simplexo de uma triangulação K de um poliedro e τ um segmento que divide σ em duas partes.

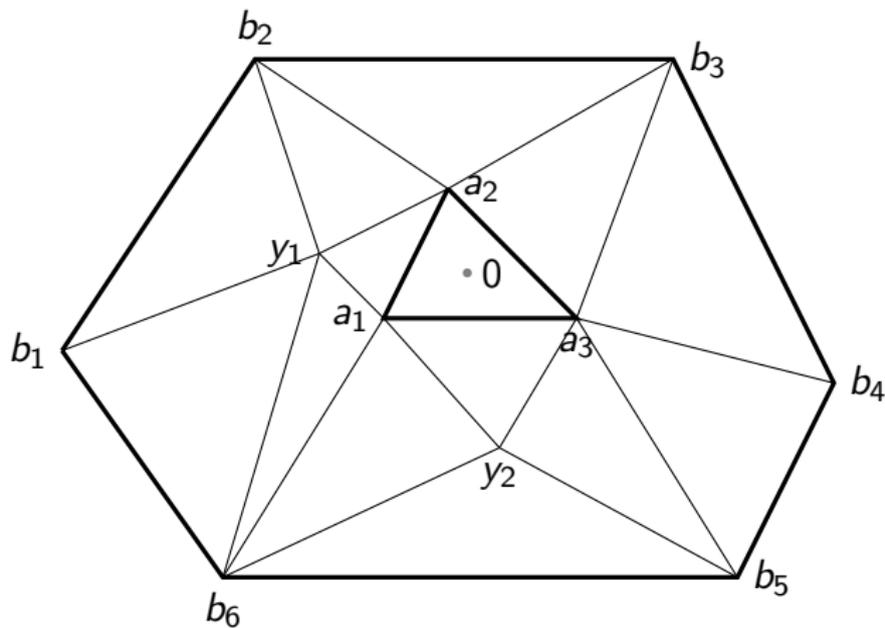
Então existe uma sub-triangulação K' de K tal que τ é um segmento de K' e o número $V - A + F$ não muda de K para K' .

... ou a situação :



Sub-triangulações 2.

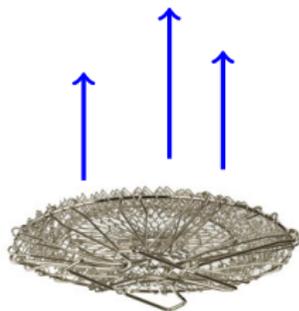
Prova do Teorema.

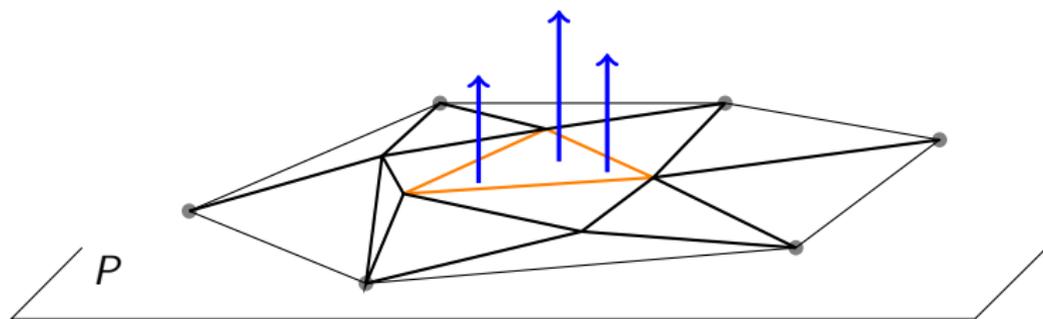


Triangulação G do disco.

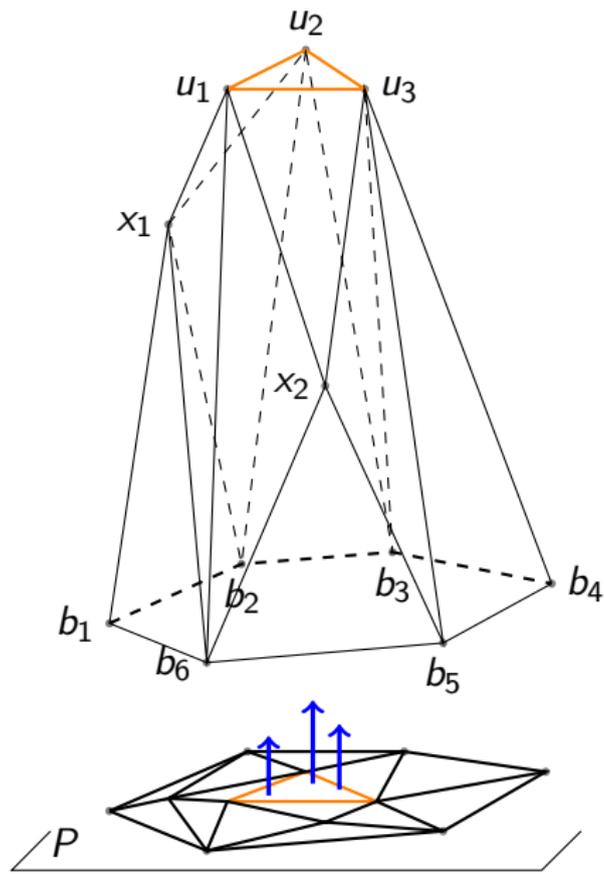
Esquema da prova

- 1 Vamos construir uma pirâmide,
 - 1 a base será a borda,
 - 2 os níveis corresponderão aos vértices do polígono,
 - 3 o andar de cima será um triângulo t da triangulação.
- 2 Vamos criar um buraco no último andar, removendo o triângulo t , então ficamos com V_G vértices, A_G arestas e $(F_G - 1)$ triângulos.
- 3 Vamos estender o buraco, descendo andar por andar e mostrar que para cada etapa, de um andar ao andar inferior, a soma $V_G - A_G + (F_G - 1)$ não muda.
- 4 Concluiremos a prova chegando à base da pirâmide.

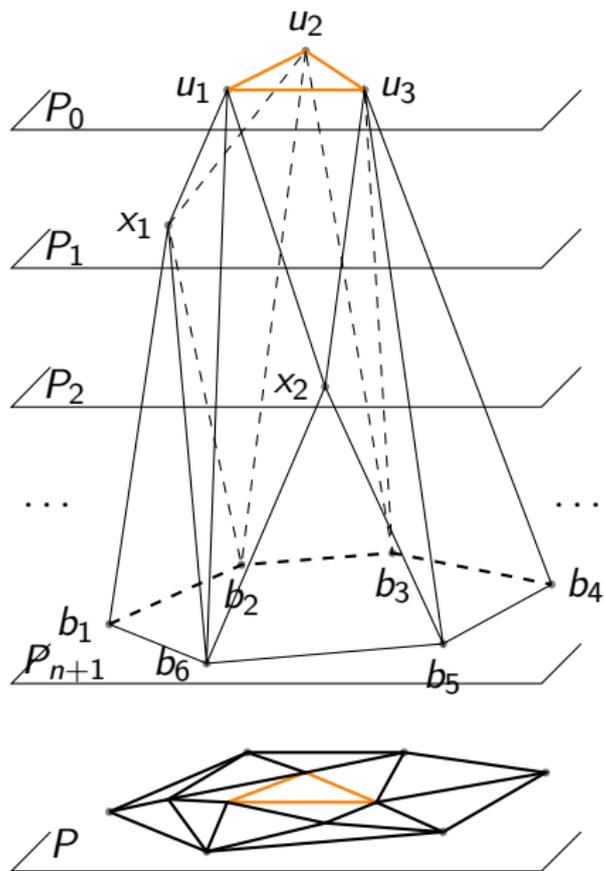




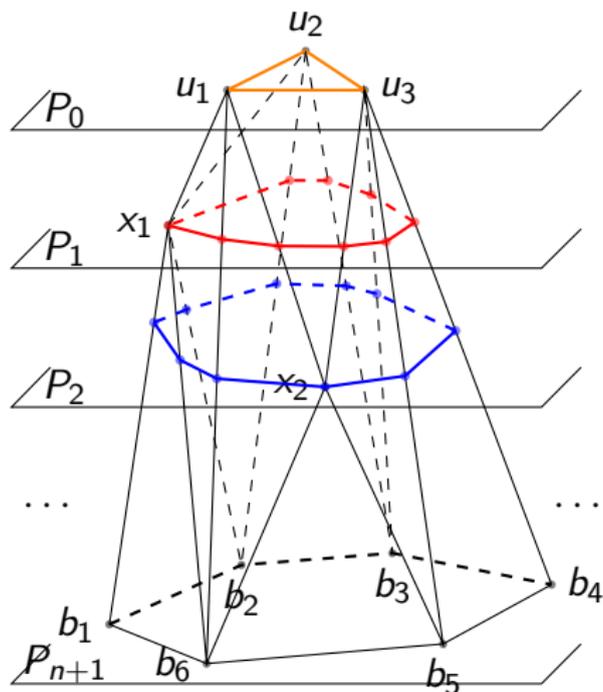
O levantamento do disco.



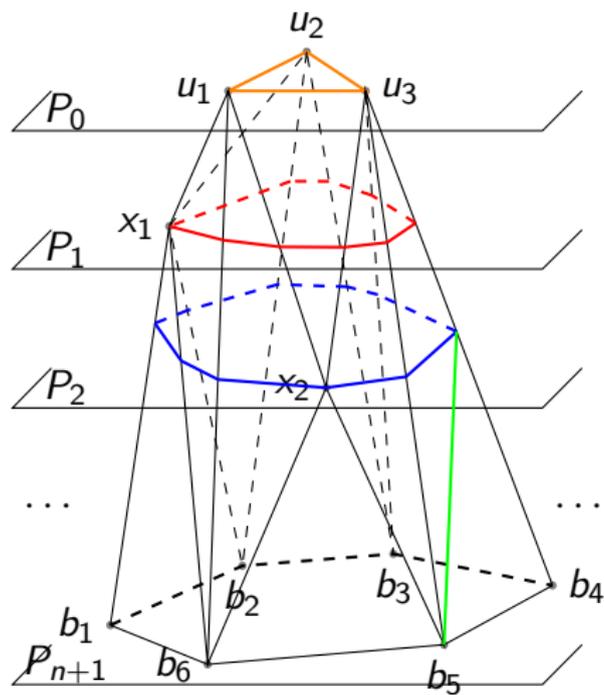
A pirâmide Π .



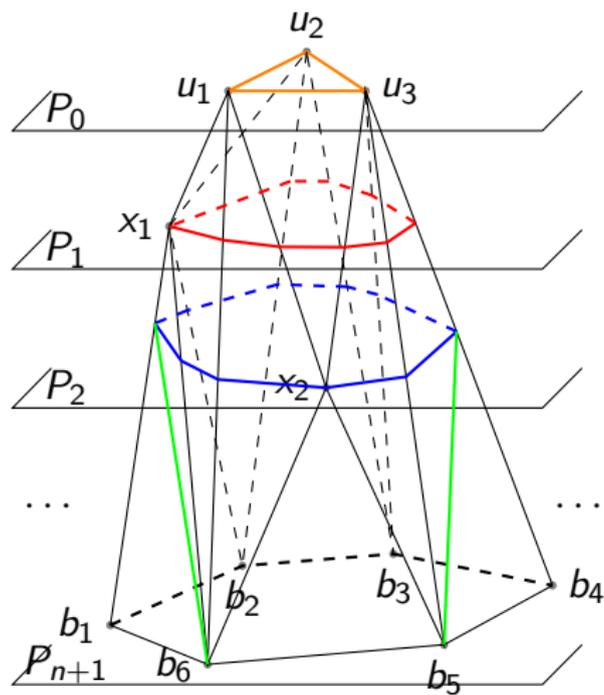
A pirâmide Π (com planos horizontais).



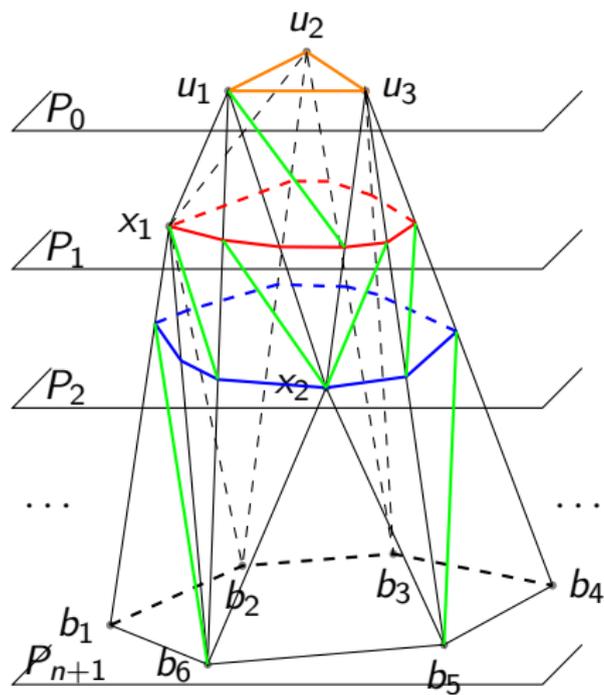
A decomposição L' da pirâmide Π .



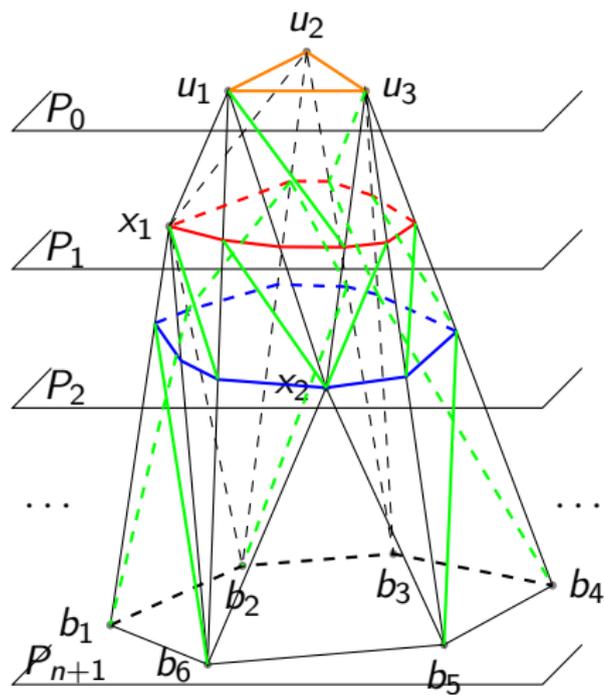
A sub-triangulação L'' da pirâmide Π .



A sub-triangulação L'' da pirâmide Π .



A sub-triangulação L'' da pirâmide Π .



A sub-triangulação L'' da pirâmide Π .

Segunda etapa da prova

Removamos o triângulo (aberto) $t = (u_1, u_2, u_3)$ do topo da pirâmide Π .
Resta V_G vértices, A_G arestas e $(F_G - 1)$ triângulos.

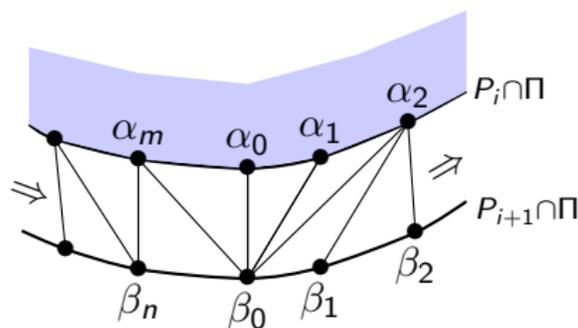
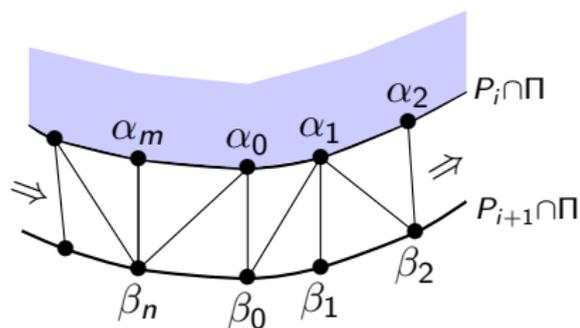
Passagem de um andar ao andar inferior :

Suponha que o buraco já tenha se estendido até o plano (andar) P_i .

Mostramos que estender o buraco do plano P_i até o plano P_{i+1} **não muda a soma $V_G - A_G + (F_G - 1)$** . Por isso vamos usar as operações de Cauchy.

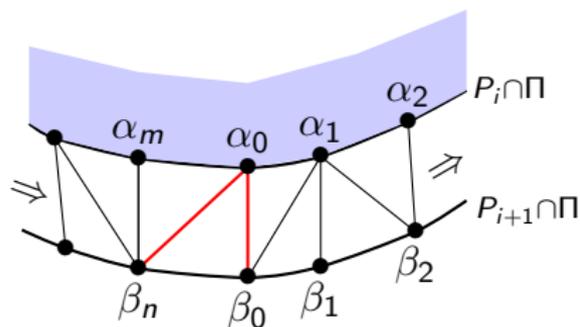
Escolhemos um sentido de percurso \Rightarrow da faixa entre P_i e P_{i+1} .

Ele induz o mesmo sentido de percurso das bordas que são circunferências $P_i \cap \Pi$ e $P_{i+1} \cap \Pi$. Temos várias possibilidades de desenhos da faixa.

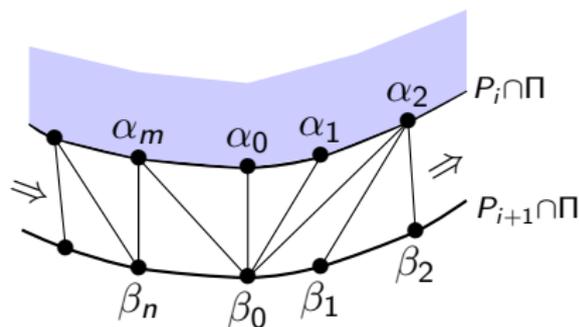


Segunda etapa da prova

Escolhemos um vértice α_0 da sub-triangulação L'' de $P_i \cap \Pi$, que seja vértice de ao menos duas arestas (α_0, β) onde β é um vértice de $P_{i+1} \cap \Pi$. Chamamos de β_0 o último destes vértices no sentido de percurso de $P_{i+1} \cap \Pi$ e chamamos de α_1 o vértice seguinte de α_0 em $P_i \cap \Pi$.



Sim

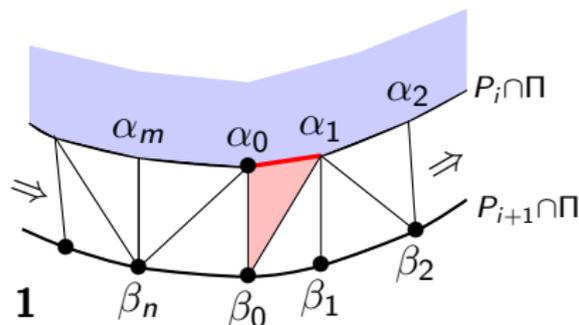


Não

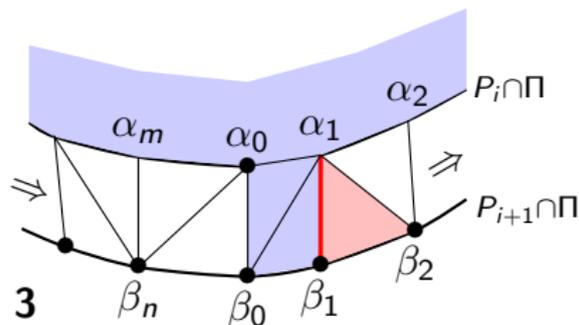
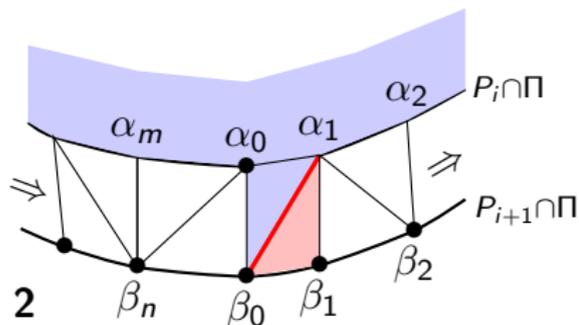
Segunda etapa da prova

Tomamos o triângulo $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0)$ como triângulo de partida.

Este triângulo pode ser removido pela operação (I) de Cauchy.

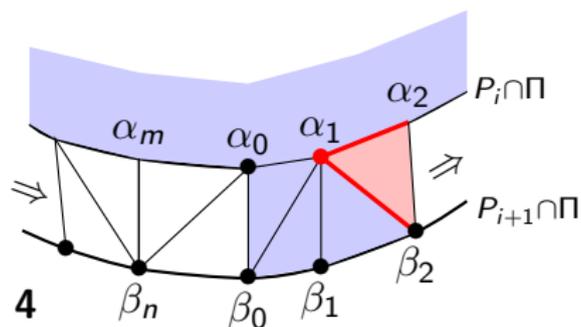


Na seguinte, respeitando o sentido de percurso, todos triângulos do tipo $(\alpha_i, \beta_j, \beta_{j+1})$ podem ser removidos pela operação (I) de Cauchy...

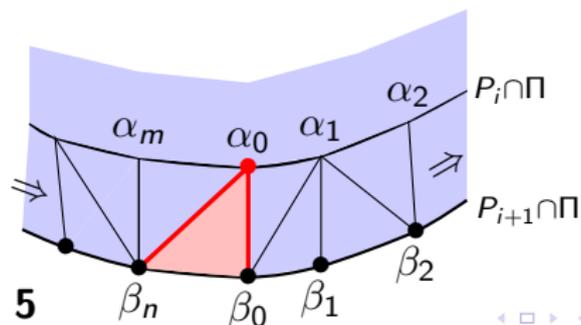


Segunda etapa da prova

... e todos triângulos do tipo $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \beta_j)$ pela operação (II).



Chegando ao fim, o último triângulo é sempre do tipo $\alpha_0, \beta_n, \beta_0$. Este último triângulo pode ser removido pela operação (II) de Cauchy.



A fim da prova

Assim mostramos que a cada etapa, i.e. passando do plano P_i ate o plano P_{i+1} , a soma $V_G - A_G + (F_G - 1)$ não muda.

Chegando ao último plano P_{n+1} , e levando em conta as identificações da borda, temos $V_G - A_G + (F_G - 1) = V_0 - A_0$,

$$V_G - A_G + F_G = V_0 - A_0 + 1$$

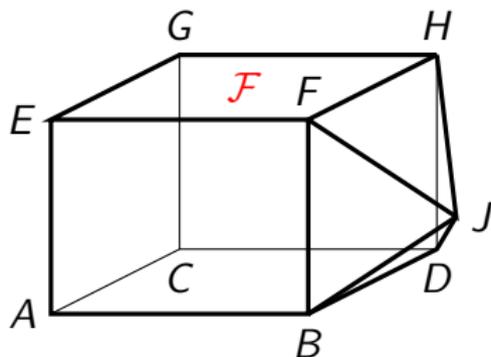
o que é nosso teorema.

Com Cauchy, vamos mostrar a fórmula de Euler :

Fórmula (Euler, 1751 - 1753)

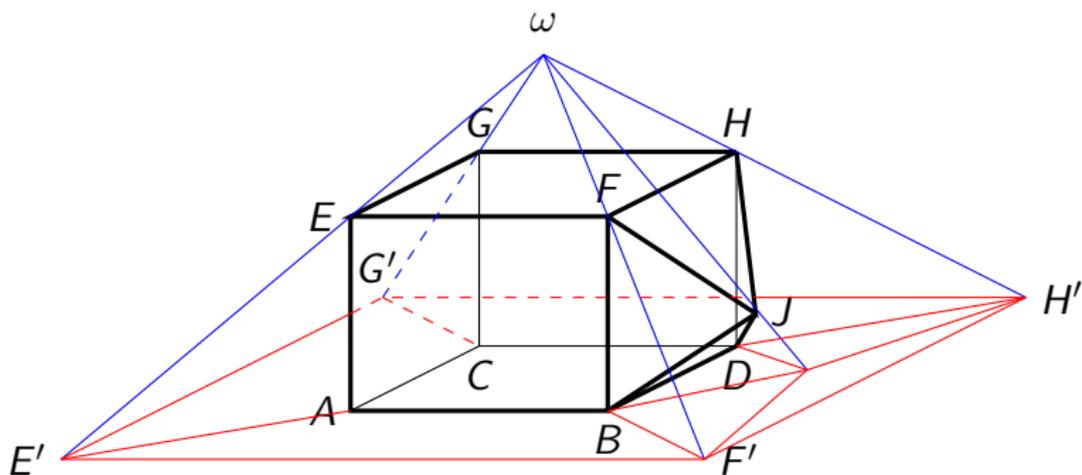
Seja P um poliedro convexo com números V de vértices, A de arestas e F de faces, então temos

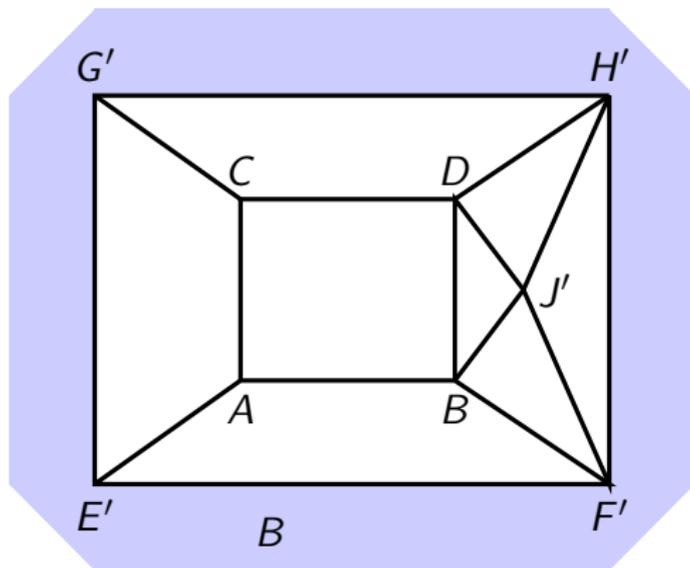
$$V - A + F = 2.$$



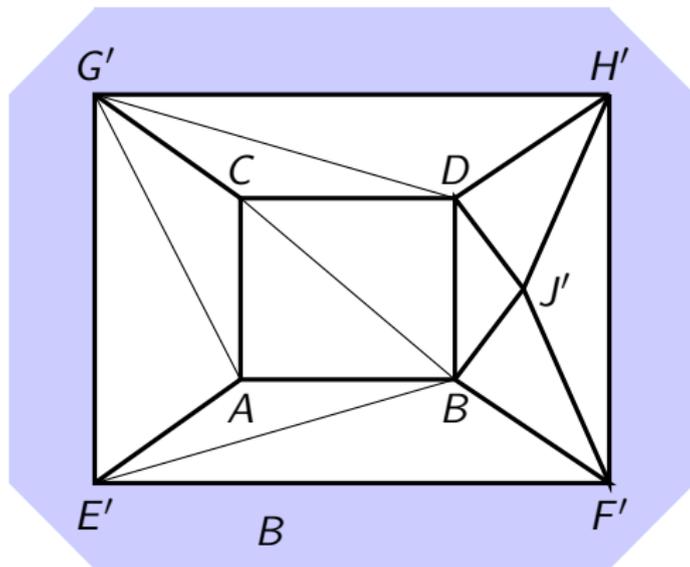
O poliedro P . Tiramos uma face \mathcal{F} ...

... e sendo o ponto ω acima da face \mathcal{F} , temos a projeção estereográfica:





O polígono, representação planar do poliedro P , resultado do processo de projeção estereográfica.



e a triangulação G do polígono.

O nosso teorema diz que pelo polígono G :

$$V_G - A_G + F_G = V_0 - A_0 + 1 = +1.$$

Levando em consideração a face \mathcal{F} que tiremos, obtemos pelo poliedro P

$$V - A + F = +2$$

Exemplos de aplicações

Nos exemplos a seguir, vamos usar o nosso Teorema

Teorema

Seja G um polígono (finito) triangulado em \mathbb{R}^2 , homeomorfo a um disco, com (possível) identificação de simplexos da borda $K_0 = \partial G$.

Usando apenas o método de Cauchy, temos: $V_G - A_G + F_G = V_0 - A_0 + 1$.

e o método de corte de superfícies de Alexander Veblen (1915),
o que necessita uma versão “curva” de nosso Lema:

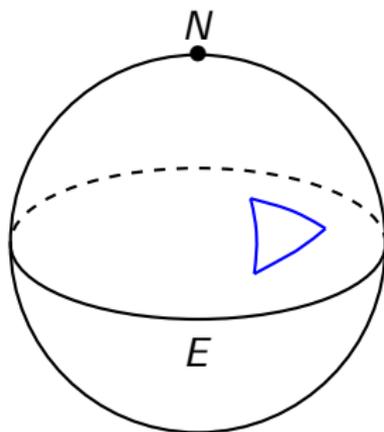
Lema (B - Sub-triangulações)

Seja σ um 2-simplexo de uma triangulação K de uma superfície e γ uma curva que divide σ em duas partes.

Então existe uma sub-triangulação K' de K tal que γ é uma aresta de K' e o número $V - A + F$ não muda de K para K' .

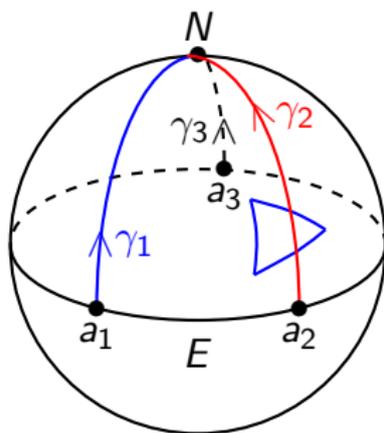
Corolário 1 - A esfera

Seja K uma triangulação da esfera \mathbb{S}^2 .



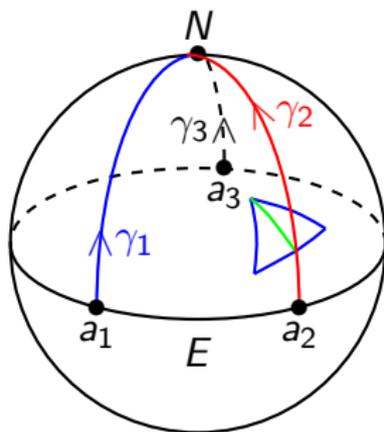
Corolário 1 - A esfera

Seja K uma triangulação da esfera \mathbb{S}^2 . Consideramos quatro curvas na esfera: o equador E , e três curvas γ_1 , γ_2 e γ_3 , indo do polo norte N ao equador E ao longo dos meridianos. Nós notamos a_i , $i = 1, 2, 3$, os pontos de interseção $\gamma_i \cap E$.



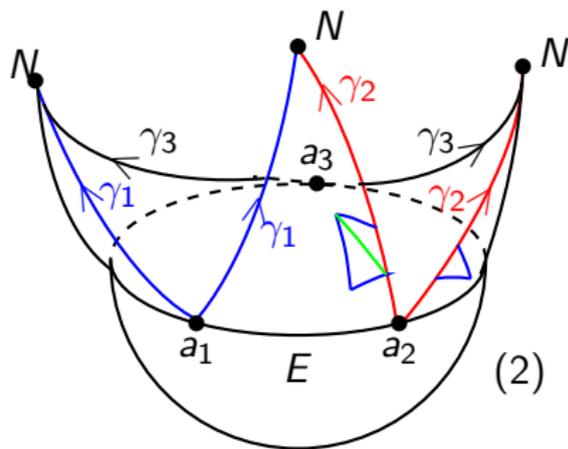
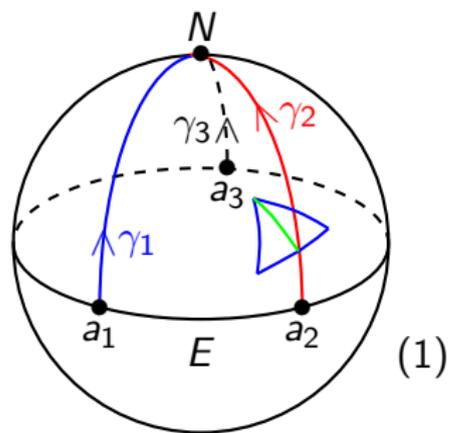
Corolário 1 - A esfera

Seja K uma triangulação da esfera \mathbb{S}^2 . Consideramos quatro curvas na esfera: o equador E , e três curvas γ_1 , γ_2 e γ_3 , indo do polo norte N ao equador E ao longo dos meridianos. Nós notamos a_i , $i = 1, 2, 3$, os pontos de interseção $\gamma_i \cap E$. Usando o Lema B, podemos construir uma subtriangulação K' da triangulação K compatível com as quatro curvas. O Lema diz que a soma $V - A + F$ não muda.



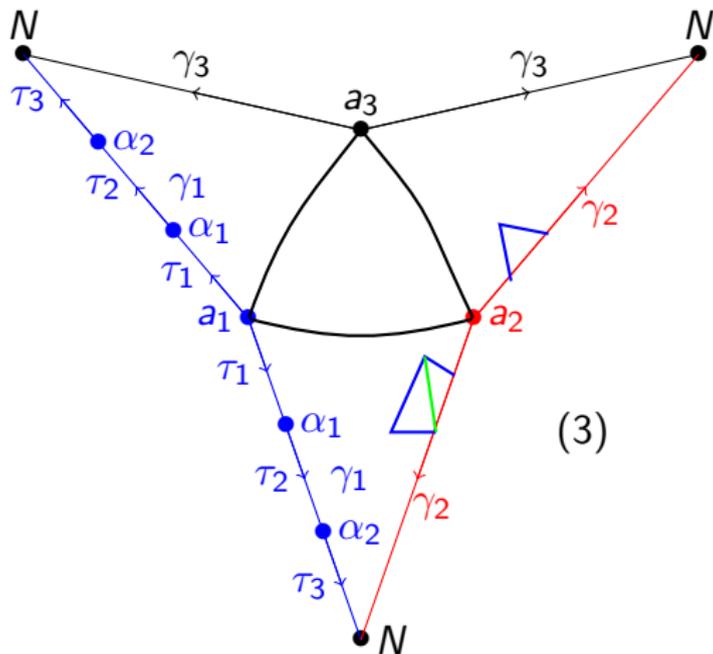
Corolário 1 - A esfera

Usando uma faca, cortamos a esfera como a pele de uma laranja, ao longo das curvas γ_1 , γ_2 e γ_3 ,



Corolário 1 - A esfera

Depois, projetamos a figura no plano que contém o equador por uma bijeção na imagem. Obtemos uma representação plana G da esfera, homomórfica a um disco e com identificações dos simplexos da borda G_0 .



Corolário 1 - A esfera

O Teorema diz que temos

$$V_G - A_G + F_G = V_0 - A_0 + 1.$$

O vértice N é comum a todas as curvas γ_i . Ele dá $+1$ para V_0 .

Para cada curva γ_i temos o mesmo número de vértices e segmentos:

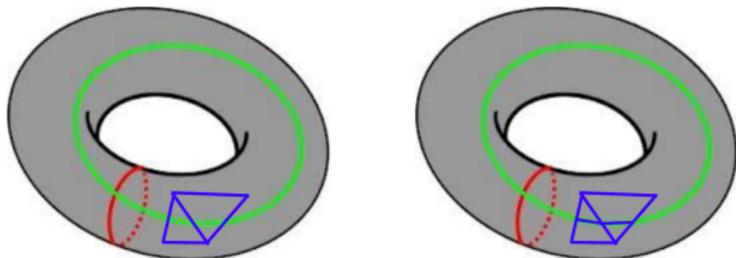
$$V^{\gamma_i} - A^{\gamma_i} = 0.$$

Então nós temos $V_0 - A_0 = +1$ e, pela triangulação K da esfera

$$V - A + F = +2.$$

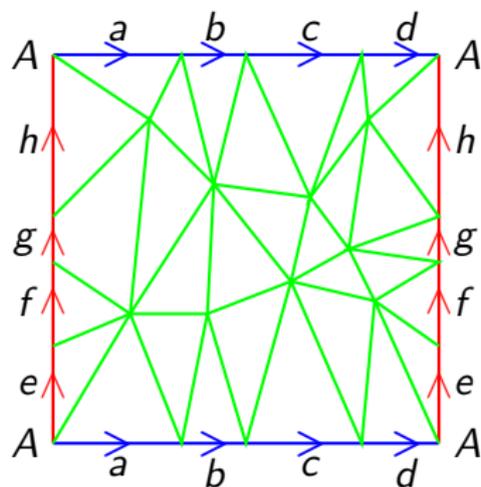
Corolário 2 - O toro

Dada uma triangulação K do toro, consideramos um meridiano M e um paralelo P cruzados no ponto x . Consideramos uma sub-triangulação K' de K tal que para cada simplexo σ , as interseções $\sigma \cap M$ e $\sigma \cap P$ sejam simplexos de K' . Pelo Lema B, a soma $V - A + F$ não muda.



Usando uma tesoura para cortar ao longo de M e P obtemos a figura...

Corolário 2 - O toro

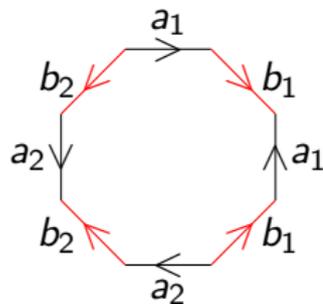
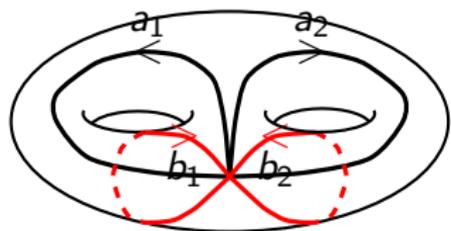


Uma representação plana do toro.

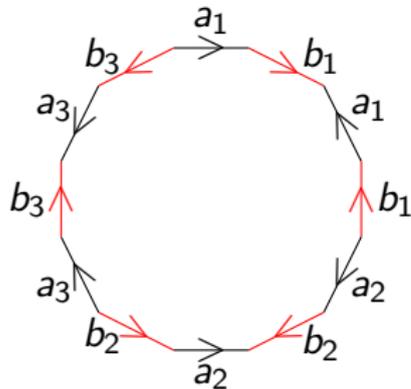
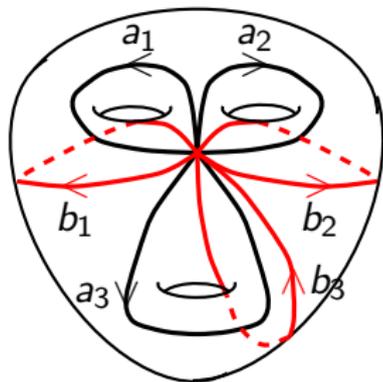
Temos:

$$V - A + F = V_0 - A_0 + 1 = 0.$$

Corolário 3 - O toro T_g de gênero g .



$$\chi(T_2) = -2$$

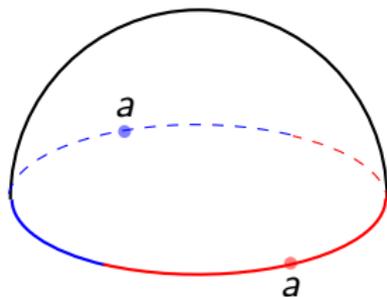


$$\chi(T_3) = -4$$

Corolário 3 - O plano projetivo

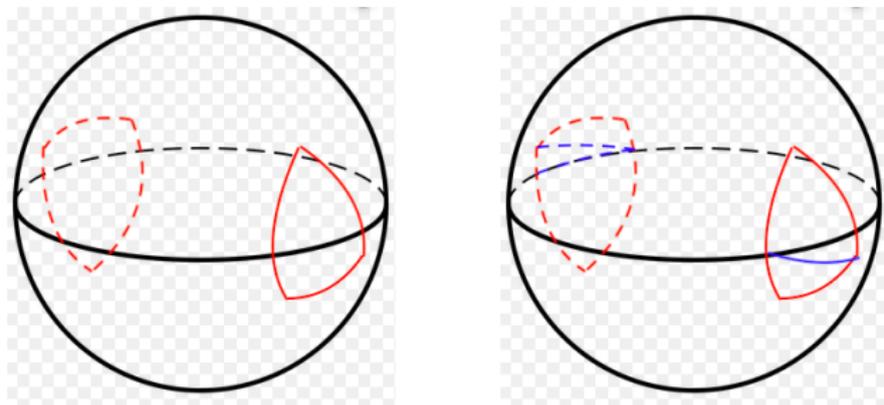
O plano projetivo \mathbb{P}^2 é o conjunto de todas as retas do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 passando pela origem. Uma maneira para representar o espaço projetivo é considerar em \mathbb{R}^3 o quociente da esfera \mathbb{S}^2 de raio 1 pela simetria relativamente ao centro da esfera.

As retas do plano $0xy$ encontram a semiesfera norte em dois pontos diametralmente opostos, que temos que identificar. Obtemos uma representação do espaço projetivo \mathbb{P}^2 , como a semiesfera norte com identificação de pontos diametralmente opostos em sua borda.



Corolário 3 - O plano projetivo

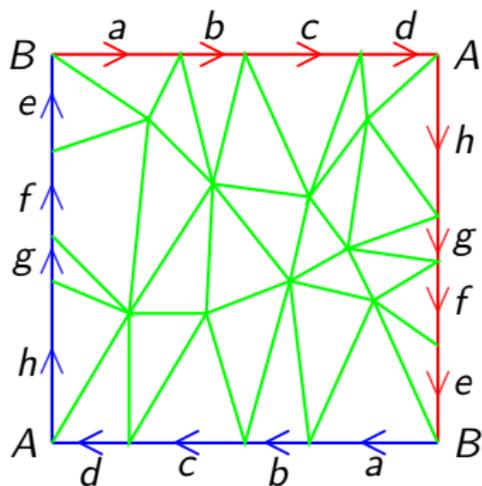
Sendo uma triangulação qualquer K do plano projetivo, ela é simétrica relativamente ao centro da esfera. Usando o Lema B, é possível definir uma sub-triangulação K' compatível com o equador.



Com uma projeção no plano do equador, obtemos um disco triangulado D com identificações na borda.

Corolário 3 - O plano projetivo

Com uma projeção no plano do equador, obtemos um disco triangulado K com identificações na borda.

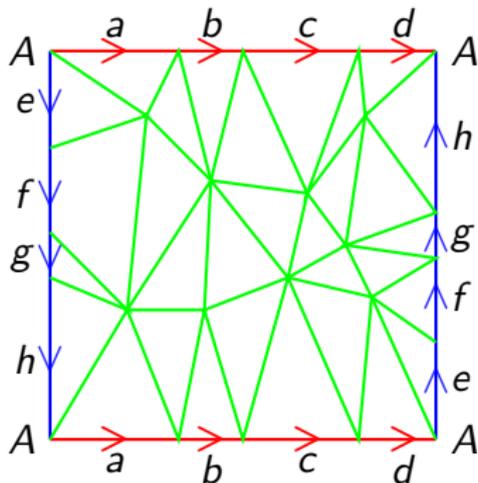
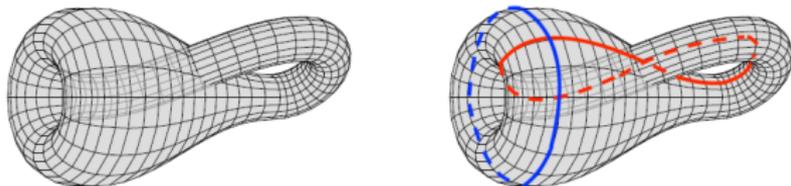


Uma representação plana do plano projetivo.

$$V_0 - A_0 = 0.$$

Então, pelo plano projetivo, temos $V - A + F = +1$.

Corolário 5 - A garrafa de Klein.

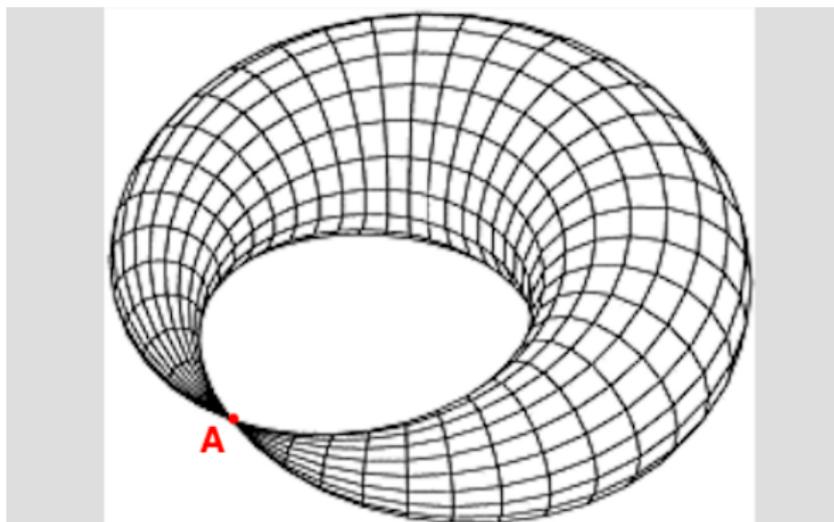


Uma representação plana da garrafa de Klein.

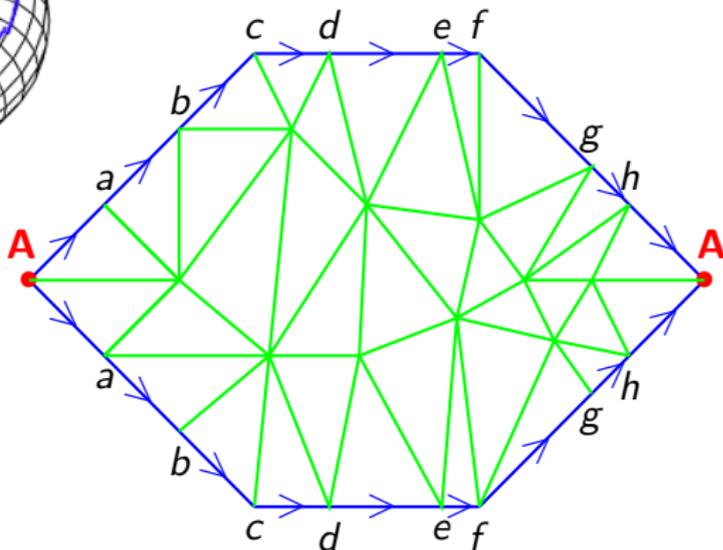
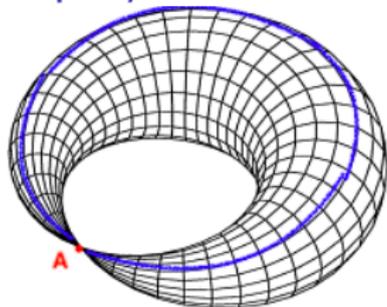
Na borda K_0 , temos $V_0 - A_0 = -1$.

Então pela garrafa de Klein $V - A + F = 0$.

Corolário 6 - O toro pinçado



O toro pinçado



Na borda K_0 , temos $V_0 - A_0 = 0$.

Então pelo toro pinçado, temos $V - A + F = +1$.

Muito obrigado pela atenção

Merci beaucoup pour votre attention

Cảm ơn bạn rất nhiều vì sự quan tâm của bạn