

COMMA

30, 31 de outubro e 01 de novembro de 2023
São João Del-Rei

Resumos do VIII Workshop de Matemática e Matemática Aplicada



Jordan Nilpotência em Anéis de Grupo

Mariana Garabini Cornelissen Hoyos¹

Resumo: Uma álgebra é dita uma álgebra de Jordan se valem as seguintes propriedades para a multiplicação: $xy = yx$ e $(x^2y)x = x^2(yx)$ (essa última identidade é conhecida como identidade de Jordan). As álgebras de Jordan possuem conexões com as álgebras de Lie e aplicações importantes nas áreas de análise real e complexa, geometria e álgebra.

Uma álgebra de Jordan é nilpotente se, para algum inteiro positivo $n \geq 2$, o produto de quaisquer n elementos dessa álgebra é igual a zero, com todas as formas de associação desse produto. O menor n para o qual a álgebra é uma álgebra de Jordan nilpotente é dito índice de nilpotência da álgebra.

É fácil ver que o produto de Jordan é trivial em um anel de grupo RG se, e somente se, a característica de R é 2 e G é abeliano. As álgebras de grupo Jordan nilpotente de índice 3 foram estudadas e classificadas por Edgar G. Goodaire e César Polcino Milies em 2014. Neste trabalho estamos interessados em caracterizar o anel R e o grupo G tais que a álgebra de grupo RG , sobre um anel comutativo R e com identidade, é Jordan nilpotente de índice maior ou igual a 4.

(Trabalho em conjunto com Osnel Broche Cristo (UFLA) e Rodrigo Lucas Rodrigues (UFC) e com o apoio da FAPEMIG APQ-00958-22).

References

- [1] GOODAIRE, Edgar G.; POLCINO MILIES, César. Jordan nilpotency in group rings. *Journal of Group Theory*, v. 17, n. 4, p. 541-557, 2014.
- [2] GOODAIRE, Edgar G.; POLCINO MILIES, Francisco César. Lie and Jordan Properties in Group Algebras. *Noncommutative Rings and Their Applications*, v. 634, p. 163, 2015.

¹Departamento de Estatística, Física e Matemática do campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del Rei
mariana@ufsj.edu.br

O XVI Problema de Hilbert e alguns resultados para famílias de centros multi-paramétricos

Jackson Itikawa¹

Regilene Oliveira²

Joan Torregrosa³

Resumo: Faremos uma breve discussão sobre funções periódicas e a pesquisa em Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Em seguida, apresentaremos um novo resultado para estudar a bifurcação de ciclos limites em sistemas diferenciais multi-paramétricos que possuem um centro, levando em consideração a série de Taylor de primeira ordem da primeira função de Melnikov do sistema. A determinação de ciclos limites em sistemas diferenciais polinomiais planares de grau n está relacionada ao 16º Problema de Hilbert, o qual permanece em aberto, mesmo para o caso mais simples, com $n = 2$.

Referências

- [1] A. Buică, J. Llibre. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bull. Sci. Math.*, 128(1):7–22, 2004.
- [2] J. Giné, L. F. S. Gouveia, J. Torregrosa. Lower bounds for the local cyclicity for families of centers. *J. Differential Equations*, 275:309–331, 2021.
- [3] J. Itikawa, R. Oliveira, J. Torregrosa. First-order perturbation for multi-parameter center families. *J. Differential Equations*, 309:291–310, 2022.
- [4] M. Han and P. Yu. *Normal forms, Melnikov functions and bifurcations of limit cycles*, volume 181 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, London, 2012.

¹Departamento de Estatística, Física e Matemática, Campus Alto Paraopeba - UFSJ
itikawa@ufsj.edu.br

²Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo
regilene@icmc.usp.br

³Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona; Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra
torre@mat.uab.cat

Multiestabilidade e formação de padrões em um modelo discreto de competição por exploração

Diomar Cristina Mistro ¹

Resumo: Neste trabalho apresentamos a dinâmica de três espécies: uma espécie recurso e duas espécies de consumidores, que competem pelo recurso. Supomos que a espécie recurso é um inseto praga; um dos consumidores é um parasitoide enquanto a outra espécie é um predador. Vamos mostrar que a bi- e tri-estabilidades observadas no modelo proporcionam a formação de padrões heterogêneos estáveis para a distribuição espacial das espécies.

Referências

- [1] RODRIGUES, L. A. D.; MISTRO, D. C.; PETROVSKII, S. Pattern formation, long-term transients, and the turing–hopf bifurcation in a space and time discrete predator–prey system. *Bulletin of Mathematical Biology*, **73** (2011), 1812–1840.
- [2] SELAU, P. K. P. Modelos discretos para dinâmica hospedeiro-parasitoide-predador. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, 2019.
- [3] SELAU, P. K. P.; MISTRO, D. C.; RODRIGUES, L. A. D. Pattern Formation in a Resource and Two Consumers Discrete Model. *Revista de Modelamiento Matemático de Sistemas Biológicos*. To appear, 2023.

¹Universidade Federal de Santa Maria,
dcmistro@ufsm.br

Uma história curta e pesada em Teoria de Obstrução

Bárbara Karoline de Lima Pereira¹ Maria Aparecida Soares Ruas² Hellen Santana³

Resumo: Nesse trabalho, investigamos a informação topológica capturada pela obstrução de Euler de um germe de aplicação $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, em que $(X, 0)$ denota um germe de espaço analítico complexo. Além disso, veremos um caso em que essa obstrução de Euler se relaciona com o número de Bruce-Roberts relativo das funções coordenadas da aplicação f .

Referências

- [1] J. P. Brasselet, N. G. Grulha Jr, M. A. S. Ruas, *The Euler obstruction and the Chern obstruction*, Bulletin of the London Mathematical Society, 42, 1035–1043,(2010).
- [2] W. Ebeling and S. M. Gusein-Zade, *Chern obstructions for collections of 1-forms on singular varieties*. Singularity theory, 557–564, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2007).
- [3] B. K. Lima-Pereira, J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto, J. N. Tomazella, *The Bruce-Roberts numbers of a function on an ICIS* arXiv:2203.11186 (2022).
- [4] B. Lima-Pereira, M. Ruas, H. Santana, Relative Bruce-Roberts number and Chern obstruction. In preparation.

¹Universidade de São Paulo ,
barbarapereira@estudante.ufscar.br

²Universidade de São Paulo ,
maaruas@icmc.usp.br

³Universidade Federal do Triângulo Mineiro ,
hellen.santana@uftm.edu.br

Teoria de Blocos para Grupos Profinitos

Ricardo Joel Franquiz Flores ¹

Resumo: A Teoria das representações modulares de grupos finitos pode ser pensada como o estudo da categoria de módulos definidos sobre kG . Uma forma de entender o comportamento dos kG -módulos é através da Teoria de Blocos a qual consiste em considerar uma decomposição de kG em soma direta de álgebras indecomponíveis chamadas blocos e estudar comportamento dos módulos indecomponíveis nestes blocos.

Está teoria começou na década de 1930 com os trabalhos de Richard Brauer quem fez um estudo detalhado e sistemático das representações de um grupo finito G sobre um corpo k de característica p onde p divide à ordem do G . Posteriormente J. A. Green realiza um estudo sistemático dos módulos indecomponíveis definidos sobre kG . Desde então a Teoria das representações modulares encontra-se em constante evolução como pode ser evidenciado na literatura (Ver [2], [3], [4]). Recentemente em 2021 R. Franquiz Flores e J. MacQuarrie estenderam resultados básicos da teoria de blocos para grupos finitos para o contexto de grupos profinitos em [1]. Nesta palestra explicarei brevemente os principais conceitos e resultados da teoria de blocos para grupos finitos e seus correspondentes em grupos profinitos, destacando alguns dos principais resultados da teoria de blocos de grupos finitos que tem sido estendidos aos grupos profinitos.

Referências

- [1] R. J. Franquiz Flores and J. W. MacQuarrie. *Block theory and Brauer's first main theorem for profinite groups*. Advances in Mathematics, 397:108121, 2022.
- [2] D. J. Benson. *Representations and Cohomology, volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1991.
- [3] M. Linckelmann. *The Block Theory of Finite Group Algebras, volume 1*. Cambridge University Press, 2018.
- [4] M. Linckelmann. *The Block Theory of Finite Group Algebras, volume 1*. Cambridge University Press, 2018.

¹Universidade Federal de Lavras,
ricardo.franquiz@ufla.br

Topologia Molecular na Predição de Atividade Antioxidante num Grupo de Compostos Fenólicos

Jaime Barros Filho ¹

Fernando de Souza Bastos²

Diogo da Silva Machado³

Maria Luiza Ferreira Delfim ⁴

Resumo: Na síntese química, trabalha-se na busca de novos compostos químicos que possam atender a determinados parâmetros, sobretudo, que sejam detentores de propriedades específicas desejáveis. A Topologia Molecular tem sido utilizada neste ramo da Química como ferramenta matemática na predição das potencialidades de uma molécula em manifestar determinadas propriedades. Sendo implementado mesmo antes da síntese do composto, essa ferramenta matemática tem se mostrado capaz de produzir grande economia de tempo e de recursos financeiros. Em [3], por exemplo, J. Gálvez et al., 1994; investigaram a ocorrência de propriedades analgésicas em um determinado grupo de moléculas. Usando Topologia Molecular conseguiram prever com sucesso a ação analgésica em algumas delas, o que culminou com a descoberta de novas moléculas detentoras desta ação farmacológica. Há diversos exemplos de êxito do uso da Topologia Molecular na seleção de novos compostos da indústria química e farmacêutica (ver, por exemplo, [4], [5] e [6]). Entretanto, a despeito do seu desenvolvimento eficaz há décadas, a Topologia Molecular, conforme afirma [1], é pouco conhecida pela comunidade matemática.

No presente trabalho, a Topologia Molecular foi utilizada no estudo da predição de atividade antioxidante de um grupo de compostos fenólicos. Com efeito, os compostos antioxidantes presentes nos alimentos (de seres vivos em geral) são de demasiada importância, sobretudo, pelo fato de que os mecanismos celulares metabólicos geram a produção de radicais livres e os antioxidantes têm a função de reagir com os esses radicais, não permitindo a oxidação e a conseqüente deterioração celular. Para os seres vivos é de suma importância a ingestão balanceada de alimentos com moléculas com essa função, como por exemplo a vitamina E, presente em óleos vegetais, a vitamina C, presente em frutas cítricas, a Curcumina, presente no açafrão-da-terra, entre outras moléculas presentes em alimentos naturais. É sabido que grande parte dos antioxidantes são moléculas com a função orgânica fenol. Neste trabalho, investigamos a propriedade antioxidante de

¹University of California, Riverside, Department of Microbiology and Plant Pathology
jaimeba@ucr.edu

²Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Estatística
fernando.bastos@ufv.br

³Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática
diogo.machado@ufv.br

⁴Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Química
maria.delfim@ufv.br

um grupo de compostos fenólicos e obtivemos um modelo de predição que pode auxiliar na busca de novas substâncias com potencial antioxidante. Esse trabalho foi realizado com suporte do convênio (no. 119/2021-UFV) entre a Universidade Federal de Viçosa e a University of California, Riverside.

Referências

- [1] J. M. Amigó, A. Falcó, J. Gálvez and Y. V. Villar, *Topología Molecular*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. no 39 (2007), 137-151.
- [2] J. B. Filho, F. S. Bastos, M. L. F Delfim, Application of Molecular Topology to the Prediction of Antioxidant Activity in a Group of Phenolic Compounds. Artigo Submetido (2022).
- [3] J. Gálvez, R. García-Domenech, J. V. de Julián-Ortiz and R. Soler, Topological Approach to Analgesia, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 34 (1994), 1198-1203.
- [4] J. Gálvez, R. García-Domenech, J. V. de Julián-Ortiz and R. Soler, Topological Approach to Drug Design, [Erratum to document cited in CA 122:177672]. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*. 1995; 35(5), 938.
- [5] R. García-Domenech, N. Espinoza, R. F. Galarza, M. J. Moreno-Padilha, B. Rojas-Ruiz, L. L. Roldan-Arroyo, M.I. Sanchez-Lavado and J. Gálvez, 2008a Application of molecular topology to the prediction of inhibition of *Trypanosoma cruzi* Hexokinase by bisphosphonates, *Ars Pharmaceutica*, 9, 199-209.
- [6] N. Mahmoudi, J.V. de Julian-Ortiz, L. Ciceron, J. Gálvez, D. Mazier, M. Danis, et al. Identification of new antimalarial drugs by linear discriminant analysis and topological virtual screening. *Journal of Antimicrobial Chemotherapy*. 2006; 57(3), 489-97.

Boa colocação e análise qualitativa de um modelo SEIR com difusão espacial para disseminação da COVID-19

José Paulo Carvalho dos Santos ¹

Evandro Monteiro ²

José Claudinei Ferreira ³

Nelson Henrique Teixeira Lemes ⁴

Diego Rodrigues ⁵

Neste apresentação estudamos a boa colocação e o comportamento qualitativo dos equilíbrios de um modelo epidemiológico do tipo SEIR com difusão espacial para a disseminação da COVID-19 [1]. A boa colocação do modelo é comprovada utilizando Teoria de Semigrupos de operadores setoriais quanto por resultados de existência e regularidade para equações diferenciais parabólicas abstratas [2]. A estabilidade assintótica dos equilíbrios livre da doença e endêmico é estabelecida usando a teoria de linearização padrão e confirmada por simulações numéricas ilustrativas. A estabilidade assintótica global do equilíbrio livre de doença e endêmico é estabelecida pela teoria de funcionais de Lyapunov.

Agradecimentos

Agradecemos ao Departamento de Matemática e ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas pelo financiamento.

¹Professor do Departamento de Matemática UNIFAL-MG, jose.santos@unifal-mg.edu.br

²Professor do Departamento de Matemática da UNIFAL-MG, evandro.monteiro@unifal-mg.edu.br

³Professor do Departamento de Matemática da UNIFAL-MG, jose.ferreria@unifal-mg.edu.br

⁴Professor do Instituto de Química da UNIFAL-MG, nelson.lemes@unifal-mg.edu.br

⁵Professor da Escola de Tecnologia da UNICAMP, diego.rodrigues@ft.unicamp.br

Referências

- [1] DOS SANTOS, J. P. C., MONTEIRO, E., FERREIRA, J. C., TEIXEIRA LEMES, N. H., & RODRIGUES, D. S. **Well Posedness and Qualitative Analysis of a SEIR Model with Spatial Diffusion for COVID-19 Spread.** *Biomath*, Vol. 12 N° 1, p. 1-14, 2023.
- [2] YAGI, A., **Abstract parabolic evolution equations and their applications.** Springer Science & Business Media, 2009.

Sierpiński Carpets and relatively hyperbolic groups

Lucas Henrique Rocha de Souza ¹

Resumo: The topology of a Bowditch boundary of a relatively hyperbolic group (with respect to a set of parabolic subgroups) has its importance, not only as an invariant for the group, but as a way to encode algebraic information about it, such as decompositions of the group as graphs of groups or if the group is a group of isometries of a manifold, for example. We present some examples of topological spaces that can appear as boundaries of relatively hyperbolic groups.

Whyburn showed that if we take a 2-sphere and remove an infinite collection of open disks satisfying some properties, then we get the 1-dimensional Sierpiński Carpet. After that, Cannon generalized it for n -dimensional Sierpiński Carpets. Recently, Tshishiku and Walsh gave another characterization of the Sierpiński Carpet: if we take a 2-sphere, remove a countable dense set and replace each point by a circle, then we get a 1-dimensional Sierpiński Carpet. We generalized their result for a n -dimensional Sierpiński Carpet. Then, we are able to show that some groups have a Bowditch boundary homeomorphic to the n -dimensional Sierpiński Carpet.

Referências

- [1] L. H. R. de Souza, A generalization of convergence actions. Preprint 2019. arXiv 1903.11746 [math.GR]
- [2] L. H. R. de Souza, Characterization of the n -dimensional Sierpiński carpet as an inverse limit of closed balls. Preprint 2022. arXiv 2203.11282 [math.GN]
- [3] L. H. R. DE SOUZA, *Constructing Bowditch boundaries of some relatively hyperbolic groups that are homeomorphic to the n -dimensional Sierpiński carpet*. Preprint 2022. ArXiv: 2208.06942 [math.GT].
- [4] L. H. R. DE SOUZA, *Gluing spaces without identifying points*. Topology and its applications, v. 338, Article 108671.

¹UFMG ,
henrique.lucas20003@gmail.com

Grau mínimo de identidades standard da álgebra de matrizes com involução graduada simplética

Dafne Bessades ¹

Resumo: Seja F um corpo de característica zero e $M_n(F)$ a álgebra de matrizes de ordem n sobre F . O polinômio standard de grau n em variáveis não comutativas x_1, \dots, x_n é definido por:

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n denota o grupo simétrico de grau n e $\text{sgn}(\sigma)$ o sinal da permutação σ . O clássico teorema de Amitsur e Levitzki [1] estabelece que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade polinomial de $M_n(F)$ e que, nesse caso, $2n$ é o grau mínimo de uma identidade polinomial. Swan em [2] forneceu uma nova demonstração para o Teorema de Amitsur e Levitzki. Nessa demonstração Swan estabelece uma interessante relação entre substituições de matrizes elementares no polinômio standard e caminhos unicursais em grafos direcionados. Através dessa relação o Teorema de Amitsur e Levitzki foi obtido a partir de um teorema pertencente à teoria de grafos. Nesta palestra, apresentaremos resultados estabelecidos nos artigos [3] e [4] sobre o estudo da minimalidade do grau de identidades standard para a álgebra de matrizes com a involução graduada simplética e, ainda nessa direção, serão discutidos alguns resultados parciais obtidos recentemente com a colaboração de M. L. Santos.

Referências

- [1] A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.
- [2] R. Swan. *An application of graph theory to algebra*. Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963) 367 - 373. Correction to: “An application of graph theory to algebra ”. **21** (1969) 379-380.
- [3] D. Bessades, R. dos Santos and A. Vieira. *Minimal degree of identities of matrix algebras with additional structures*. In: A. Giambruno and O. Di Vincenzo. Polynomial Identities in Algebras. Springer International Publishing **44** (2021).
- [4] D. Bessades, R. dos Santos and A. Vieira. *Minimal degree of standard identities of matrix algebras with symplectic graded involution*. International Journal of Algebra and Computation **32** (2022) 47-66.

¹dafnebessades2@gmail.com

Teoria de regularidade para soluções da equação de evolução governada pelo (m, p) -Laplaciano

Giane Casari Rampasso ¹

Resumo: Neste trabalho, investigamos a regularidade de soluções para uma classe de equações de evolução governadas por operadores duplamente não lineares. Mais precisamente, apresentamos resultados de regularidade ótima de soluções da denominada equação (m, p) -Laplaciano de evolução em espaços de Hölder. Este modelo generaliza, por exemplo, a equação de meio poroso, o operador p -Laplaciano de evolução e a clássica equação do calor. Além disso, exibimos algumas aplicações para modelos de evolução, que podem ter certo interesse matemático.

Este é um trabalho em colaboração com P.D.S. Andrade (IST-Portugal), J.V. da Silva (IMECC-Unicamp) e M.S. Santos (IST-Portugal).

Referências

- [1] P.D.S. Andrade, J.V. da Silva, G.C. Rampasso, and M.S. Santos. *Sharp regularity estimates for a singular inhomogeneous (m, p) -Laplacian equation*. Arxiv Preprint arXiv:2305.02841.
- [2] J.G. Araújo. *Sharp regularity for the degenerate doubly nonlinear parabolic equation*. J. Differential Equations 269 (2020), no. 12, 10558-10570.
- [3] E.C. Bezerra Júnior, J.V. da Silva, and G.C. Ricarte. *Geometric estimates for doubly nonlinear parabolic PDEs*. Nonlinearity 35 (2022), no. 5, 2334-2362.

¹Universidade Federal de Itajubá,
gianecr@unifei.edu.br

Jogos topológicos para principiantes

Dione Andrade Lara ¹

Resumo: Nesta comunicação abordaremos uma outra maneira de caracterizar algumas propriedades topológicas, e, até buscar alguma generalização, para isso apresentaremos o conceito de jogos topológicos. Os jogos topológicos mais comuns são dados por meio de dois jogadores que podem jogar abertos, pontos ou coberturas, e um critério de vitória para qualquer jogador. Com esta formulação, obteremos resultados topológicos empolgantes. Mostraremos como surgiram os jogos topológicos no início do século passado e traçaremos uma linha do tempo até as pesquisas mais recentes nesta área.

Referências

- [1] Aurichi, L. F., and Dias, R. R. A minicourse on topological games. *Topology Appl.* 258 (2019).
- [2] Aurichi, L. F., and Lara, D. A. Relations between a topological game and the G_δ -diagonal property, *Topology Appl.* 220, 140-145, 2017.
- [3] Baker, M. H. Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game. *Mathematics Magazine*, 80(5), 377-380, 2007.
- [4] R. Engelking. *General topology*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1989.
- [5] R. M. Daniel. *The Scottish Book: Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book Softcover*. Birkhäuser: Softcover reprint of the original 2nd ed. 2015.

¹Universidade Federal de Lavras,
dione.lara@ufla.com.br

Propriedades genéricas do conjunto de Aubry para sistemas Lagrangianos de Tonelli

Josué Geraldo Damasceno¹

José Antônio Miranda²

Carlos Maria Carballo³

Resumo: Em 1988, Le-Calvez provou em [1] que para toda aplicação twist genérica do anel, que preserva área, existe um subconjunto aberto e denso $U(f)$ de \mathbb{R} tal que todo conjunto de Aubry-Mather cujo número de rotação pertence a $U(f)$ é hiperbólico. Sob certas hipóteses de regularidade estendemos este resultado para sistemas Lagrangianos de Tonelli em superfícies compactas sem bordo.

Referências

- [1] Le Calvez, P., Les ensembles d'Aubry-Mather d'un difféomorphisme conservatif de l'anneau déviant la verticale sont en général hyperboliques, C.R. Acad. Sci. Paris. t. 306, Série I, p. 51-54, 1988.
- [2] Contreras, G., Figalli, A., Rifford, L., Generic hyperbolic of Aubry sets on surfaces, Invent, math, 2015
- [3] Figalli, A. Fathi, A. Rifford, L., On the Hausdorff dimension of the Mather quotient, Communications on Pure and Applied Mathematics , vol. 62, 2009.
- [4] Bernard, P., On the Conley decomposition of Mather sets, Rev. Mat. Iberoam., N. 1, vol 26, 2010.

¹Universidade Federal de Ouro Preto,
josue@ufop.edu.br

²Universidade Federal de Minas Gerais,
jan@mat.ufmg.br

³Universidade Federal de Minas Gerais,
carballo@mat.ufmg.br

O Grupo de Isotropia de uma Derivação Triangular

Adriana Freitas¹Marcelo Veloso²

Resumo:

Uma derivação D , sobre um anel B , é uma aplicação linear que satisfaz a regra de Leibniz ($D(ab) = aD(b) + D(a)b$). Isto é,

$$D(a + b) = D(a) + D(b) \text{ e } D(ab) = aD(b) + D(a)b, \text{ para todos } a, b \in B.$$

O interesse em derivações, em especial as localmente nilpotentes, decorre da sua relação com diversos problemas clássicos. Por exemplo, a Conjectura do Jacobiano, o Décimo quarto problema de Hilbert ou a determinação das Integrais primeiras de um sistema polinomial de equações diferenciais ordinárias, dentre outros.

A questão que vamos abordar, cujo interesse aumentou recentemente, é descrever o grupo de isotropia de uma derivação. O grupo de isotropia de uma derivação D , sobre um anel B , é o subgrupo formado pelos automorfismos do anel B que comutam com D . Ou seja, o subgrupo de isotropia de uma derivação D , $Aut_D(B)$, é definido por

$$Aut(R)_D = \{\rho \in Aut(R) \mid \rho D = D\rho\}.$$

Em particular, vamos abordar alguns resultados obtidos sobre o grupo de isotropia de uma derivação triangular no anel polinomial com no máximo 3 variáveis. Visto que as derivações triangulares também são derivações localmente nilpotentes a continuidade natural, desse trabalho, será abordar o grupo de isotropia das derivações localmente nilpotentes no anel polinomial em em 3 variáveis.

Referências

- [1] Rene Baltazar and Marcelo Veloso, *On isotropy group of Danielewski surfaces*, Communications in Algebra, v. 49, n. 3, p. 1006-1016, 2021.
- [2] A. Bianchi and M. Veloso *Locally nilpotent derivations and automorphism groups of certain Danielewski surfaces* Journal of Algebra (Print), v. 469, p. 96-108, 2017.
- [3] G. Freudenburg, Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag (2006).

¹Adriana Freitas,
adrianafreitas@ufla.br

²Marcelo Veloso,
veloso@uufs.edu.br

Equações Diferenciais e Simetrias

Patrícia Tempesta ¹

Resumo: Simetria é uma propriedade natural em modelos matemáticos e, devido à sua grande ocorrência nos sistemas dinâmicos, ela tem sido objeto de estudo de vários autores nas últimas décadas. Esta apresentação se concentra nas simetrias presentes em equações diferenciais binárias (EDB), estudo motivado pela ocorrência de simetrias nas configurações associadas a estas equações nos mais diversos trabalhos existentes na literatura. Uma EDB é uma equação diferencial implícita da forma

$$a(x, y)dy^2 + b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2,$$

onde a, b e c são funções suaves em um aberto do \mathbb{R}^2 . Apresentarei a definição de simetria para esse tipo de equação via teoria de representação de grupos e algumas formas algébricas que permitem reconhecer o grupo de simetria associado a uma EDB baseado apenas em sua configuração, bem como as formas gerais das EDBs para subgrupos do grupo ortogonal.

Referências

- [1] M. Manoel, P. Tempesta, Binary differential equations with symmetries , *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A* v.39, 2019, DOI: 10.3934/dcds.2019082
- [2] T. Antoneli, P. H. Baptistelli, A. P. S. Dias, M. Manoel, Invariant theory and reversible-equivariant vector fields, *J. Pure Appl. Algebr.*, 213, 2009, DOI: 10.1016/j.jpaa.2008.08.002

¹Universidade Federal de São João del-Rei,
tempesta@ufsj.edu.br

Redes Neurais Autoexpansíveis baseadas na Teoria da Ressonância Adaptativa aplicadas a problemas da saúde

Angela Leite Moreno ¹

Resumo: As redes neurais artificiais são um tipo de modelo computacional inspirado no funcionamento do cérebro humano, que consiste em interconectar um grande número de unidades de processamento simples, chamadas de neurônios artificiais, para realizar tarefas de aprendizado e tomada de decisão. São algoritmos capazes de aprender e generalizar a partir de dados, permitindo que os sistemas automatizados tomem decisões e realizem tarefas complexas sem a necessidade de programação explicitamente.

A Teoria da Ressonância Adaptativa (ART) proposta por Grossberg oferece uma abordagem eficaz para lidar com o dilema da estabilidade-plasticidade, isto é, a capacidade de aprender (plasticidade) sem experimentar o esquecimento catastrófico (estabilidade), ou seja, esquecer-se do conhecimento já aprendido [1].

Os modelos ART são redes competitivas, auto-organizadas, dinâmicas e modulares. Quando uma amostra é apresentada, após a leitura dos dados uma competição ocorre sobre suas categorias na camada de saída, na qual o vencedor leva tudo. Em seguida, é escolhido o neurônio que otimiza a função de ativação, desse modelo entre os nós que mais se aproxima do parâmetro procurado. Durante o processo de classificação, é escolhida uma categoria para representar um dado, em seguida, é realizado o teste de vigilância pelo subsistema orientado para determinar se a categoria vencedora satisfaz um critério de correspondência. Se a confiança em tal hipótese for maior que o limite mínimo (ou seja, o parâmetro de vigilância ρ), a rede neural entra em um estado de ressonância e o aprendizado é permitido. Caso contrário, a categoria escolhida *a priori* é inibida, a próxima categoria de classificação mais alta é selecionada e a pesquisa é retomada. Se nenhuma categoria satisfizer as condições de ressonância necessárias, então uma nova é criada para codificar a amostra de entrada apresentada [2].

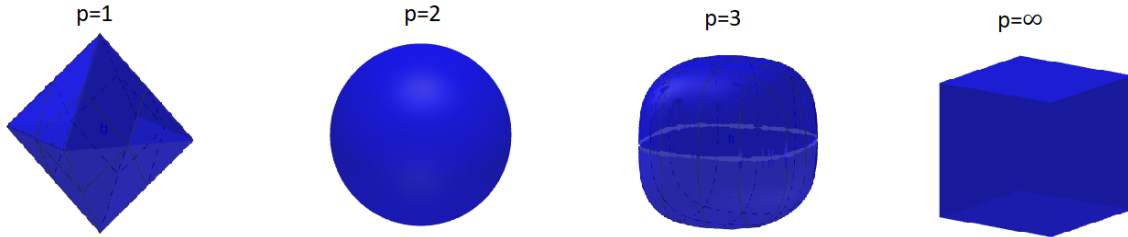
As condições de ressonância dependem do parâmetro de vigilância ρ , o qual determina o grau de variação admitido no aprendizado de categorias, ou seja, quão refinada será a rede. Portanto, baixo padrão de vigilância implica em maiores generalizações [1].

Uma abordagem para tentar melhorar o desempenho desta rede é a alteração da sua topologia, tendo como consequência a modificação na forma como os dados são classificados. Deste modo, com uma maior gama de topologias que podem ser utilizadas o usuário pode encontrar uma representação mais adequada dos dados. Com isso, há maiores possibilidades da rede aprender padrões e características relevantes para a classificação correta. Uma das formas de modificar a topologia da rede é através da alteração da métrica utilizada nos cálculos dos centros de categorias. A métrica é fundamental para determinar a distância entre o dado e as categorias existentes. Dependendo da métrica escolhida, os dados serão

¹Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG,
angela.moreno@unifal-mg.edu.br

agrupados de maneiras diferentes, o que pode impactar significativamente a capacidade da rede no processo de classificação ou previsão, podendo melhorar o desempenho. Uma vez que, a variação das topologias das categorias expande as possibilidades de representação dos dados, possibilitando capturar formas mais complexas de agrupamentos.

Figura 1: Diferentes formas de categorias em \mathbb{R}^3 centradas em x_0 conforme p aumenta.



Dessa forma, a essência deste trabalho é apresentar uma visão dessa arquitetura bem como os resultados obtidos utilizando diferentes métricas como a do mínimo (distância *Fuzzy*), norma Euclidiana e norma p (Figura 1). Além de mostrar seu impacto em problemas diversos da saúde como, por exemplo, na classificação de doenças como Parkinson, detecção de Câncer de Mama, detecção de Câncer de Pâncreas, Problemas da Coluna Vertebral, previsão de sobrevida em relação à cirurgia cardíacas, entre outras [3].

Referências

- [1] CARPENTER, G. A.; GROSSBERG, S. A massively parallel architecture for a self-organizing neural pattern recognition machine. *Computer vision, graphics, and image processing*, Maryland Heights, US, v. 37, n. 1, p. 54–115, 1987. DOI:<[https://doi.org/10.1016/S0734-189X\(87\)80014-2](https://doi.org/10.1016/S0734-189X(87)80014-2)>.
- [2] SILVA, L. E. B. da; ELNABARAWY, I.; WUNSCH, D. C. A survey of adaptive resonance theory neural network models for engineering applications. *Neural Networks*, v. 120, p. 167–203, 2019. ISSN 0893-6080. DOI:<<https://doi.org/10.1016/j.neunet.2019.09.012>>.
- [3] MORENO, A. L. *Redes Neurais ART e ARTMAP com Treinamento Continuado: Uma apresentação detalhada dos principais tipos de redes neurais do tipo ART e ARTMAP*. Saarbrücken: Novas Edicoes Academicas, 2016. ISBN 978-3330740051.

Desigualdade Isoperimétrica em Formas Espaciais

Celso Viana¹

Resumo: Nesta palestra iremos discutir a famosa desigualdade isoperimétrica no plano e suas generalizações para outros ambientes. Esta desigualdade é equivalente ao problema isoperimétrico clássico que visa descrever as regiões de menor perímetro sobre restrições de volume. As geometrias de interesse nessa palestra incluem desde superfícies mínimas no \mathbb{R}^3 até os espaços de curvatura constante conhecidas como formas espaciais, cujos exemplos principais são o plano e a esfera.

Referências

- [1] V. Blasjo, *The isoperimetric problem*, Amer. Math. Monthly 112, no. 6, 526-566 (2005).
- [2] S. Brendle, *The isoperimetric inequality for a minimal submanifold in Euclidean space*. J. Amer. Math. Soc. 34 (2021), no. 2, 595–603.
- [3] P. Li, R. Schoen, and S.T. Yau, *On the isoperimetric inequality for minimal surfaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 11, 237-244 (1984)
- [4] C. Viana, *Isoperimetry and volume preserving stability in real projective spaces*. J. Differential Geom. 125 (1), 187-205, 2023

¹Universidade Federal de Minas Gerais
celso@mat.ufmg.br

Um algoritmo para a resolução do problema de designação de disciplinas a professores, em um contexto universitário

Miguel Rodrigues Guimarães de Oliveira ¹

Mayron César de Oliveira Moreira ²

Andreza Cristina Beezão Moreira ³

Resumo: O problema de designação é um clássico na área de Otimização Combinatória. Uma de suas vertentes se trata da designação de professores (TAP, do inglês *Teacher assignment problem*), que consiste em distribuir um conjunto de disciplinas para um determinado grupo de professores, considerando uma série de regras, como o número mínimo de horas semanais que um professor deve lecionar, regras trabalhistas, acordos institucionais/departamentais, entre outras. Além disso, costuma-se também considerar as preferências dos docentes, objetivando que a maior quantidade de professores lecionem matérias de seu interesse.

A designação de professores para disciplinas pode ser modelada como um problema de programação inteira, composto por variáveis binárias [1]. Problemas dessa natureza se enquadram, em geral, na classe dos problemas NP-difíceis, conforme indicam os trabalhos [2], [3], [4]. Isso significa que não se conhece um algoritmo exato e polinomial e, por isso, é importante a proposição de abordagens que visem tanto gerar quanto validar soluções para tal problema.

Por ter um caráter muito combinatório, o TAP pode, também, ser modelado através de um conjunto de restrições. Optamos, portanto, por implementar um algoritmo baseado na técnica de programação por restrição, ou *Constraint Programming (CP)*, em inglês. Esta técnica tem conseguido espaço como algoritmo para solucionar problemas de designação, em geral. Como exemplo disso, [5] usam CP para organizar o agendamento de uma sala de operações. Outro trabalho que aborda um problema e forma de solução semelhantes é o de [7], em que a técnica é utilizada para resolver a alocação de recursos em atividades repetitivas em contexto de construção industrial, como na construção de rodovias, ferrovias e gasoduto. Por fim, citamos o trabalho [6], também sobre ordenação em contexto acadêmico. Os autores usaram *solution-based phase saving* e *hot starts*, os quais fornecem, respectivamente, um direcionamento para o solver da região próxima da melhor solução encontrada e um ponto de partida para o algoritmo que utilizou programação por restrição. Com essas ferramentas foram obtidos resultados semelhantes aos de abordagens focadas em heurísticas, dentre elas a *Simulated Annealing* e *Adaptive Large Neighborhood Search*.

¹Universidade Federal de Lavras,
miguel.oliveira2@estudante.ufla.br

²Universidade Federal de Lavras,
mayron.moreira@ufla.br

³Universidade Federal de Lavras,
andreza.moreira@ufla.br

Foram utilizadas ferramentas da *Google OR-Tools* e, para testar a qualidade do algoritmo proposto, realizamos um experimento computacional utilizando dados de um departamento de uma universidade brasileira. A solução gerada gastou um tempo total de processamento de menos de 10 segundos, com 57.89% das composições de turmas distribuídas para professores que as preferiam. Propomos, ainda, uma interface que permite a interação do usuário com o algoritmo e seus resultados. Como sugestão para trabalhos futuros, propomos a validação desta interface junto aos usuários, fazendo um estudo de *design* para melhor adequá-la às suas necessidades. Por fim, um ponto bastante relevante é a possível adaptação deste método de solução para outros departamentos, com condições similares de atribuição de docentes a disciplinas.

Referências

- [1] R. Karp. *Reducibility Among Combinatorial Problems*, In: Jünger, M., et al. 50 Years of Integer Programming 1958-2008, v. 40, p. 85–103, Springer, Berlin, Heidelberg, 1972. DOI:10.1007/978-3-540-68279-0_8
- [2] S. Sahni, T. Gonzalez. P-complete approximation problems, *J. ACM, Association for Computing Machinery*, 1976. DOI: 10.1145/321958.321975.
- [3] V. A. Bardadym. *Computer-aided school and university timetabling: The new wave*. In: BURKE, E.; ROSS, P. (Ed.). *Practice and Theory of Automated Timetabling*. p. 22-45, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996. ISBN 978-3-540-70682-3.
- [4] J. HARTMANIS. Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness (michael r. garey and david s. johnson). v.24, n.1, p. 90–91, *SIAM Review*, 1982. DOI: 10.1137/1024022.
- [5] T. Wang, N. Meskens, D. Duvivier. Scheduling operating theatres: Mixed integer programming vs. constraint programming. v.247, n.2, p. 401–413, *European Journal of Operational Research*, 2015. ISSN 0377-2217.
- [6] Y. Tang. Scheduling optimization of linear schedule with constraint programming. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2018. DOI: 10.1111/mice.12277.
- [7] E. Demirovic, P. J. Stuckey. *Constraint programming for high school timetabling: A scheduling-based model with hot starts*. In: HOEVE, W.-J. van (Ed.). *Integration of Constraint Programming, Artificial Intelligence, and Operations Research*. p. 135–152, Springer International Publishing, 2018. ISBN 978-3-319-93031-2.

Construção do hipercubo booleano associado à permutação 1203 do rotulamento A do código genético

Bianca Lapa Ribeiro¹
Anderson José de Oliveira²

Resumo: O estudo do código genético, por meio da modelagem, análise e interpretação de diversos fenômenos, utiliza estruturas matemáticas, a fim de caracterizar propriedades associadas aos aminoácidos e possíveis interferências em diversas situações, como no caso das mutações genéticas. O diagrama de Hasse, o código de Gray e o hipercubo booleano são algumas dessas estruturas. De acordo com [1] e [2], o mapeamento das bases nitrogenadas adenina, citosina, guanina, timina/uracila, representadas por $N = \{A, C, G, T/U\}$ com o alfabeto 4-ário da estrutura de anel, denotado por $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, permite obter 24 permutações, organizadas em três rotulamentos (A, B e C), de acordo com as características geométricas associadas a cada uma das permutações. O diagrama de Hasse é composto por 64 códons, dispostos em 6 linhas, com o objetivo de organizar os códons do código genético, para analisar as propriedades dos aminoácidos e classificar os códons conforme suas características. Segundo [3], o código genético pode ser representado por um hipercubo booleano 6-dimensional, construído a partir da tabela do código de Gray, em que os vértices são representados pelos códons. O hipercubo representa simultaneamente todo o conjunto de códons e mantém o controle de quais códons são adjacentes.

Em [3] é proposta a construção do hipercubo booleano 6-dimensional, associado ao código genético, no entanto, não é apresentado um procedimento sistemático para a realização dessa construção.

O objetivo deste trabalho é apresentar a construção do hipercubo booleano associado à permutação 1203 do rotulamento A do código genético, para analisar as possíveis semelhanças e diferenças com as construções realizadas em [3].

O hipercubo booleano associado à permutação 1203 (caso primal) do rotulamento A, está apresentado na Figura 1. Pode-se notar que cada um dos elementos refere-se a um elemento da extensão do corpo primo $\text{GF}(2)$ para $\text{GF}(2^6)$, onde cada um dos 64 códons do código genético tem um representante na extensão.

As cores são representadas de acordo com as propriedades dos aminoácidos. Os códons hidrofóbicos (representados pela cor vermelha), são aqueles que não possuem “afinidade” com a água. Os códons hidrofílicos (representados pela cor azul), são os que possuem “afinidade” com a água. O códon UGG é um anel aromático, que codifica o aminoácido triptofano, responsável pela sensação de bem estar (representado pela cor verde musgo). Os códons em amarelo representam o hidrogênio. Os códons representados em laranja são

¹Discente do Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria - Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG, bianca.ribeiro@sou.unifal-mg.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG, anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

classificados como cadeia alifática. Os códons em rosa são classificados como hidroxila. Ademais, observa-se os aminoácidos sulfidríla ou tiol (representados pela cor roxa) e os básicos (representados pela cor verde claro). Por fim, o códon STOP (representado pela cor preta), que é utilizado para interromper a proteína antes de seu término.

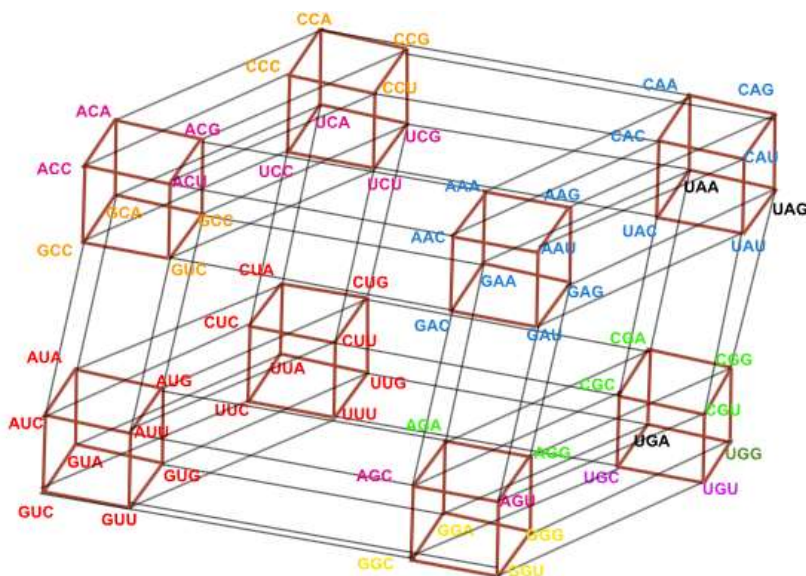


Figura 1: Hipercubo booleano associado à permutação 1203 (primal) do rotulamento A.

Desta forma, é possível analisar conexões existentes entre Biologia, Álgebra, Geometria e Engenharia, no processo de caracterização do código genético e transmissão de informações genéticas, por meio de estruturas matemáticas.

Referências

- [1] FERNANDES, R. S. **Aplicações do diagrama de Hasse na análise das propriedades dos aminoácidos do código genético**. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria). Mestrado, Universidade Federal de Alfenas-UNIFAL, Alfenas, 2021.
- [2] FERNANDES, R. S.; OLIVEIRA, A. J. Caracterização das propriedades dos aminoácidos por meio do diagrama de Hasse associado ao rotulamento A do código genético. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v. 2, n. 4, p. 81-100, 2021.
- [3] JIMÉNEZ-MONTAÑO, M. A.; MORA-BASÁÑEZ, C. R.; POSCHEL, T. 2002. On the Hypercube Structure of the Genetic Code. **Elsevier Science Publishers**. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0204044.pdf>.

Soluções da Equação da Onda Amortecida.

Daniel de Lima Pazim¹
 Marcelo Rempel Ebert²

Resumo: Considere o problema de Cauchy em \mathbb{R}^n

$$V_{tt}(t, x) - \Delta V(t, x) + V_t(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$V(0, x) = V_0(x), \quad V_t(0, x) = V_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

E defina $X_1(0, T)(\mathbb{R}^n) = C([0, T]; H_0^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$, para $0 < T \leq \infty$ e o espaço das funções ponderadas

$$L^{1,\gamma}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^1(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{1,\gamma} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^\gamma |u(x)| dx < \infty \right\}.$$

Indicaremos por $\|\cdot\|_q$ e $\|\cdot\|_{H^1}$ as normas usuais de $L^q(\mathbb{R}^n)$ e $H^1(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. Além disso, quando $q = 2$ usaremos $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_2$ para facilitar a notação. Nosso objetivo será apresentar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja $n \geq 1$ e $\gamma \in [0, \infty]$. Se $[V_0, V_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\gamma}(\mathbb{R}^n))$, então existe uma única solução $V \in X_1(0, \infty)(\mathbb{R}^n)$ para o problema (1)-(2) satisfazendo:*

$$\begin{aligned} \|V(t, \cdot)\| &\leq C(1+t)^{-n/4-\gamma/2} (\|V_0\|_{H^1} + \|V_0\|_{1,\gamma} + \|V_1\| + \|V_1\|_{1,\gamma}) \\ &\quad + C(1+t)^{-n/4} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} V_0(x) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} V_1(x) dx \right| \right). \end{aligned}$$

Referências

- [1] R. Ikehata. *New decay estimates for linear damped wave equations and its applications to nonlinear problem*. Mathematical methods in the applied sciences, 27(8):865-889, 2004.
- [2] A. Matsumura. *On the Asymptotic Behavior of Solutions of Semi-linear Wave Equations*, Vol 12. Publ RIMS: Kyoto Univ., 1976; 169-189.

¹Aluno de Mestrado, Universidade de São Paulo, USP-RP
 daniel.pazim@usp.br

²Professor orientador, Departamento de Computação e Matemática,
 ebert@ffclrp.usp.br

Determinante Regularizado em Espaços Simétricos

Gedeana Pantoja¹Alexandre Casassola Gonçalves²

Resumo: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão $n \geq 1$, e Δ_g o Laplaciano associado a métrica g . Definimos o determinante regularizado do Laplaciano como:

$$\det \Delta_g := \exp \left(-\frac{d}{ds} \zeta(s, \Delta_g) \right) \Big|_{s=0}$$

onde $\zeta(s, \Delta_g)$ é a função zeta espectral. O determinante regularizado nasce então, do estudo das funções zeta espectral. É sabido que existem várias formas de calcular esses determinantes regularizados. Nesse trabalho estudaremos a técnica de [1] que nos produz a menor fórmula para calcular tais determinantes.

A determinação dos espectros laplacianos em variedades riemannianas arbitrárias é um problema difícil, estando aberto no caso geral, mas em casos muito particulares, esse espectro já foi completamente calculado, como por exemplo nas esferas euclidianas e espaços projetivos. A razão disto está em um grande grupo de simetrias, ou seja, de automorfismos que preservam a métricas, que estes espaços possuem. Por isso, faremos nosso estudo de determinante regularizado em uma subclasse dos chamados espaços simétricos.

É interessante estudar tal assunto porque os determinantes regularizados têm diversas aplicações, tanto na Física como na Matemática. Na física, por exemplo, é possível estabelecer uma fórmula para determinantes de uma classe específica de operadores diferenciáveis. Já matemática é possível utilizar o determinante do laplaciano torcido para definir a torção analítica $T_a(M; g)$ de uma variedade Riemanniana fechada M em relação a uma representação ortogonal g de seu grupo fundamental.

Referências

- [1] F. Rafael et al. Regularized determinant of the laplacian on forms over odd dimensional projective spaces. 2022.

¹Aluna de Mestrado, Universidade de São Paulo, USP-RP
g.pantoja@usp.br

²Professor orientador, Departamento de Computação e Matemática,
acasa@ffclrp.usp.br

Contribuições de conceitos estudados durante a graduação em Matemática - Licenciatura na análise de problemas biológicos

Jaqueline Jacira do Lago¹

Anderson José de Oliveira²

Resumo: Durante o curso de Licenciatura em Matemática, muitas disciplinas da área da Matemática Pura e da Aplicada são estudadas, além das disciplinas voltadas ao aspecto pedagógico. No momento em que essas disciplinas da área da Matemática são trabalhadas, a maioria dos estudantes não consegue visualizar como esses conceitos, muitas vezes considerados abstratos, poderão ser aplicados em outras áreas do conhecimento. Desta forma, o objetivo deste trabalho é analisar possibilidades de aplicações e identificar possíveis conexões com conceitos e teorias estudados durante a graduação.

A Matemática Aplicada possibilita contribuições significativas para a sociedade, por exemplo, nos trabalhos desenvolvidos por [1], [2], [3] e [4], são apresentadas modelagens algébricas do código genético, onde diversos estudos já foram realizados, a fim de analisar fenômenos biológicos associados às construções, como a análise dos rotulamentos associados ao código genético, buscando analisar as permutações associadas a esses rotulamentos e como esses estudos poderiam ser aplicados em fenômenos mutacionais, dentre outros aspectos relacionados a problemas biológicos.

A seguir serão apresentadas algumas conexões identificadas entre conceitos e teorias estudados durante a graduação em Matemática - Licenciatura e alguns problemas biológicos.

Em relação à disciplina Fundamentos de Álgebra, pode-se citar os conceitos de estrutura de grupos: definições de grupos, grupos finitos e infinitos, teorema da unicidade do elemento neutro e elemento inverso, definição de tábuas de operações, como pré-requisito para a compreensão das estruturas de anéis e corpos, que podem ser aplicados na construção de códigos do tipo BCH (Bose, Chaudurin e Hocquenghen), o conceito de isomorfismo relacionado a um sistema de comunicação digital, uma vez que quando as estruturas algébricas do codificador e do modulador (constelação de sinais) são isomorfas, diz-se que esse isomorfismo é um mapeamento casado (MC) e o conceito de elemento gerador do grupo multiplicativo S , que refere-se às soluções da equação $x^4 - 1 = 0$. Todos esses conceitos são trabalhados no processo de geração de proteínas e análises de sequências de DNA.

Quanto à disciplina Introdução à Teoria dos Números, nota-se a importância das operações com módulo, no processo de determinação da estrutura algébrica do alfabeto do código genético e as conversões da base decimal para a base binária, no processo de mapeamento \mathbb{Z}_4 .

¹Discente do Curso de Matemática - Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG, jaqueline.lago@sou.unifal-mg.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG, anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

Em Matemática Superior, também foram identificadas importantes conexões, como por exemplo, o conceito de conjunto parcialmente ordenado, associado a uma relação de ordem, a definição de reticulado, a construção e a análise de diagramas de Hasse, associados à construção do código genético.

Em relação à disciplina de Lógica e Combinatória, também foram identificadas algumas conexões, destacando: combinação relacionada às 64 possibilidades dos códons formados por uma trinca de bases nitrogenadas (adenina, citosina, guanina e timina/ uracila), representadas pelas letras A, C, G e T/U , agrupadas três a três, que codificam 20 tipos de aminoácidos diferentes, para a formação das proteínas e aos rotulamentos, que são todas as possibilidades de associações dos elementos do conjunto $N = \{A, C, G, T/U\}$, relacionado conjunto às bases nitrogenadas, com os elementos do anel $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, além de conceitos associados aos conectivos lógicos.

Os conceitos matemáticos utilizados no estudo e as conexões apresentadas anteriormente, podem ser resumidos na Figura 1.

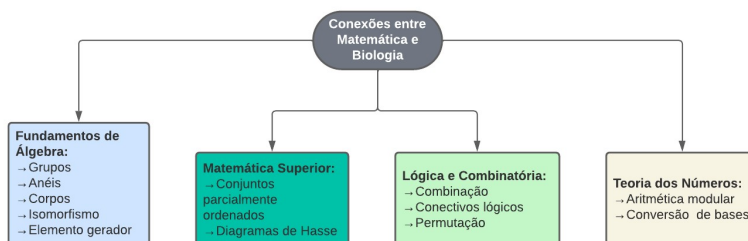


Figura 1: Conexões entre Matemática e Biologia.

Fonte: dos autores.

Referências

- [1] L. C. B. Faria. “**Existências de Códigos Corretores de Erros e Protocolos de Comunicação em Sequências de DNA** ”. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- [2] R. S. Fernandes. “**Aplicações do diagrama de Hasse na análise das propriedades dos aminoácidos do código genético**”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2021.
- [3] R. S. Fernandes e A. J. Oliveira. “Caracterização das propriedades dos aminoácidos por meio do Diagrama de Hasse associado ao rotulamento A do código genético”. Em: **Brazilian Electronic of Mathematics** 4 (2021).
- [4] L. R. Pereira. “**Análise mutacional via Códigos BCH na identificação de malformações oculares graves**”. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2022.

Funções hiperbólicas de terceira ordem, funções de Appell e a representação polar dos números ternários

Ottoni, J. E.¹Ottoni, A. G. S.²

Resumo:

Os chamados números ternários, ou tricomplexos, ou complexos ternários; números complexos de três dimensões, foram introduzidos em uma série de estudos relativamente recentes [1], embora os primeiros passos na direção desse tipo de generalização dos números complexos tenham sido dados há muito mais tempo. Por exemplo, como primeiro passo em direção a uma extensão dos números complexos, em uma série de artigos, os matemáticos estudaram um espaço tridimensional com comprimento de arco dado pela fórmula cúbica definida por $d^3s = d^3x + d^3y + d^3z - 3dxdydz$. Esse estudo foi iniciado pelo matemático francês P. Appell [2, 3], escrito em 1877, onde ele introduz uma certa generalização das funções trigonométricas usuais relacionadas com esse comprimento de arco. Então décadas depois, as propriedades geométricas desses espaços tridimensionais foram primeiro estudadas por P. Humbert em uma série de artigos [4, 5, 6] e por J. Devisme [7, 8], entretanto todos esses resultados foram obtidos sem o uso explícito de algum tipo de extensão dos números complexos, com exceção de uma pequena observação feita pelo próprio Appell, em seu primeiro artigo [2].

Os números ternários estão sendo investigados na Física Teórica nos últimos anos porque, aparentemente estão relacionados com algumas simetrias da física de alta energia, possibilitando uma maneira diferente de compreender fenômenos que envolvem os problemas dos chamados números quânticos de cor, e das três gerações, ou famílias de partículas elementares do Modelo Padrão [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

O presente trabalho tem como objeto de estudo principal a formalização da álgebra e dos aspectos geométricos e analíticos dos números ternários e é o desenvolvimento e desdobramento de uma orientação de mestrado recentemente concluída no PROFMAT/CAP.

Referências

- [1] Lipatov, L.N., Traubenberg, R. M. and Volkov, G. G. On the ternary complex analysis and its applications, J. Math. Phys. 49(1), 013502, 2008.

¹Professor, DEFIM, UFSJ
jeottoni@ufsj.edu.br

²Professora, DEFIM, UFSJ
amandagso@ufsj.edu.br

- [2] Appell, P., Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires, Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences, p. 1378, 1877.
- [3] Appell, P., Proposition d’algèbre et de géométrie déduit de la considération des racines cubiques de l’unité’, Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences, p. 540, 1877.
- [4] Humbert, P., Géométrie plane dans l’espace attaché à l’opérateur Δ_3 , Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Gauthier-Villars, volume 9, number 21, 1942.
- [5] Humbert, P., Note relative à l’article: Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques, Commentarii Mathematici Helvetici, Bull. Math, volume 13, number 1, p. 67, 1940.
- [6] Humbert, P., Réduction de formes quadratiques dans un corps algébrique fini, Commentarii Mathematici Helvetici, Bull. Math, volume 23, number 1, p. 50-63, 1949.
- [7] Devisme, J., Sur l’équation de M. Pierre Humbert, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, Série 3, volume 25, p. 143-238, 1933.
- [8] Devisme, J., Sur une généralisation de l’équation de Laplace, volume 8, p.145-159, J. Math. Pures Appl. 19 (1940) 359, 1929.
- [9] Kerner, R. and Suzuki, O., The discrete quantum origin of the Lorentz group and the Z_3 -graded ternary algebras, Proceedings of the RIMS Conference on Mathematical Physics, 2014, p. 54-72.
- [10] Kerner R., Ternary generalization of Pauli’s principle and the Z_6 -graded algebras, Physics of Atomic Nuclei, volume 80, number 3, p.529-531, 2017.
- [11] Kerner R., Ternary $Z_2 \times Z_3$ graded algebras and ternary Dirac equation, Physics of Atomic Nuclei, volume 81, number 6, p.871-889, 2018.
- [12] Kerner R., The Z_3 -graded extension of the Poincaré group, Preprint, 2023.
- [13] Kerner R., and Lukierski, J., Z_3 -graded colour Dirac equation for quarks, confinement and generalized Lorentz symmetries, Phys. Letters B, 792, p.233-237, 2019.
- [14] Kerner R., Graduation Z_3 et la racine cubique de l’équation de Dirac, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, volume 312, number II, p.191-195, 1991.
- [15] Kerner R., Cubic and Ternary Algebras, Ternary Symmetries and the Lorentz Group, Proceedings of Math. Phys. Conference, RIMS, volume 1705, p.134–146, 2010.
- [16] Kerner R., Z_3 -graded algebras and the cubic root of the supersymmetry translations, J. Math. Phys., volume 33, p.403, 1992.
- [17] V. Abramov and R. Kerner and B. Le Roy, Hypersymmetry: a Z_3 -graded generalization of supersymmetry, Journal of Math.Phys., volume 38, number 3, p. 1650-1669, 1997.

Estudo Qualitativo do Modelo Epidemiológico SIRD com Taxas não Constantes

Kaleb de Jesus Silva e Souza ¹José Paulo Carvalho dos Santos ²

O modelo SIRD (Susceptíveis, Infectados, Recuperados e Mortos) é uma ferramenta essencial para compreender a dinâmica de epidemias, como por exemplo a epidemia causada pelo vírus da COVID-19 [3]. Vários estudos mostram que as taxas de transmissão ao longo da epidemia não são constantes e que variam ao longo do tempo [1, 2]. Ao considerarmos taxas não constantes, podemos ter uma análise mais precisa da propagação da doença e da eficiência das medidas de controle.

O modelo SIRD com taxas não constantes é dado por:

$$\begin{cases} S'(t) &= -\beta(t)S(t)I(t), \\ I'(t) &= \beta(t)S(t)I(t) - \gamma(t)I(t) - \delta(t)I(t), \\ R'(t) &= \gamma(t)I(t), \\ D'(t) &= \delta(t)I(t), \end{cases} \quad (1)$$

em que $\beta(t)$ representa a taxa de contaminação, $\gamma(t)$ denota a taxa de recuperação e $\delta(t)$ a taxa de mortalidade ao longo do tempo.

Nesse contexto, investigamos o impacto das taxas não constantes na dinâmica do modelo. Demonstramos que as soluções do sistema são limitadas e não negativas. Além disso, estabelecemos condições de limiar relacionadas ao número básico de reprodução $\mathcal{R}_0(t) = \frac{\frac{1}{t} \int_0^t \beta(s) ds}{\frac{1}{t} \int_0^t \gamma(s) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \delta(s) ds}$, indicando que se $\mathcal{R}_0(t) < 1$, a epidemia tende a se extinguir, enquanto $\mathcal{R}_0(t) > 1$ sugere um crescimento inicial seguido de extinção dos infectados. Esses resultados têm implicações importantes para a compreensão da dinâmica do espalhamento

¹Aluno de Graduação, Universidade Federal de Alfenas, kaleb.souza@sou.unifal-mg.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática UNIFAL-MG, jose.santos@unifal-mg.edu.br

de doenças e podem ser valiosos na formulação de estratégias de controle da doença.

Algumas simulações usando Python foram feitas usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para sistemas de equações diferenciais ordinárias que mostram que os nossos experimentos numéricos concordam com os resultados teóricos obtidos. Nas simulações $\beta_0 = 0,5499, a_0 = 0,1452, \gamma = 0.1071, \delta = 0.02$ e $\beta(t) = \beta_0 - a_0(1 - e^{-c_0 t})$ com $c_0 \geq 0$.

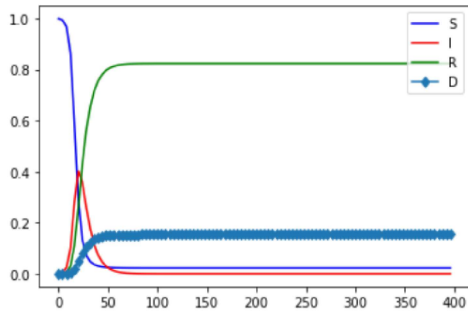


Figura 1: Simulação do modelo (1) com $c_0 = 0,02$ e $\mathcal{R}_0 \geq 3.1841$.

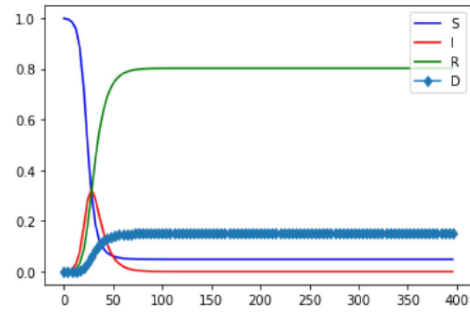


Figura 2: Simulação do modelo (1) com $c_0 = 2,0$ e $\mathcal{R}_0 \geq 3.1841$.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio concedido para a realização do trabalho, conforme o Edital N^o 13/2023 da PRPPG.

Referências

- [1] FANELLI, D., PIAZZA, F. **Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France.** *Chaos, Solitons & Fractals*, 134, 109761, 2020.
- [2] LIU, X., STECHLINSKI, P. **Infectious disease models with time-varying parameters and general nonlinear incidence rate.** *Applied Mathematical Modelling*, v 36, p. 1974-1994, 2012.
- [3] LOPEZ-FLORES, M. M. et al. **Equações diferenciais e modelos epidemiológicos**, Rio de Janeiro: Editora IMPA, 2021.

Rede Neural Autoexpansível baseada na Teoria da Ressonância Adaptativa para a Identificação de Desordens no Fígado

Matheus Rodrigo Aprigio Candido ¹

Angela Leite Moreno ²

Resumo: O aprendizado de máquina vem se destacando na detecção de várias doenças, tais como, diversos tipos de câncer, doença de Parkinson, entre outras. Entre elas a detecção de doenças no fígado é extremamente importante, pois o fígado desempenha papel crucial no sistema digestório e é a maior glândula do corpo humano, realizando diversas funções vitais para o organismo, entre elas destacam-se a eliminação de substâncias tóxicas e a produção da bile, que é essencial para a digestão de gorduras. Contudo, a maioria dessas doenças são assintomáticas, por isso um diagnóstico precoce é fundamental para a redução do número de óbitos. Com isso surgiram alguns métodos de aprendizado de máquina cujo objetivo é a identificação de pacientes com desordem no fígado, tais como o método de Benchmark utilizado por [1], e os métodos ANN-1, ANN-2, ANN-3, Decision trees (DT), Support Vector Machine (SVM), K-Nearest Neighbors (KNN), Random Forest (RF), XGBoost e Electron Beam Melting (EBM) utilizados por [2].

É nesse contexto que esse trabalho se insere ao apresentar os resultados obtidos pela rede neural baseada na Teoria da Ressonância Adaptativa Autoexpansível Euclidiana [3], abreviadamente (ARTAEE), na classificação de doenças hepáticas. O processo de pesquisa foi realizado implementando as redes no Scilab (software para computação numérica), cujo banco de dados utilizado para os experimentos foi o BUPA (*British United Provident Association*), disponível no repositório *UCI Machine Learning Repository* [4].

Para as simulações o método utilizado foi a validação cruzada (*cross-validation*), ou seja, os dados foram divididos em 10 partes mutuamente excludentes, dos quais nove são utilizados para treinamento e um para teste. Esse procedimento é realizado 10 vezes. Isso foi feito com o objetivo de avaliar a capacidade de generalização de um modelo. As duas principais métricas de validação aplicadas nos resultados obtidos foram acurácia (*ACC*), que avalia a performance geral do modelo e F1-Score, uma média harmônica e bastante utilizada para problemas na área da saúde.

Em relação a classificação, o objetivo foi encontrar a combinação de β e ρ que proporcionassem os resultados mais favoráveis para a classificação de doenças hepáticas no contexto deste estudo. Para isso, o parâmetro β foi variado de 0,05 a 0,70, com um incremento de 0,05, enquanto o parâmetro ρ foi variado de 0,05 a 0,7, com um incremento de 0,001, simultaneamente. Para melhorar a qualidade dos resultados obtidos, utilizou-se algumas formas de pré-processamento. Primeiramente verificou-se os resultados com os dados sem nenhuma forma de pré-processamento (ARTAEE). Em seguida, utilizou-se a normalização dos dados em relação aos valores mínimos e máximos de cada parâmetro

¹Universidade Federal de Alfenas,
matheus.candido@sou.unifal-mg.edu.br

²Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG,
angela.moreno@unifal-mg.edu.br

(ARTAE-1), deste modo, cada um dos parâmetros foi contraído para o intervalo $[0, 1]$. Como alguns dos parâmetros eram relativamente altos, também foi realizado um pré-processamento utilizando a função logarítmica (ARTAE-2). E, por fim, utilizou-se ambas as ideias: primeiramente aplicando a função logarítmica e, em seguida, normalizando em relação aos valores mínimos e máximos de cada parâmetro ao final da aplicação da função logarítmica (ARTAE-3). Os resultados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Comparativo dos resultados obtidos com os presentes na literatura.

Autores	Método	ACC (%)	Sens. (%)	Esp. (%)	F1-Score
MCDERMOTT	Benchmark	58,00	N.A.	N.A.	N.A.
ABEYRATHNA	ANN-1	61,20	N.A.	N.A.	0,671
	ANN-2	59,40	N.A.	N.A.	0,652
	ANN-3	60,20	N.A.	N.A.	0,656
	DT	59,60	N.A.	N.A.	0,728
	SVM	57,10	N.A.	N.A.	0,622
	KNN	56,60	N.A.	N.A.	0,638
	RF	60,70	N.A.	N.A.	0,729
	XGBoost	63,50	N.A.	N.A.	0,656
	EBM	62,90	N.A.	N.A.	0,710
Este Trabalho	ARTAE	71,03	93,00	40,71	0,790
Este Trabalho	ARTAE-1	72,42	81,50	60,00	0,771
Este Trabalho	ARTAE-2	73,63	100,00	76,76	0,795
Este Trabalho	ARTAE-3	75,93	87,00	60,76	0,807

N.A.: Não apresenta

Pode-se notar que as mudanças na rede demonstraram ser eficazes, alcançando melhores métricas em relação aos resultados inicialmente obtidos. Esses resultados satisfatórios indicam que esse modelo pode ser utilizado como suporte no processo de tomada de decisão médica, auxiliando no diagnóstico precoce de desordens hepáticas.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da FAPEMIG.

Referências

- [1] MCDERMOTT, J.; FORSYTH, R. S. Diagnosing a disorder in a classification benchmark. *Pattern Recognition Letters*, Elsevier, v. 73, p. 41–43, 2016.
- [2] ABEYRATHNA, K. D. et al. A multi-step finite-state automaton for arbitrarily deterministic tsetlin machine learning. *Expert Systems*, Wiley Online Library, v. 40, n. 4, p. e12836, 2023.
- [3] MORENO, A. L. *Redes Neurais ART e ARTMAP com Treinamento Continuado*. Saarbrücken: Novas Edicoes Academicas, 2016. ISBN 978-3330740051.
- [4] DUA, D.; GRAFF, C. *UCI Machine Learning Repository*. 2017. Disponível em: <http://archive.ics.uci.edu/ml>.

Um estudo de Sistema de Equações Diferenciais Planares

Ana Carolina Nicodemos da Silva¹

Patrícia Tempesta²

Resumo:

O estudo das equações diferenciais como área de pesquisa dentro do ramo da Matemática se deve a Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que durante o Século XVII desenvolveram o estudo do Cálculo Diferencial. Outros matemáticos famosos contribuíram para o desenvolvimento desta área, como por exemplo alguns membros da família Bernoulli, como Jacob, Johann e Daniel, e célebres matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Poicaré e Lyapunov.

Este trabalho foi elaborado no Projeto de Iniciação Científica intitulado "Aplicações de Álgebra Linear em Sistema de Equações Diferenciais Planares". Num primeiro momento, foi estudada a teoria clássica de equações diferenciais ordinárias, usando como material base os livros [1] e [3], afim de abordar conceitos, técnicas e metodologias básicas que proporcionaram embasamento teórico para o estudo subsequente da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais. Tal teoria propõe compreender o comportamento das soluções dos sistemas de equações de um ponto de vista geométrico, sem a necessidade de se calcular, explicitamente, as soluções dos mesmos. Esta segunda etapa do projeto teve como material de referência os livros [2] e [4].

Em particular, para os sistemas de equações diferenciais planares, o comportamento das soluções fica bem determinado, pela teoria de Álgebra Linear, mais especificamente, pelos autovalores e autovetores da matriz associada ao sistema. Nesta apresentação será abordado o comportamento geométrico das soluções desse tipo de sistema, mostrando o retrato de fase (desenho das soluções do sistema no plano) para todas as possibilidades de autovalores, reais ou complexos, que a matriz do sistema possa apresentar.

Referências

- [1] W. E. BOYCE, R.C. DIPRIMA. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
- [2] C. DOERING, A. O. LOPES. Equações diferenciais ordinárias. 2º ed. Rio de Janeiro: Impa, 2007.

¹Aluna de Matemática(Licenciatura), Universidade Federal de São João del Rei, carolinanicodemos12@aluno.ufsj.edu.br

²Professora orientadora, Departamento de Matemática e Estatística, tempesta@ufsj.edu.br

- [3] D. G. ZILL, M. R. CULLEN. Equações Diferenciais. Vol 1, 3° ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 2001.
- [4] D. G. ZILL, M. R. CULLEN. Equações Diferenciais. Vol 2, 3° ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 2001.

Classificação das C_3 -gradações da Álgebra $M_2(F)$

Ana Cristina Porto Silveira¹

Lorena Mara Costa Oliveira²

Resumo: Uma álgebra A é graduada por um grupo G , ou simplesmente, A é uma álgebra G -graduada, se A pode ser escrita como a soma direta de espaços vetoriais $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, tais que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$, onde G é um grupo finito. A ênfase neste trabalho está em classificar as G -gradações, a menos de isomorfismo de álgebras G -graduadas, presentes na álgebra $M_2(F)$, a álgebra de matrizes 2×2 sobre um corpo F , com suporte 3, ou seja, $\text{supp}(A) = \{1, g, h\}$, $1, g, h \in G$. E, por meio disso, obtemos as C_3 -gradações da álgebra $M_2(F)$, sendo C_3 um grupo cíclico de ordem 3.

Referências

- [1] OLIVEIRA, Lorena. *Varieties of algebras G -graded with involutive grading of growth almost polynomial.*, Impa, 2022.
- [2] KHAZAL, R.; BOBOC, C.; DASCALESCU, S., Group Gradings of $M_2(K)$, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (2003).

¹Aluna de bacharelado em Matemática, Universidade Federal de São João del Rei, acristinaps94@aluno.ufsj.edu.br

²Professora orientadora, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del Rei, lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Educação Financeira: da Matemática Básica à Independência Financeira

Débora Perizato¹
Angela Leite Moreno²

Resumo: A independência financeira é um processo extenso e complexo que nem todos conseguem alcançar por diversos motivos econômicos e sociais, entretanto não significa que parte desse processo não pode ser ensinado e aplicado desde a infância para a população como um todo, com a finalidade de auxiliar jovens em suas tomadas de decisões financeiras baseadas em um consumo consciente e controle de ganhos e gastos.

O primeiro passo para tentar conquistar a independência financeira é partir da capacitação financeira, que consiste em desenvolver habilidades, conhecimentos e competências para gerenciar as finanças pessoais de forma consciente e responsável. Como cada indivíduo apresenta um processamento cognitivo diferente sobre a aprendizagem, é necessário que sejam apresentados múltiplos caminhos [1] para atingir uma educação financeira de qualidade ofertada desde o Ensino Fundamental e Médio. A segurança financeira é o passo que sucede a capacitação financeira, onde um jovem adulto pode aplicar os conceitos da educação financeira desde sua primeira fonte de renda para que pondere suas necessidades e seus consumos, construindo assim, uma reserva em caso de imprevistos e realizando um planejamento para os próximos meses. Na sequência, a liberdade financeira é o momento em que após atingir uma boa quantia de reserva, a pessoa que detém esse montante, pode optar sobre qual será o destino desse dinheiro, investindo em imóveis, consórcios, aplicações financeiras públicas ou privadas que gerem algum retorno. Por último, a independência financeira é o degrau do orçamento pessoal em que não se precisa mais utilizar do próprio esforço para ter uma renda, fazendo com que o dinheiro renda a ponto de suprir as necessidades e fomentar os investimentos pessoais de forma autônoma.

É notório que o Brasil, assim como diversos outros países, apresentam diferentes condições financeiras e, segundo Destefani [2], “[...] independente do patamar social, os pais têm consciência da importância da educação financeira durante a infância [...]”. Unindo esse fato com o ideal proveniente da Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF no qual disserta que “a escola é o ambiente em que as crianças e os jovens adquirem, não só conhecimentos, mas também a capacidade de viver em sociedade, fazendo escolhas que influenciarão a realização dos seus sonhos [...]” pode-se afirmar que durante a infância, as crianças detém alta capacidade de aprender e se conscientizar de suas escolhas. Assim é imprescindível que jovens tenham acesso a uma educação financeira de qualidade, desde cedo.

¹Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG,
debora.perizato@sou.unifal-mg.edu.br

²Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG,
angela.moreno@unifal-mg.edu.br

É possível esclarecer a pergunta “por onde começar?” se partir da orientação financeira utilizando operações básicas matemáticas, como soma e subtração, desse modo inicia-se noção de entradas e saídas de um orçamento pessoal fictício junto do desenvolvimento da noção de valor e quantidade. Com o avanço do conteúdo programático educacional, torna-se possível aprofundar conhecimentos matemático-financeiros como juros simples e compostos e como isso se aplica na vida pessoal em necessidades de empréstimos ou investimentos. Segundo Gallas [4] ”A Matemática Financeira é um ramo da Matemática que pode e deve ser bastante explorada pelo professor. É um conteúdo com grande aplicabilidade prática [...]” e ”Os documentos oficiais dos Governos Estaduais e Federal, constituem ferramenta importante, mas não completa, sobre os conteúdos básicos, que são necessários ao embasamento teórico e também prático dos itens do conteúdo.” com isso, torna-se ideal transfigurar o modo de ensino da educação financeira desde a infância, apresentando aplicabilidades compreensível e palpáveis, além do desenvolvimento de uma sequência didática mais completa utilizando tabelas, planilhas, materiais manipuláveis, jogos educativos e incentivando alunos a trazerem situações do seu cotidiano para problematização em sala de aula.

Deste modo, pode-se perceber a importância de uma educação financeira introduzida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, avançado com os conceitos de acordo com a escolarização do indivíduo e oportunizando uma possível capacitação financeira, de modo que este adulto aplique os conceitos essenciais para sua vida como um cidadão crítico, com a finalidade de alcançar, no mínimo, uma determinada segurança financeira, mesmo que a autonomia financeira esteja distante da realidade de muitos brasileiros.

Referências

- [1] NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **How people learn:** Brain, mind, experience, and school. Expanded edition. Washington: National Academies Press, 2000.
- [2] DESTEFANI, E. M. Educação financeira na infância. *Revista Eventos Pedagógicos*, v. 6, n. 4, p. 274-282, 2015.
- [3] BRASIL, **Estratégia Nacional Educação Financeira:** para crianças e jovens. Brasília: Ministério da Educação, 2014. Disponível em: <<https://www.vidaedinheiro.gov.br/es/para-criancas-e-jovens/>>, Acesso em 10 dez 2023.
- [4] GALLAS, R. G. **A importância da matemática financeira no ensino médio e sua contribuição para a construção da educação financeira do cidadão.** 2013. 56f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013

Estudo comparativo das soluções dos Osciladores Harmônicos Fracionários

Elton de Oliveira Barreto ¹

Jose Eloy Ottoni²

Resumo: O cálculo fracionário é uma área em crescimento que se dedica ao estudo de derivadas e integrais fracionárias. Neste evento, exploraremos diversas abordagens, incluindo a Integral Fracionária de Riemann-Liouville, a Derivada Fracionária de Riemann-Liouville e a Derivada Fracionária de Caputo. Também analisaremos a aplicação da Transformada de Laplace na Integral Fracionária e nas Derivadas Fracionárias nas abordagens Caputo e Riemann-Liouville.

Além disso, discutiremos como o cálculo fracionário pode ser aplicado a equações diferenciais fracionárias, com destaque para o Modelo Lotka-Volterra Fracionário, um exemplo relevante na modelagem de dinâmicas populacionais.

Por fim, exploraremos o Oscilador Harmônico Fracionário, comparando-o com o Oscilador Harmônico Simples e destacando as implicações das derivadas fracionárias em seu comportamento. Este evento visa promover uma compreensão sólida desses conceitos matemáticos avançados e suas aplicações em diversos campos científicos, proporcionando uma base sólida para futuros estudos e pesquisas.

Referências

- I. CAMARGO, Rubens Figueredo. **Cálculo fracionário e aplicações**. 2009. Tese de Doutorado. [sn].
- II. ROSENDO, Danilo Castro. **Sobre a função de Mittag-Leffler**. 2008. Tese de Doutorado. Master's thesis, Unicamp.
- III. TEODORO, Graziane Sales. **Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler**. 2014. Tese de Doutorado. [sn].
- IV. TIEPPO–UFPR, Sandra Maria; GUZZO–UNIOESTE, Sandro Marcos. **Elementos do Cálculo Fracionário**.

¹Aluno de Engenharia de Bioprocessos, Universidade Federal de São João del-Rei, elton.estudos2020@aluno.ufs.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Física, Estatística e Matemática, jeottoni@ufsj.edu.br

A Utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica

Cérvulo A. F. Almeida ¹

Lucas O. Carvalho ²

Nathalia C. L. Deus ³

Gilcélia Regiane de Souza ⁴

Resumo: Esse trabalho foi desenvolvido durante a execução da disciplina Recursos Computacionais no Ensino de Matemática e objetivo foi discutir os critérios para a seleção de recursos computacionais no Ensino da Matemática. A ideia é atentarmos ao fato de que a introdução de uma ferramenta tecnológica em sala de aula deve se orientar por objetivos e competências a serem adquiridas pelos estudantes. Caso contrário, é bem provável que a ferramenta não seja realmente integrada ao processo de ensino, convertendo-se apenas em um simples adereço.

Sugerimos estratégias para decidir a melhor maneira de se empregar recursos computacionais e discutimos a escolha e adequação desses recursos aos objetivos conceituais e pedagógicos.

Efetivamente os discentes do PROFMAT absorviam os conteúdos vistos no curso e aplicavam/desenvolviam com seus alunos do ensino básico.

Os Recursos

Utilizamos em aulas alguns recursos computacionais, como por exemplo Geogebra, Calculadora, Planilhas (Excel). As práticas foram apresentadas, aplicadas e discutidas com outros professores do ensino básico. Abaixo, um resumo de como utilizamos as ferramentas dentro da sala de aula.

O uso da calculadora no Ensino de Matemática

Utilizamos a calculadora para cálculos com o intuito de trabalhar potência e divisibilidade.

Planilhas Eletrônicas

Utilizamos a planilha do Excel para introduzir matemática financeira e porcentagem.

¹Aluno do PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei, cervulo.augusto@gmail.com

²Aluno do PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei, lucas.oc29@gmail.com

³Aluno do PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei, nathaliacassia7@gmail.com

⁴Professora orientadora, Universidade Federal de São João Del-Rei, gilcelia@ufsj.edu.br

Ambientes Gráficos

Utilização do Geogebra para construção de gráficos de função afim.

Ambientes de Geometria Dinâmica

Discorremos sobre a utilização do Geogebra [3] no auxílio da compreensão da Geometria por trás da resolução de um Sistema Linear.

Sistema de Computação Algébrica

Utilizamos o Geogebra também na busca de soluções Algébricas.

Ensino a Distância

Utilização do Classroom, Meet e Google Forms.

É válido ressaltar, que em cada atividade proposta, fizemos a utilização de um plano de aula e testamos as ferramentas a serem utilizadas antes. Em geral, os alunos aprovaram a utilização das ferramentas dentro da sala de aula, bem como os professores.

Conclusão

Utilizamos na matéria de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática vários recursos computacionais: Geogebra, Planilhas eletrônicas, Google, etc. Com nossa vivência e com o auxílio da literatura, por exemplo [2], percebemos que a inclusão das ferramentas computacionais no ensino de Matemática é de grande valia, mas não substitui os métodos tradicionais de ensino. Essas ferramentas precisam ser bem pensadas, e trabalhadas antes pelo professor para que a mesma seja utilizada com eficiência e clareza na sala de aula. É válido ressaltar a importância do plano de aula para uma melhor execução das ferramentas propostas.

Referências

- [1] ANDRINI Álvaro & VASCONCELOS, M. J., *Praticando Matemática*, [S.l.]: Editora do Brasil, 2015. volume 6.
- [2] CAMPOS, J. R. T.; PEREIRA, G. B.; NASCIMENTO, M. G. S. do. Recursos computacionais para o ensino da matemática: A visão de alguns professores de matemática da rede pública de Arapiraca sobre a utilização de softwares matemáticos na educação. *EXTIFAL*, v. 2, n. 1, 2014.
- [3] GEOGEBRA. Software Geogebra. 2013. <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>.
- [4] LIBREOFFICE. Libre Office Calc. 2013. <https://pt-br.libreoffice.org/descubra/calc/>.

Um Estudo sobre Grafos: o problema das pontes e grafos planares

Giovana da Mata Nunes¹

Wilker Thiago Resende Fernandes²

Resumo: A Teoria dos Grafos surgiu através da necessidade de resolver o famoso problema das pontes de Königsberg (atualmente Kaliningrado, Rússia). Na cidade de Königsberg sete pontes cruzavam o Rio Pregel, estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio. O problema das pontes consiste na seguinte pergunta: Seria possível fazer um “passeio” pela cidade cruzando cada uma das sete pontes exatamente uma vez? Euler, em 1736, publicou um artigo demonstrando a resposta desse problema. E a partir da resposta surgiu os primeiros resultados da denominada Teoria dos Grafos. O objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de grafo, apresentar exemplos, exibir de maneira breve alguns de seus principais resultados, exibir a solução do problema das pontes de Königsberg e apresentar o conceito de grafos planares e seus principais resultados.

Referências

- [1] LOVÁSZ, L., PELIKÁN, J., VESZTERGOMBI, K. *Discret Mathematics: Elementary and Beyond*. 1.ed. New York: Springer, 2003.
- [2] JURKIEWICZ, S. *Programa de iniciação científica da OBMEP 2007*. Impa, Rio de Janeiro, 2007.

¹Discente do curso de matemática - Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, aza10734@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Matemática e estatística, Universidade federal de São João del-Rei - UFSJ, Wilker@ufs.edu.br

A Álgebra do Cubo Mágico

Jaqueline de Castro Silveira ¹

Mariana Garabini Cornelissen Hoyos²

Resumo: O cubo mágico ou cubo de Rubik é um quebra-cabeça tridimensional bastante popular, com milhões de unidades vendidas pelo mundo todo. Neste trabalho estudamos a versão mais comum (3x3x3) que consiste de um cubo formado por três camadas empilhadas uma por cima da outra, cada camada contendo nove peças coloridas. Resolver o cubo mágico consiste em deixar as peças organizadas de tal forma que cada uma das seis faces fique somente com peças de uma mesma cor. Mostramos que o conjunto de movimentos do cubo de Rubik formam um grupo (grupo de Rubik) e usamos a teoria de grupos para mostrar que sempre é possível resolvermos o cubo mágico e também mostrar quantas são as configurações válidas para o cubo de Rubik.

References

- [1] *He Invented the Rubik Cube. He is Still Learning From It.* The New York Times. Disponível em: <https://www.nytimes.com/2020/09/16/books/erno-rubik-rubiks-cube-inventor-cubed.html>. Acesso em: 24 de agosto de 2023
- [2] *Records.* World Cube Association. Disponível em: https://www.worldcubeassociation.org/results/records?event_id=333&show=history&years=all+years Acesso em: 15 de junho de 2023.
- [3] *Como resolver o cubo mágico - Método Básico (Camadas).* Blog ONCUBE. Disponível em: [<https://www.blog.oncube.com.br/tutoriais/tutorial-3x3x3/como-resolver-o-cubo-magico-metodo-basico-camadas-intro/>]. Acesso em 19 de junho de 2023.
- [4] GALLIAN, J. A. *Contemporary abstract algebra.* Boston, MA, 2016.

¹Aluna de Engenharia Química, campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del Rei, jaquelinesilveira0105@gmail.com

²Professora orientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática do campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del Rei
mariana@ufsj.edu.br

Decifrando a Desigualdade de Cauchy: Um Estudo da Desigualdade de Harker-Kasper e a Cristalografia

Laura Gois Vergueiro¹

Letícia Maria da Silva²

Carlos Alberto da Silva Junior³

Resumo: No século XVII com a criação do cálculo, os matemáticos, ansiosos pela nova teoria, desenvolveram conjecturas e a exploraram sem preocupações categóricas. Já no século XIX, conhecido como “Era do Rigor”, passou-se a ter uma preocupação mais profunda com teor técnico, definindo de forma precisa conceitos novos ou que apresentavam sentido ambíguo [2]. O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) viveu nesse período e aprimorou a definição de Limite de Newton e criou diversas definições dos fundamentos da análise. Uma das descobertas de Cauchy é conhecida hoje como **Desigualdade de Cauchy**, dada por:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde (a_n) e (b_n) são sequências de números reais [1]. Essa desigualdade é extremamente versátil por ser aplicada em diversos ambientes como, por exemplo, convergência de séries, produto interno de vetores, médias, simetrias, entre outros [1].

Fazendo uso da desigualdade o estudo do limite de sequências não negativas se torna simples. Como verificar que o produto das séries:

$$\left(\sum_{j=1}^n p_j a_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n p_j b_j \right) \geq 1,$$

deve ser maior do que ou igual a 1, denominada **Desigualdade Produto das Médias-Média dos Produtos**, utilizada na área da economia e da estatística.

Outra aplicação da Desigualdade de Cauchy está na Cristalografia, ou seja, ciência que estuda a estrutura geométrica de cristais focada em sua simetria [4]. Após 1911, com a utilização do Raio-x, conseguiu-se determinar com precisão a localização dos átomos nos cristais, que proporcionou o desenvolvimento de normas sobre as distâncias e ângulos formados entre eles. A **Desigualdade de Harker-Kasper** é uma importante identidade

¹Graduanda em Bacharelado em Matemática - COMAT, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, lauragoisvergueiro@aluno.ufsj.edu.br

²Graduanda em Licenciatura Matemática - COMAT, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, ls3536358@aluno.ufsj.edu.br

³Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, carlosdamat@ufsj.edu.br

que apresenta relação entre os fatores de estrutura do espalhamento dos átomos, dada por:

$$g^2(x) \leq \frac{1}{2} [1 + g(2x)]$$

onde $g(x) = \sum_{k=1}^n p_k \cos(\beta_k x)$, que foi obtida a partir da desigualdade de Cauchy. A validade desta identidade nos permite ampliar o seu uso para diversas funções, não se limitando somente a cristalografia [4].

Dessa forma, as contribuições de Cauchy para a matemática não se limitam só ao período em que viveu. Destacamos que a sua desigualdade ainda é pouco abordada nos livros didáticos, mas diversas ramificações e aplicações, como na cristalografia ou na integração de funções unidimensionais, tem sido explorada nas últimas décadas, mostrando a importância na continuidade do estudo da mesma.

Referências

- [1] J. M. Steele. *THE CAUCHY SCHWARZ MASTER CLASS - An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, 1a. edição. Cambridge, Pennsylvania . ISBN 978-0-511-21134-8
- [2] R. L. S. Baroni and S. C. Otero-Garcia. *Aspectos da História da Análise de Cauchy a Lebesgue*, 1a. edição. Cultura Acadêmica UNESP, São Paulo, 2014. ISBN 9788579836015
- [3] A.C. Mafud e M.T.P. Gambardella *Estrutura Cristalina e Molecular de Derivados de Ditiocarbamatos*. São Carlos, 2006. 89 p. Dissertação (Mestrado em Físico-Química) Universidade de São Paulo
- [4] E.F. Franca e S. Guilardi *Estudo Cristalográfico de compostos de Platina(II) e de Níquel (II) com Ditiocarbimato*. Uberlândia, 2005. 200 p. Dissertação (Mestrado em Química) Universidade Federal de Uberlândia

Aplicações da Desigualdade de Cauchy: Por Que Não Três ou Mais? e Uma Soma de Somas de Preservação de Inversão

Letícia Maria da Silva ¹

Laura Gois Vergueiro ²

Carlos Alberto da Silva Júnior³

Resumo: Uma das figuras indispensáveis na sistematização de conceitos matemáticos tais como limite, continuidade e convergência, foi o francês Augustin Louis Cauchy. Ele foi o primeiro a defender e divulgar a nova forma rigorosa de se pensar e fazer matemática que dominou não só a análise como o campo matemático no começo do século XIX [2].

A famosa Desigualdade de Cauchy é dada por

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Publicada em 1821 em algumas notas sobre a teoria das desigualdades apresentada por Cauchy, mas só aplicada fora dessa obra em 1829 no contexto de cálculo de raízes de funções algébricas e transcendentais [1]. Atualmente, são muitas as publicações científicas onde a Desigualdade de Cauchy vem sendo aplicada [1]. Uma consequência direta da Desigualdade de Cauchy, intitulada como “Por Que Não Três ou Mais?” é apresentada da seguinte forma:

$$(a) \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 \sum_{k=1}^n b_k^4 \sum_{k=1}^n c_k^4$$

e

$$(b) \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

O intuito das desigualdades “Por Que Não Três ou Mais?” é expandir a Desigualdade de Cauchy para três vetores ou mais, como o próprio título sugere. Essa desigualdade em questão, é usada em campos diversos da ciência como matemática, física, engenharia e estatística [3].

¹Graduanda Licenciatura em Matemática - COMAT, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, ls3536358@aluno.ufsj.edu.br

²Graduanda Bacharelado em Matemática - COMAT, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ lauragoisvergueiro@aluno.ufsj.edu.br

³Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, carlosdamat@ufsj.edu.br

Outra consequência direta da Desigualdade de Cauchy é a chamada “Uma Soma de Somas de Preservação de Inversão” que é dada por:

$$\sum_{k=1}^n \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right)^2 \geq n^3 + 2n + \frac{1}{n},$$

onde $p_k > 0 \forall 1 \leq k \leq n$ e $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Essa desigualdade é um caso particular de uma Desigualdade de Inversão que Preserva Norma [1].

Portanto, o estudo da Desigualdade de Cauchy ainda é relevante no ambiente de pesquisas matemáticas e, dessa forma, explorar algumas de suas consequências é importante para o desenvolvimento científico de diversas áreas.

Referências

- [1] Steele, M.S. *The Cauchy-Schwarz Master Class*. Cambridge, Pennsylvania. ISBN: 978-0-511-21134-8.
- [2] Baroni, R.L.S and Otero-Garcia, S.C. *ASPECTOS DA HISTÓRIA DA ANÁLISE MATEMÁTICA DE CAUCHY A LEBESGUE*. Cultura Acadêmica, São Paulo-SP, 2014. ISBN: 978-85-7983-601-5.
- [3] OpenAI. 2021. *ChatGPT: A Conversational AI Model*. Disponível em: <https://openai.com/research/chatgpt>. Acesso em: 12 de outubro de 2023.

A INFLUÊNCIA DA COOPERAÇÃO EM MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Lucas Roberto Gabriel Cardoso¹

Dra. Eliza Maria Ferreira²

Resumo: Com o cenário pandêmico da Covid-19, intensificaram-se os esforços da comunidade científica na busca de modelos que possam descrever o comportamento da doença para um melhor planejamento de ações com o objetivo de evitar o aumento do número de casos e prever a ocorrência de um pico de infectados, que poderia levar à sobrecarga dos sistemas de saúde. Algumas doenças infecciosas causadas por vírus podem ter sua dinâmica de propagação representadas por modelos matemáticos que utilizam informações como a taxa de infecção da doença na população e a taxa de recuperação dos indivíduos. Esses modelos nos permitem fazer previsões sobre os picos de infecção e o tempo médio de duração de uma possível epidemia. Um modelo matemático utilizado é o modelo SIR, que se tornou conhecido pelo trabalho de Kermack e McKendrick de 1927. No modelo SIR, cada indivíduo está num estado relativo à doença, suscetível, infectado ou removido, não sendo possível um mesmo indivíduo pertencer a mais de uma classe simultaneamente. Os modelos epidemiológicos podem ser acoplados a teoria de jogos, possibilitando considerar a interação entre os indivíduos e como isso impacta na propagação da infecção e na propensão das pessoas à cooperação dada a maneira como a epidemia se desenvolve. O objetivo deste trabalho é estudar como o comportamento de cooperação da população pode influenciar o cenário epidemiológico durante uma epidemia e vice-versa. Nesse sentido apresentamos um modelo epidemiológico que leva em consideração a vacinação dos indivíduos acoplado à uma dinâmica populacional que modela a escolha racional dos indivíduos entre cooperar ou não cooperar. Para modelar a dinâmica de cooperação utilizamos a Teoria de Jogos vinculada a uma variação do modelo SIR, sendo realizada a implementação computacional desse modelo por meio do software Mathematica. Observamos que um modelo matemático pode descrever melhor uma doença, se aproximando da situação real, ao utilizar uma combinação de um modelo epidemiológico tradicional com a teoria de jogos evolutivos, também verificamos como a cooperação se altera dada a situação de uma epidemia e que a mudança de parâmetros na simulação, como a troca de estratégia, leva a população a uma maior cooperação ou não. Concluímos que esses modelos podem ser utilizados para auxiliar as autoridades sanitárias, os pesquisadores e a sociedade na obtenção de previsões mais assertivas de como uma doença poderá se propagar na população, gerando informações para o monitoramento e controle de um determinado patógeno e assim, evitar a expansão de uma epidemia.

¹Aluno de graduação, Universidade Federal de Lavras,
lucas.cardoso5@estudante.ufla.br

²Professora orientadora, DMM, Universidade Federal de Lavras
eliza.ferreira@ufla.br

Referências

- [1] Amaral, M. A. Teoria dos jogos evolucionários e o surgimento da cooperação: dinâmicas inovativas e jogos mistos. 2017.
- [2] Edelstein-Keshet, L. Mathematical models in biology. SIAM, 2005.
- [3] Gaeta, G. A simple sir model with a large set of asymptomatic infectives. arXiv e-prints, pages arXiv-2003, 2020.
- [4] Kermack, W. O.; McKendrick, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the royal society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character, 115(772):700-721, 1927.

Dualidade entre G -gradações e G -ações

Maria Cláudia Sousa Resende¹

Lorena Mara Costa de Oliveira²

Resumo: Uma álgebra A é graduada por um grupo G , ou simplesmente, A é uma álgebra G -graduada, se A pode ser escrita como a soma direta de espaços vetoriais $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, tais que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$. Sejam G um grupo abeliano finito de ordem k e F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Denotamos por $\widehat{G} = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ o conjunto de todos os caracteres irreduzíveis de G sobre F . Este trabalho tem como objetivo mostrar que existe uma dualidade entre G -gradações e \widehat{G} -ações em álgebras associativas A sobre F .

Referências

- [1] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surveys Monogr., vol.122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

¹Aluna de Graduação em Matemática - Licenciatura, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ,
mccsousaresende@aluno.ufsj.edu.br

²Professora Orientadora, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT/UFSJ,
lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Programação Linear para Iniciantes

Maria Fernanda Oliveira¹
Gilcélia Regiane de Souza²

Resumo:

1 Introdução

Programação Linear (também conhecida como PL) é uma área da matemática voltada para a Pesquisa Operacional (PO). Para entender o que é essa técnica, é necessário compreender um pouco sobre a Pesquisa Operacional.

A Pesquisa Operacional utiliza uma série de técnicas com embasamento lógico-científico para resolver problemas de gestão, a fim de ajudar na tomada de decisão. Para solucionar problemas na Pesquisa Operacional é necessário utilizar técnicas, como a Programação Linear, que está dentro da PO [1].

A Programação Linear por sua vez, utiliza a modelagem matemática para descrever e resolver o problema. Como o próprio nome sugere todas as funções são lineares. O termo programação refere-se ao planejamento e não a programação de computadores, uma vez que a PL é um planejamento de atividades para se obter a solução ótima - o melhor resultado possível para um objetivo específico, auxiliando na tomada de decisão. A modelagem é a criação de um modelo para representar uma situação que se deseja estudar ou resolver. Desse modo, um modelo na PL é a tradução das características do problema para uma linguagem matemática. O modelo deve ser utilizado para evitar muitos gastos pois, é mais barato do que criar a estrutura real e testar todas as soluções possíveis.

A utilização da PL tem destaque em áreas como: alimentação - dosagem (mistura e receita), formulações de rações, fabricação de adubos, ligas metálicas, investimentos (avaliação de recursos), compras, fluxo de redes, modelos de transportes e grande destaque no setor industrial [2].

2 Modelagem

Durante toda a história da humanidade o homem buscou e ainda busca criar metáforas para representar e solucionar problemas. Essa procura por uma percepção bem estruturada da realidade é, necessariamente, um evento de modelagem. Um modelo é uma forma para se obter uma visão bem estruturada da

¹Aluna de graduação, Universidade Federal de São João Del-Rei,
oliveiramarafernanda3@gmail.com

²Professora orientadora, Universidade Federal de São João Del-Rei,
gilcelia@ufsj.edu.br

realidade. Um modelo pode ser considerado, também, como uma representação da vida real. Temos como exemplos comuns de modelos no dia-a-dia: quando explicamos algo para alguém usando fotos ou gráficos. Esses são exemplos do uso de metáforas e de modelos para substituir a realidade. Dessa forma, os modelos são representações simplificadas a cerca da realidade, que conservam, em determinadas situações, uma equivalência adequada.

2.1 Tipos de modelagem matemática

- **Programação Linear** - modelos de programação que possuem variáveis contínuas e possui um comportamento linear, tanto na função objetivo, quanto nas restrições.
- **Programação Não Linear** - um modelo de otimização é considerado não linear se possuir algum tipo de não linearidade, seja na função objetivo, seja nas restrições.
- **Programação Inteira** - um modelo de otimização é considerado um problema de Programação Inteira se algumas ou todas as variáveis do problema pertencem ao conjunto dos números inteiros.

3 Conclusão

Assim sendo, os modelos nos permitem ampliar a nossa capacidade de explicar e estudar situações cotidianas. Os modelos quantitativos são fortes ferramentas para ampliar a visão dos gestores e ajudar na tomada de decisão. Dessa forma, a escolha do modelo adequado, é indispensável para que todo o processo da Pesquisa Operacional seja efetivado com êxito. Além disso, a Programação linear é uma ferramenta eficaz para resolver problemas de otimização, onde, com um computador comum pode-se resolver as questões. Dessa forma, o uso da PL não é restrito para empresas, pode ser utilizada, facilmente, por pessoas para otimizar atividades cotidianas, desde que sigam os requisitos para ser um modelo de PL.

4 Referências

- [1] RODRIGES, L. H. et al. *Pesquisa operacional: programação linear passo a passo: do entendimento do problema à interpretação da solução*. São Leopoldo: Editora Unisinos, 2014
- [2] ALMEIDA, M. R. *Programação linear: Uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de Macaúbas-BH*. Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia Vitória da Conquista, 2018.

Análise de sensibilidade associada ao problema de transportes de uma empresa de laticínios

Nicoli Prosperi Pereira¹

Anderson José de Oliveira²

Resumo: A Pesquisa Operacional (PO) é uma área da Matemática Aplicada que integra modelos matemáticos, estatísticos e algorítmicos, que possibilitam e dão suporte na tomada de decisões [1]. A denominação de Pesquisa Operacional surgiu durante a Segunda Guerra Mundial e é entendida como a ciência aplicada a problemas de decisão, que permite a busca pela melhor decisão no sentido prescrito pelo objetivo [2].

Dentre as ferramentas da Pesquisa Operacional estão a programação linear, a programação inteira, a programação dinâmica, a otimização de redes e a programação não-linear [3]. A técnica mais utilizada de PO é a programação linear, utilizada quando a função objetivo e as restrições do modelo são representadas por funções lineares [3]. Dentre as classes de Problemas de Programação Linear (PPL's), uma em especial é conhecida como problema de transporte, a qual ocupa-se em minimizar o custo de transportar uma carga de algumas origens a alguns destinos, satisfazendo os limites de fornecimento e demanda [3].

No problema de transporte podem haver m origens e n destinos, cuja representação pode ser feita por meio de grafos, modelos matemáticos de PPL, além de representações tabulares. Em geral, a representação por meio de grafos é a mais utilizada, também conhecida como rede.

Para se obter a solução de um problema de transporte, é necessário que o mesmo esteja balanceado, ou seja, a demanda total deve ser igual ao fornecimento total. Considerando um problema balanceado, a solução é obtida por meio de um algoritmo, constituído por três etapas e realizado em um processo iterativo, por meio de uma solução básica viável inicial. Além disso, a solução ótima pode ser obtida de forma computacional, sendo um dos softwares mais utilizados o LINDO - *Linear Interactive and Discrete Optimizer*.

A análise de sensibilidade em Programação Linear (PL), permite a alteração dos parâmetros (dados de entrada) do modelo, dentro de certos limites, sem provocar alterações na solução ótima. De modo geral, os parâmetros e modelos de PL não são exatos. Então, com a análise de sensibilidade é possível averiguar o impacto dessa incerteza sobre a qualidade da solução ótima.

O objetivo deste trabalho é apresentar um problema de transporte relacionado a uma empresa de laticínios, a fim de efetuar a análise de sensibilidade do mesmo.

Uma fábrica de laticínios de Campos Gerais tem duas filiais, uma em Campo do Meio e outra em Boa Esperança. Todas as fábricas fornecem produtos para supermercados da

¹Discente do Curso de Matemática - Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG, nicoli.pereira@sou.unifal-mg.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

região. Vamos analisar o fornecimento de produtos dessas fábricas para os supermercados denotados por U, P, A e F. A capacidade de cada fábrica é de 2000, 2500 e 3000 produtos, respectivamente. E a demanda de cada supermercado é de 2600, 1800, 1400 e 1700 produtos, respectivamente. O problema é representado pelo grafo da Figura 1.

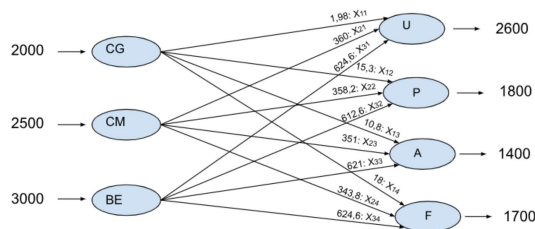


Figura 1: Grafo associado ao problema da fábrica de laticínios.

Fonte: Autor.

Ao solucionar o problema utilizando o software LINDO, o menor custo obtido foi de 2719260 unidades monetárias, sendo a quantidade de produtos transportada da fábrica em Campos Gerais para o supermercado U igual a 2000, da fábrica de Campo do Meio para o supermercado A igual a 800 e para o supermercado F igual a 1700, da fábrica de Boa Esperança para o supermercado U igual a 600, para o supermercado P igual a 1800 e para o supermercado A igual a 600.

A análise de sensibilidade para este problema apontou um preço dual igual a zero para a terceira restrição, o que indica que uma alteração do lado direito dessa restrição, em uma pequena quantidade, não causaria nenhum aumento ou redução na solução ótima do problema [4]. Já para as restrições 4, 5, 6 e 7, a análise de sensibilidade apontou preços duais negativos, indicando que um aumento do lado direito da restrição acarretará em um decréscimo no valor ótimo da função objetivo [4]. Contudo, pode-se observar que todas as alterações do preço dual estão indicando um menor número de iterações para se solucionar o problema.

Referências

- [1] Arenales, M. N. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [2] Leigus, A; Fenerich, A.T; Morais, M.F. Aplicações da Pesquisa Operacional. **III Encontro de Engenharia de Produção Agroindustrial**. Campo Mourão - PR, 2009.
- [3] Taha, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- [4] Santana, A. G. **Dimensionamento ótimo de um sistema de recursos hídricos de grande porte**. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1998.

Modelagem Fuzzy de uma Classe de Osciladores Lineares

Otávio José de Rezende Silveira¹

Sílvia Antônio Bueno Salgado²

Sérgio Martins de Souza³

Onofre Rojas Santos⁴

Resumo:

A dinâmica dos circuitos elétricos do tipo RLC é dada por

$$Q''(t) + \frac{R}{L}Q'(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = f(t),$$

em que $Q(t)$ representa a carga do circuito em função do tempo, R é a resistência, L a indutância, C a capacitância e $f(t)$ uma fonte de tensão externa. Agora, vamos supor que a função de carga possa ser expressa como um número fuzzy $Q(t) = q(t)A + r(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$. O termo $q(t) \in \mathbb{R}$ corresponde à multiplicação da solução homogênea do problema por número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$, enquanto $r(t) \in \mathbb{R}$ representa a solução geral do problema contendo a fonte forçante $f(t) \in \mathbb{R}$. Aqui, o número fuzzy A contém informações sobre a incerteza nas condições iniciais do circuito. Como a carga deve ser conservada, uma vez que as condições iniciais do circuito são estabelecidas, o número fuzzy A deve estar necessariamente em torno de zero. Assim, a função $r(t)$ carrega informações sobre a solução clássica do circuito, representando a curva com o mais alto grau de pertinência, enquanto a função $q(t)$, multiplicada por A , representa toda a incerteza em torno da solução clássica. Dessa maneira, a solução fuzzy $Q(t)$ representa como as incertezas nas condições iniciais do problema se propagam ao longo do tempo. O objetivo deste trabalho é descrever a dinâmica de um circuito elétrico do tipo RLC cujas condições iniciais são dadas por números fuzzy linearmente correlacionados. Para isso, usaremos a transformada de Laplace fuzzy no espaço $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$.

¹Aluno de graduação em Engenharia Física, Universidade Federal de Lavras,
otavio.silveira@estudante.ufla.br

²Professor co-orientador, Instituto de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal de Alfenas -
Campus Varginha,
silvio.salgado@unifal-mg.edu.br

³Professor orientador, Departamento de Física, Universidade Federal de Lavras,
sergiomartinsde@ufla.br

⁴Departamento de Física, Universidade Federal de Lavras,
ors@ufla.br

Referências

- [1] L. C. de Barros, R. C. Bassanezi, W. A. Lodwick, A first course in fuzzy logic, fuzzy dynamical systems, and biomathematics: theory and applications (2017).
- [2] F. S. Pedro, S. A. B. Salgado, D. E. Sánchez, E. Esmi, L. C. de Barros, On fuzzy laplace transform in linearly correlated fuzzy space, *Soft Computing* 27 (3) (2023) 1425–1438.

Objetos Fractais Naturais uma discussão sobre sua definição para a Matemática Aplicada

Prisicla de Fátima Borges Amaral Carvalho¹

Erasmão Tales Fonseca²

Resumo: Ao longo da história, é notável como a Matemática, em especial a Geometria, surge como ferramenta para resolver problemas da humanidade ou descrever fenômenos que o homem presencia. Da mesma maneira, a Geometria Fractal vem para explicar, de forma mais precisa e realista, o mundo e seus fenômenos. Conforme Benoît Mandelbrot, conhecido como pai dos fractais, em *The Fractal Geometry of Nature*: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta” (*apud* Stewart, 1991, p.233). Ainda assim, por muitos anos, os fractais foram considerados apenas isto: belos e inúteis enfeites matemáticos, que não serviam para além da vaidade. Porém, com os diversos trabalhos lançados desde então - inclusive por Mandelbrot - e sua ligação direta com a Teoria do Caos e Sistemas Dinâmicos, tornou-se clara sua aplicação. Para mais do que isso, evidenciou-se como a Geometria Fractal é uma descrição mais verossímil da natureza do que a geometria clássica: “as curvas que não possuem tangente são a regra, enquanto as curvas regulares, como a circunferência, são casos, apesar de interessantes, muito particulares.” (Mandelbrot, 1998, p.16). Porém, ainda que a intuição, o visual e a argumentação se mostrem convincentes, é necessário trabalhar o rigor matemático. Diante disso, qual a definição de um fractal? Para esta discussão, utilizaremos como aporte teórico a obra *Descobrimos a Geometria Fractal: para a sala de aula*, em especial a seção *E a definição de Fractal?*, do autor Ruy Madsen Barbosa (2002, p.18-19): Apesar de sua nomenclatura remeter a fragmentado, quebrado, o mesmo não se pode afirmar da definição. Entretanto, em um primeiro momento, até mesmo Mandelbrot o definiu como um objeto de dimensão fracionária, “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.” (*apud*. Barbosa, 2002, p.18). Mas o próprio Benoit não se satisfaz com essa definição, apresentada por ele mesmo. Pois, apesar desta - a dimensão - ser uma característica marcante e deveras surpreendente nestes objetos, ela não o define. Uma vez que há fractais para os quais a dimensão é igual a um ou dois e nenhum deles se assemelham a retas ou planos e há ainda os de dimensões irracionais. Houve também J. Feder (1988), com: um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos e ainda K. J. Falconer (1990), que propõe três condições para que um objeto seja considerado um fractal: Possuir alguma forma de “auto-similaridade”, ainda que aproximada ou estatística; Ter a dimensão fractal, definida de alguma forma,

¹Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Minas Gerais, Unidade Divinópolis, pri.amaral.13@hotmail.com

²Professor orientador do Departamento de Ciências Exatas da Universidade do Estado de Minas Gerais, Unidade Divinópolis, erasmão.fonseca@uemg.br

maior que a sua dimensão topológica e poder ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. Mas tais propostas, compiladas por Barbosa, ainda se mostram demasiadamente vagas ou dependentes do procedimento iterativo que constrói o fractal – o que, muitas vezes, será parte da investigação Matemática em si. Por outro lado, dito a diferença que a escala pode aplicar a algo, define-se como fractal um objeto que é autosimilar em diferentes escalas, infinitamente. Ou seja, uma parte é semelhante de forma exata ou aproximada ao todo. Ou ainda, que se repete ao aumentar ou diminuir a escala de forma contínua, de maneira que, ao se olhar sem um referencial, não há como distinguir a que escala o objeto está apresentado. Tal característica geralmente é obtida através da reentrada do resultado de um algoritmo nele mesmo. Porém, tal definição não se aplica a realidade, uma vez que nosso mundo é finito. Para Michel Janos (2008, p.70) “os fractais naturais não são auto-semelhantes. Eles são auto-afins, ou seja, são cópias reduzidas distorcidas de si próprios.” Entretanto, para fins da aplicação da Geometria Fractal na costa de um país, por exemplo, a auto-afinidade desaparece dada certa escala – cabe ressaltar que é possível fazer modelos matemáticos em fractais através de outras abordagens. Portanto, o presente trabalho busca encontrar uma definição para objetos fractais naturais que possa auxiliar em projetos de matemática aplicada. Logo, ao analisar os Fractais e suas características como, principalmente, a autossimilaridade em diferentes escalas, o aspecto fragmentado – que origina seu nome – e, em especial, as aplicações em objetos naturais, propõe-se a seguinte definição: Objetos fractais naturais são aqueles que, em determinado intervalo escalar, apresentam características de autossimilaridade estatística. Por fim, para analisar a viabilidade de uma aplicação fractal em um objeto natural, seria então necessário verificar o intervalo escalar que afeta o modelo proposto para averiguar se as características fractais, de fato, afetarão os resultados. Além de ponderar a faixa de erro da autossimilaridade observada.

Referências

- [1] BARBOSA, R. M. *Descobrendo a Geometria Fractal: para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [2] JANOS, M. *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- [3] MANDELBROT, B. *Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.
- [4] STEWART, I. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991.

Equações diferenciais fracionárias com foco no modelo Lotka-Volterra fracionário

Robert William Rodrigues da Silva ¹

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni²

Resumo: O cálculo fracionário é uma extensão do cálculo tradicional que envolve derivadas e integrais de ordens não inteiras. Ele tem diversas aplicações em várias áreas, incluindo biologia, ecologia e física, onde fenômenos complexos são modelados com mais precisão. Um desses modelos é o modelo Lotka-Volterra fracionário, que é uma variação do clássico modelo Lotka-Volterra usado para descrever a dinâmica das populações em ecossistemas.

O modelo Lotka-Volterra fracionário incorpora derivadas fracionárias nas equações diferenciais, levando em consideração a memória a longo prazo e a dependência não local das interações entre as espécies. Em comparação com o modelo clássico, o modelo fracionário pode capturar melhor fenômenos complexos, como oscilações irregulares e comportamento caótico, que são comuns em ecossistemas do mundo real.

Neste trabalho, o cálculo fracionário é estudado em detalhes, com foco especial no modelo Lotka-Volterra fracionário. São exploradas as propriedades matemáticas do cálculo fracionário, as vantagens de sua aplicação em modelos ecológicos e as implicações biológicas das soluções fracionárias. Além disso, são discutidos métodos numéricos para resolver as equações diferenciais fracionárias, permitindo uma análise mais prática e eficiente do modelo Lotka-Volterra fracionário.

Referências

- I. CAMARGO, Rubens Figueredo. **Cálculo fracionário e aplicações**. 2009. Tese de Doutorado. [sn].
- II. ROSENDO, Danilo Castro. **Sobre a função de Mittag-Leffler**. 2008. Tese de Doutorado. Master's thesis, Unicamp.
- III. TEODORO, Graziane Sales. **Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler**. 2014. Tese de Doutorado. [sn].
- IV. TIEPPO–UFPR, Sandra Maria; GUZZO–UNIOESTE, Sandro Marcos. **Elementos do Cálculo Fracionário**.

¹Aluno de Engenharia de Bioprocessos, Universidade Federal de São João del-Rei, robertwilliamtog@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Física, Estatística e Matemática, amandagso@ufsj.edu.br

Sobre Pontos Fixos e Contrações Fracas

Rafael Romero¹

Wenderson Marques Ferreira²

Eder Marinho Martins³

Resumo: Um dos clássicos resultados sobre pontos fixos é o

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja M um Espaço Métrico completo. Então toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo.*

O resultado anterior não garante a existência de um ponto fixo quando a função considerada é uma contração fraca, definida como:

Definição 1 *Uma função $f : M \rightarrow M$ em que M é um espaço métrico é dita contração fraca se*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in M. \quad (1)$$

Para tais funções, diferentemente da contração usual, não é possível exibir uma constante $c < 1$ que quando multiplicada por $d(x, y)$ satisfaça a inequação.

A pergunta a ser feita é:

Será que podemos obter hipóteses suficientes para as quais conseguimos garantir a existência de um único ponto fixo para contrações fracas?

Essa pergunta é o ponto de partida deste trabalho. Nossas fontes de pesquisa foram uma série de artigos publicados a partir da segunda metade do século passado. A seguir veremos os diferentes resultados que estudamos e tentamos apresentar a “evolução” que cada um deles representou em relação ao anterior para a obtenção de resultados de existência e unicidade de ponto fixo. Valendo ressaltar que todos os resultados envolvem aplicações que são contração fraca.

- **O resultado de Rakotch:** A definição de Rakotch [1] para contração fraca decorre de mudar a constante $0 \leq c < 1$ no Teorema de Banach por uma função positiva $\alpha(d(x, y)) < 1$ monótona decrescente em que $\sup \alpha = 1$.
- **O resultado de Boyd-Wong:** Neste caso as aplicações $f : M \rightarrow M$ consideradas em [2] satisfazem a seguinte condição:

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)) \quad (2)$$

em que $\psi : \overline{P} \rightarrow [0, \infty)$ com $P = \{d(x, y) : x, y \in M\}$.

¹Aluno de Matemática Bacharelado, Universidade Federal de Ouro Preto, rafael.romero@aluno.ufop.edu.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, wmf@ufop.edu.br

³Professor coorientador, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, eder@ufop.edu.br

- **O resultado de Vittorino Pata:** Para estabelecer seu resultado, Pata considera funções f tais que dado x_0 pertencente ao seu domínio, satisfaçam

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + d(x, x_0) + d(y, x_0)]^\beta, \quad (3)$$

em que $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \in [0, \alpha]$ são constantes fixadas e $\epsilon \in [0, 1]$.

Considerando-se os resultados apresentados, outra pergunta surge:

Será que os resultados apresentados são equivalentes? Em caso afirmativo, em que condições?

As respostas a esta pergunta foram o segundo objetivo alcançado neste trabalho.

1. Se considerarmos o espaço de domínio das funções f limitado, os teoremas apresentados em [2] e [4] coincidem.

2. Para Espaços Métricos Compactos, a definição de contração fraca (1) coincide com as noções de contração (2) e (3).

3. Para domínios ilimitados não temos as equivalências anteriores. Um exemplo simples é a função real $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ dada por

$$f(x) = -2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}$$

cujo único ponto fixo ($x = 1$) é garantido pelos resultados de [4], mas não é garantido através da teoria desenvolvida em [2].

4. A função apresentada em [2] aperfeiçoa o resultado visto em [1]. É possível observar isso na função

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}; & x \in [0, 1] \\ x - 1; & x \in \{2, 3, 4, \dots\} \end{cases}$$

com a métrica dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|; & x, y \in [0, 1] \\ x + y; & x \in \{2, 3, 4, \dots\} \text{ ou } y \in \{2, 3, 4, \dots\} \end{cases}.$$

Referências

- [1] E. Rakotch, *A note on contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 459-465.
- [2] D. W. Boyd and J. S. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 458-464.
- [3] L. Fornari and V. Pata, *A Note On Weak Contractions In Compact Metric Spaces*, (2019).
- [4] V. Pata, *A fixed point theorem in metric spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. 10 (2011), 299-305.

Seqüências Pouco Prováveis e Valores Extremos num Processo Multiplicativo Aleatório

Amanda Alves de Oliveira¹Telles Timóteo da Silva²

Resumo: Muitos modelos matemáticos são dados em termos de equações de recorrência a tempo discreto [1]. Quando os coeficientes são aleatórios, podemos ver que a solução envolve um processo multiplicativo [3]. Considere, por exemplo, a equação a tempo discreto $y_{i+1} = a_i + b_i y_i$, onde y_i é a seqüência a ser determinada, a_i, b_i são em geral seqüências aleatórias de números reais, para $i = 0, 1, \dots$. A solução da equação no tempo $n + 1$ pode ser escrita como $y_{n+1} = [\prod_{i=0}^n b_i] y_0 + \sum_{j=1}^n [\prod_{i=j}^n b_i] a_{j-1}$, em que se observa o produto de variáveis aleatórias. Um exemplo específico de aplicação deste modelo é o fracionamento de rochas [4]. Neste caso, ponha $a_i = 0$ e considere que y_i é o tamanho de uma rocha no i -ésimo estágio de sua fragmentação. Então b_i é o fator de redução da rocha entre os estágios i e $i + 1$ e o tamanho da rocha na n -ésima iteração fica dado por $y_n = [\prod_{i=0}^{n-1} b_i] y_0$.

Os processos multiplicativos, no entanto, são pouco estudados, principalmente porque não existe uma versão do Teorema Central do Limite (TCL) [2] que permita estudar seu padrão assintótico e fazer inferências. Uma característica interessante dos processos multiplicativos aleatórios, com um número grande de variáveis aleatórias, é que eles podem conter seqüências “pouco prováveis” mas com valores extremos. Essas seqüências tendem a influenciar demasiadamente o valor médio do processo.

Podemos observar este fenômeno num modelo multiplicativo binomial descrito a seguir de forma resumida. Fixe um número $n \in \mathbb{N}$, dois números reais distintos $b_1, b_2 > 0$ e um número real p , $0 < p < 1$. Seja Ω o conjunto de todas a n -uplas $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ em que $\omega_i \in \{b_1, b_2\}$. A probabilidade de ocorrência de um dado $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ é definida tal que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^i(1-p)^{n-i}$, caso b_1 ocorra i vezes em ω (consequentemente b_2 ocorre $n - i$ vezes).

Agora vamos definir a variável aleatória produto $\mathcal{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, calcula o produto $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$, isto é, $\mathcal{P}(\omega) = \prod_{i=1}^n \omega_i$. Vamos calcular a distribuição de \mathcal{P} . Note que o evento $[\mathcal{P} = b_1^i b_2^{n-i}]$ representa as amostras $\omega \in \Omega$ em que b_1 ocorre i vezes. A quantidade dessas amostras é, portanto, $\binom{n}{i}$. Logo

$$\mathbb{P}(\mathcal{P} = b_1^i b_2^{n-i}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

¹Escola Municipal Profa. Nilce Moreira, Conselheiro Lafaiete - MG, oliveira.amandinha@yahoo.com.br

²Departamento de Estatística, Física e Matemática, UFSJ, timoteo@ufs.br

O valor médio do produto \mathcal{P} é

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = [pb_1 + (1-p)b_2]^n.$$

Observamos que $\mathbb{E}[\mathcal{P}]$ cresce geometricamente com n sempre que $pb_1 + (1-p)b_2 > 1$, ou seja, quando $p > \frac{1-b_2}{b_1-b_2}$. A Moda de \mathcal{P} representa o valor *mais provável*, ou seja ela é obtida observando-se a distribuição dos valores de \mathcal{P} e identificando aquele que tem maior probabilidade de ocorrer. Para n grande temos

$$\mathbb{M}(\mathcal{P}) \approx b_1^{np} b_2^{n(1-p)}.$$

Podemos considerar um exemplo simples e observar o efeito das seqüências pouco prováveis sobre a média. Imagine dois jogadores disputando Cara-ou-Coroa numa seqüência de n lançamentos de uma moeda, com apenas dois resultados possíveis: ganhar ou perder. A cada partida, o ganhador multiplica sua pontuação por 2 e o perdedor multiplica sua pontuação por $\frac{1}{2}$. A pontuação inicial de ambos é 1. Suponha que $p = 1/2$. A pontuação do primeiro jogador depois de n partidas será o produto \mathcal{P} referente aos seus ganhos ou perdas nas n partidas. O valor médio do produto fica

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = \left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

Já a moda (ou valor mais provável) é dado por

$$\mathbb{M}(\mathcal{P}) = 1.$$

Vemos que o valor mais provável funciona como uma miragem, já que, de fato, quando n cresce, o efeito das seqüências pouco prováveis mas com valores extremos se acentua e começa a interferir em $\mathbb{E}[\mathcal{P}]$.

Financiamento: Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, sob os processos RED-00133-21 e APQ 01987-22.

Referências

- [1] DE JESUS, Eliane Alves. *Sistemas Dinâmicos Discretos*. 2016. 78f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ / Campus Alto do Paraopeba, Ouro Branco, 2016.
- [2] JAMES, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 2a.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.
- [3] MANRUBIA, Susanna C. e ZANETTE, Damian H. Stochastic multiplicative processes with reset events. *Physical Review E* **59** (5) 1999.
- [4] REDNER, S. Random multiplicative processes: an elementary tutorial. *Am. J. Phys* **58** (3) 1990.

Classificação das álgebras *-simples

Vanessa Coelho dos Santos¹
Lorena Mara Costa de Oliveira²

Resumo: Uma involução em uma álgebra é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, ou seja, é uma aplicação linear $*$: $A \rightarrow A$ tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todos $a, b \in A$. Assim, nomeia-se por *-álgebra uma álgebra munida com uma involução $*$. Dizemos que uma *-álgebra é uma álgebra *-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos *-ideiais de A são $\{0\}$ e A . Neste trabalho, iremos classificar as álgebras *-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Referências

- [1] L. H. Rowen. *Ring Theory*. Academic Press, Vol. 1, New York, 1988.

¹Aluna de Graduação em Matemática - Licenciatura, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ,
vanessasantoscoelho6@aluno.ufsj.edu.br

²Professora Orientadora, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT/UFSJ,
lorena.oliveira@ufsj.edu.br