

# Um ensaio sobre a complexidade clássica e quântica na análise de textos

Adélcio Carlos de Oliveira <sup>1</sup>

## Complexidade no sentido de Kolmogorov

A complexidade, no sentido de Kolmogorov [1, 2], é medida pela tarefa de transmitir uma informação. Assim, ela pode ser definida pela menor rotina necessária para transmiti-la. Enquanto a entropia de Shannon [3] tem como objeto de estudo a comunicação, a complexidade de Kolmogorov tem como foco a informação em objetos individuais. Para Shannon, cada objeto tem uma complexidade intrínseca, por exemplo, para transmitir o número

$$n = 222.222.222.222.222.222.222.222.222.222$$

podemos escrever imprima 2 33 vezes, que em termos de tamanho, é menor que 33 algarismos. Já o número

$$m = 264.575.131.106.459.059.050.161.575.363$$

aparentemente não tem um programa tão curto que o gere, deveremos pedir para imprimir a sequência, o que geraria um custo computacional de pelo menos 33 algarismos. Entretanto, o número é uma aproximação do número  $\sqrt{7} \times 10^{10}$ , e esse número pode ser transmitido com uma programação compacta. Se o número é composto por uma sequência aleatória, a rotina terá um tamanho que é proporcional ao seu tamanho.

## Complexidade de um texto

Quando mudamos para a questão da complexidade de um texto, podemos, em princípio usar a mesma lógica, cada letra representa um caractere a ser transmitido e, portanto, teremos uma relação semelhante aos números. Entretanto, as palavras possuem tamanhos distintos, por exemplo:

- 1) A palavra “pé” possui 2 letras, enquanto a palavra “ornitorrinco” possui 11 letras.
- 2) Em inglês “foot” possui 4 letras e “platypus” tem 8 letras.

De fato, a quantidade de letras para cada palavra depende em muito do idioma, mas podemos pensar que, para cada verbete, podemos ter um símbolo universal, e assim a complexidade de cada palavra seria a mesma. Como consequência, haveria a necessidade de criar muitos símbolos, em português temos por volta de 382 mil verbetes, em inglês 415 mil, mas, incluindo termos técnicos, pode ultrapassar a casa de 1 milhão. Para representar todos esses caracteres, seria necessário que o caractere básico tivesse um tamanho de no mínimo 20 bits, que seria a complexidade mínima de cada palavra.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de São João del Rei, adelcio@ufsj.edu.br

Considerando cada palavra como tendo a complexidade equivalente, podemos pensar em estruturas mais complexas. Por exemplo, se queremos reproduzir o texto:

”Rita é bela.”Necessitaremos de um programa do tipo : Imprima: ”Rita é bela.”

Se queremos imprimir em sequência as frases: “Larissa é bela.”; “Maria é bela.”; “Cristina é bela.”; “Ana é bela.”; “Sandra é bela.” , esse texto não demanda uma rotina 5 vezes maior. Podemos definir um vetor linha na forma:

$$\vec{V} = (Larissa, Maria, Cristina, Ana, Sandra). \quad (1)$$

Com esse vetor, podemos gerar o texto com a rotina: para  $i=1$  até 5, imprima: “ $\vec{V}_i$  é bela.” Considerando vetores com 5 entradas, a complexidade não é significativa, mas, para dimensões maiores, o custo computacional pode ser de várias ordens de grandeza maior.

### Complexidade: Sintaxe, Semântica e Pragmática de um texto

Embora o vetor seja alfanumérico, a complexidade, devido à variabilidade dos caracteres envolvidos, pode ter a mesma interpretação que foi dada aos conjuntos numéricos. Essa complexidade de Kolmogorov difere da definição da complexidade sintaxe, semântica ou pragmática. A sintaxe refere-se à estrutura das palavras, enquanto a complexidade semântica pode ser definida como o número de significados distintos que podem ser atribuídos a um mesmo texto. Já a complexidade pragmática reflete o contexto do emissor e do receptor [4]. Nesse trabalho mostraremos que as ferramentas matemáticas usualmente utilizadas na quantificação da complexidade de um texto partem de pressupostos lógicos clássicos, entretanto, muitas das estruturas linguísticas possuem características que são melhor quantificadas por teorias quânticas de complexidade. Por exemplo, frases contendo orações coordenadas possuem correlações clássicas, cada oração tem um sentido em si. Já frases contendo orações subordinadas possuem correlações quânticas, uma vez que só conhecendo a frase por completo é que o seu sentido fica estabelecido.

## Referências

- [1] A. Kolmogorov, “Three approaches to the quantitative definition of information,” *Problems Inform. Transmission*, pp. 1–7, 1965.
- [2] A. Kolmogorov, “Complexity of algorithms and objective definition of randomness,” in *Abstract of a talk at the Moscow Math. Soc. meeting 4/16/1974. In Russian*, p. 29(4):155, 1974.
- [3] C. Shannon, “The mathematical theory of communication,” *Bell System Tech. J.*, vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 1948.
- [4] D. A. R. Mota and N. Y. Kobashi, “Web semântica e web pragmática: Discussão crítica sobre versionamento na web e limites conceituais,” *Tendências da Pesquisa Brasileira em Ciência da Informação*, vol. 9, no. 2, 2016.

# Equações Diferenciais Fuchsianas e Grupos Fuchsianos Aplicados na Transmissão da Informação em Sistemas de Comunicação

Anderson José de Oliveira<sup>1</sup>

Um sistema de comunicação representa um conjunto de mecanismos que permitem a transmissão de mensagens/informações de um determinado transmissor para um destinatário, por meio de um canal de comunicação, onde podem ocorrer possíveis interferências, chamadas de ruídos, comprometendo assim a compreensão da mensagem recebida. Para um sistema de comunicação ser mais confiável, a probabilidade de erro tem que ser a menor possível, enquanto que para ser menos complexo, o conjunto de sinais tem que ser geometricamente uniforme. Esses objetivos podem ser alcançados por meio de um método que utilize um importante invariante topológico conhecido como gênero  $g$  de uma superfície compacta orientada, onde se encontra o conjunto de pontos (conjunto de sinais). Para obter o gênero da superfície, uma abordagem que pode ser utilizada é a identificação dos possíveis mergulhos do canal discreto sem memória associados a tal superfície compacta orientada, [1].

Nesse processo, pode ser utilizado um tipo particular de equações diferenciais, no plano complexo, as equações diferenciais fuchsianas. De acordo com [2], as equações diferenciais fuchsianas representam uma importante classe de equações diferenciais ordinárias lineares cuja principal característica é que todo ponto singular no plano complexo estendido é regular, sendo amplamente utilizadas em problemas de Física-Matemática e os casos mais estudados envolvem equações com três pontos singulares regulares, como as equações hipergeométricas, Legendre e Chebychev.

O estudo dessas equações despertou grande interesse na Matemática na segunda metade do século XIX e início do século XX, proporcionando um grande desenvolvimento na teoria das funções de variáveis complexas.

Em [3, 4, 5], relevantes conexões são feitas entre equações diferenciais fuchsianas, superfícies de Riemann e grupos fuchsianos, a fim de analisar o processo de uniformização das curvas algébricas da forma  $y^2 = z^{2g+1} \pm 1$ .

O procedimento proposto por Whittaker, [3], visa encontrar a região de uniformização da curva algébrica  $y^2 = z^5 + 1$ . Nesse caso, o coeficiente associado à derivada de ordem mais alta da equação diferencial fuchsiana correspondente é  $z^5 + 1$ . As soluções linearmente independentes desta equação diferencial levam às cinco transformações elípticas associadas a cada lado de um pentágono regular e, portanto, aos geradores do grupo fuchsiano  $\Gamma_0$ . Fixando uma dessas transformações de Möbius e multiplicando-a pelas restantes leva a um polígono regular de oito lados, a região de uniformização da curva algébrica dada. Os

---

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria, Universidade Federal de Alfenas, anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

geradores desta região fundamental são transformações hiperbólicas de Möbius associadas ao grupo fuchsiano  $\Gamma_8$ . Como consequência, a superfície de Riemann associada é o bitoro. Mursi em [5], considerou um procedimento similar ao proposto por Whittaker, para obter a região de uniformização da curva algébrica  $y^2 = z^7 + 1$ .

Em [6] são apresentados os geradores de grupos fuchsianos, por meio dos emparelhamentos dos lados de polígonos, além das tesselações associadas, relacionadas aos casos  $g = 2$  e  $g = 3$ , para analisar o problema de quantização do canal  $C_{2,8}$ , que pode ser mergulhado em superfícies de gênero  $0 \leq g \leq 3$ , por meio de uma equação diferencial fuchsiana de segunda ordem.

Com base nessas informações, o objetivo deste trabalho é apresentar algumas contribuições das equações diferenciais fuchsianas e da identificação dos geradores de grupos fuchsianos no processo de transmissão da informação, em particular no estudo e análise de sistemas de comunicação, por meio dos canais de comunicação.

Os resultados a serem apresentados fazem parte de pesquisas desenvolvidas sob minha orientação, na Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG e também de pesquisas desenvolvidas pelo grupo do qual faço parte, em “Códigos Quânticos e Hiperbólicos”.

## Agradecimentos

À UNIFAL-MG e ao PPGEAB. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] A. J. de Oliveira e R. Palazzo Jr., “Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem,” *Computational and Applied Mathematics*, 2017.
- [2] G. Kristensson, *Second order differential equations*. Springer, 2010.
- [3] E. T. Whittaker, “On hyperlemniscate functions, a family of automorphic functions,” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 1-4, pp. 274–278, 1929.
- [4] J. M. Whittaker, “The uniformisation of algebraic curves,” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 4, pp. 150–154, 1929.
- [5] M. Mursi, “On the uniformisation of algebraic curves of genus 3,” *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 2, pp. 102–107, 1930.
- [6] A. J. de Oliveira; G. G. La Guardia; R. Palazzo Jr; C. D. Albuquerque; C. R. O. Q. Queiroz; L. B. Lima e V. L. Vieira, “Algebraic and geometric characterizations related to the quantization problem of the  $c_{2,8}$  channel,” *Computational and Applied Mathematics*, vol. 43, no. 377, pp. 1–23, 2024.

# Corrida das Funções: uma estratégia lúdica para o ensino de funções matemáticas

André Luiz Candiani <sup>1</sup>

José Claudinei Ferreira <sup>2</sup>

O ensino de funções no Ensino Médio representa um desafio recorrente, marcado por dificuldades conceituais básicas e pela falta de conexão com situações significativas. Por isso, o primeiro autor criou o jogo de tabuleiro Corrida das Funções, e está buscando integrar conceitos matemáticos a uma experiência lúdica e competitiva, visando maior engajamento e compreensão de certos conceitos. A estrutura do jogo baseia-se em dois baralhos para cada jogador: um de expressões de funções  $f(x)$  e outro de domínios dessas funções. Cada participante mantém em mãos três cartas de cada baralho e, em sua vez, seleciona uma função e um domínio dentre essas opções para calcular o valor de  $f(x)$ . O resultado define o número de casas que o jogador avança ou retrocede no tabuleiro, o que confere variabilidade e imprevisibilidade à dinâmica de deslocamento, tornando cada partida única. Dessa forma, trabalham-se funções constantes, afins, quadráticas, modulares, exponenciais e cúbicas, assim como conceitos de domínio, imagem, leituras gráficas, crescimento e decrescimento. Operações matemáticas fundamentais são mobilizadas continuamente, reforçando a articulação entre conceitos do Ensino Fundamental e Médio. Como forma de potencializar o engajamento dos alunos, propomos que eles se organizem em grupos para criar seus próprios tabuleiros, explorando a criatividade no design e estabelecendo regras próprias, o que amplia as possibilidades pedagógicas e de interação e criação de estratégias de resolução e de proposição de problemas ([1, 2]). A análise do processo de proposição e de adequação do jogo para uso em sala de aula, assim como o relato da experiência, compõem o objeto de estudo do Trabalho de Conclusão de Curso do primeiro autor, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), em andamento e sob orientação do segundo autor. A fundamentação teórica e pedagógica apoia-se, no momento, nas pesquisas de Grando ([3, 4]) sobre o uso de jogos na Educação Matemática, que destacam a importância de regras claras, mediação docente e estímulo à resolução de problemas ([1, 2]). Entendemos ainda que o jogo promove habilidades de Pensamento Computacional, conforme diretrizes da BNCC, especialmente decomposição, reconhecimento de padrões e elaboração de algoritmos ([1, 5]). A experiência permite articulação com os eixos Mundo Digital e Cultura Digital, seja pela adaptação para formatos digitais, seja pelo registro e análise de resultados com ferramentas tecnológicas (tanto pelo docente pesquisador quanto pelo discente). O jogo proposto apresenta vantagens como flexibilidade de aplicação (introdução, fixação ou avaliação formativa), possibilidade de

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Alfenas,  
andre.candiani@sou.unifal-mg.edu.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de Alfenas,  
jose.ferreira@unifal-mg.edu.br

adaptação a diferentes níveis de dificuldade e estímulo à participação ativa. Ao transformar conteúdos abstratos em ações concretas, buscamos contribuir para um aprendizado mais significativo e interdisciplinar. Esperamos que o jogo seja de alguma forma um recurso inovador, que, aliando raciocínio, estratégia e criatividade, busque ressignificados para o ensino e aprendizagem de conceitos ligados a funções, ampliando o repertório de práticas lúdicas do docente e da escola.

## Referências

- [1] Brasil, “Base nacional comum curricular.” Online, 2018. Acessado em 13/08/2025, <https://www.gov.br/mec/pt-br/cne/base-nacional-comum-curricular-bncc>.
- [2] G. Pólya, *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 2. ed.
- [3] R. C. Grando, *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus, 1a. ed. ed., 2004.
- [4] R. C. Grando, “Recursos didáticos na educação matemática: jogos e materiais manipulativos,” *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, vol. 5, no. 2, pp. 393–416, 2015.
- [5] Brasil, “Computação na educação básica: Complemento à bncc.” Online, 2022. Acessado em 13/08/2025, <https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/computacao-na-educacao-basica-complemento-a-bncc>.

# Autonomia e Práxis Reflexiva: Contribuições do PIBID para Futuros Professores de Matemática

Angela Leite Moreno <sup>1</sup>

Andréa Cardoso <sup>2</sup>

José Carlos de Souza Júnior <sup>3</sup>

A formação de professores de matemática no Brasil enfrenta desafios históricos, notadamente a dissociação entre a teoria e a prática, principalmente quanto à intensificação da dicotomia entre a “matemática acadêmica” e a “matemática escolar” como um problema nos cursos de formação que dificulta a preparação de futuros docentes [1].

Para enfrentar essa problemática, é imprescindível um referencial teórico que valorize a prática como lócus de formação. A proposta de um “profissional reflexivo” de Donald Schön [2], que aprende na e sobre a ação, encontra eco nas discussões sobre o ofício docente. Perrenoud [3] aplica esses pressupostos ao defender que a formação inicial deve preparar o futuro professor para refletir sobre sua prática, observar, analisar e construir modelos de ação. Nesse contexto, a pesquisa-ação surge como um caminho metodológico promissor, associando pesquisa e ação para transformar a prática de forma colaborativa e crítica [4].

É nesse cenário que se insere o subprojeto PIBID-Matemática da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG) propõe a pesquisa-ação crítica como referencial no desenvolvimento de oficinas pedagógicas, que concebidas como um espaço-tempo de construção coletiva do conhecimento, onde se “aprende fazendo junto com os outros” [5]. Desta forma, o objetivo desse trabalho é refletir sobre o impacto do desenvolvimento das oficinas pedagógicas na formação do professor de matemática.

A criação de cada oficina segue um rigoroso processo cíclico e reflexivo. A primeira etapa consiste na observação da sala de aula pelos Bolsistas de Iniciação à Docência (BID), permitindo um diagnóstico das dificuldades de aprendizagem e a definição do tema da intervenção em colaboração com o professor supervisor da escola. Na etapa seguinte, de fundamentação, é realizado o aprofundamento teórico sobre o conteúdo, a análise de documentos curriculares e a elaboração de um plano de aula com materiais didáticos próprios, como jogos e atividades investigativas. Este momento era crucial para o exercício da transposição didática, processo que transforma o saber científico em um saber apto a ser ensinado [6]. A fase de intervenção consiste na aplicação da oficina, um momento em que os bolsistas confrontavam o planejamento com a imprevisibilidade da sala de aula. Finalmente, o ciclo se fecha com a avaliação e a reflexão coletiva, onde toda a equipe discute a experiência e sistematizava os aprendizados, retroalimentando o processo para futuras ações.

<sup>1</sup>Universidade Federal de Alfenas, angela@moreno.unifal-mg.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de Alfenas, andrea@cardoso.unifal-mg.br

<sup>3</sup>Universidade Federal de Alfenas, jose@souza.unifal-mg.br

Para os licenciandos (BID), a principal contribuição da sistemática apresentada foi a superação da dicotomia teoria-prática. A imersão contínua no ambiente escolar permitiu que eles vivenciassem a complexidade do trabalho docente, articulando os saberes da graduação com os desafios concretos do ensino. Ao planejar, executar e avaliar as oficinas, eles desenvolveram habilidades essenciais para a transposição didática e para a análise crítica de currículos e materiais, fomentando a autonomia. Os professores supervisores das escolas, ao participarem ativamente do processo, tornaram-se co-formadores, fortalecendo o diálogo entre a escola e a universidade.

As oficinas pedagógicas, como atividade central do subprojeto PIBID-Matemática, materializaram a união entre teoria e prática, permitindo que os futuros professores desenvolvessem a identidade profissional reflexiva e crítica. Ao criar um ambiente de colaboração, o subprojeto contribuiu para formar educadores mais seguros, autônomos e preparados para agir como verdadeiros agentes de transformação na educação.

## Referências

- [1] P. C. Moreira and M. M. M. S. David, “O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica,” *Revista brasileira de educação*, no. 28, pp. 59–61, 2005.
- [2] D. A. Schön, *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Penso Editora, 2009.
- [3] P. Perrenoud, *Dez novas competências para ensinar*. Artmed editora, 2015.
- [4] M. A. S. Franco, “Pedagogia da pesquisa-ação,” *Educação e pesquisa*, vol. 31, pp. 483–502, 2005.
- [5] V. M. Candau, S. B. Sacavino, M. Marandino, and A. G. Maciel, “Tecendo a cidadania: oficinas pedagógicas de direitos humanos,” in *Tecendo a cidadania: oficinas pedagógicas de direitos humanos*, pp. 126–126, 2000.
- [6] Y. Chevallard, “La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné. grenoble: Ed,” *La pensée Sauvage*, 1991.

# Mini Laboratório de Funções: Explorando Funções Matemáticas por Meio de Experimentos Práticos

Caio Vinícius Leão Sabará<sup>1</sup>

Mariana Garabini Cornelissen Hoyos<sup>2</sup>

Neste trabalho apresentamos a proposta de uma série de vídeos que ilustram, de forma concreta e contextualizada, o comportamento e as aplicações das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas [1]. A ideia é produzir um mini laboratório de funções matemáticas desenvolvido para motivar a aprendizagem dos alunos sobre essas funções e também mostrar a aplicabilidade da matemática em diversas áreas. Cada experimento foi pensado para estabelecer conexões entre os conceitos teóricos e situações do cotidiano como a trajetória de uma bola de basquete, cálculo do pH de uma determinada substância, medição da pressão arterial, educação financeira, entre outros. A proposta se mostra uma alternativa acessível para tornar o ensino de funções mais dinâmico, significativo e interdisciplinar.

## Referências

- [1] E. L. Lima, *Números e funções reais*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

---

<sup>1</sup>Discente, Universidade Federal de São João del Rei,  
caio13vls@gmail.com

<sup>2</sup>Docente, Universidade Federal de São João del Rei,  
mariana@ufsj.edu.br

# Emparelhamentos de arestas de polígonos regulares

Catarina Mendes de Jesus Sánchez <sup>1</sup>

O emparelhamento de arestas de um polígono regular  $\mathcal{P}_n$ , com  $n$  lados, pode ser visto como uma aplicação quociente que leva pares de arestas do bordo de  $\mathcal{P}_n$  a arcos de curvas sobre uma superfície  $M$ . A imagem do bordo de  $\mathcal{P}_n$  forma um grafo conexo  $\mathcal{G} = (V, A)$  mergulhado em  $M$ , com  $A$  arestas e  $V$  vértices, conhecido como *grafo de emparelhamento de arestas de polígono regular* [1].

Algumas perguntas relevantes sobre esses grafos e emparelhamentos de arestas incluem:

Quantos emparelhamentos existem associados a um par  $(\mathcal{P}_n, M)$ ?

Quantos grafos de emparelhamento existem associados a um par  $(\mathcal{P}_n, M)$ ?

Quantos diagramas existem associados a cada grafo de emparelhamento do par  $(\mathcal{P}_n, M)$ ?

Para  $k = 3$ , os grafos de emparelhamento trivalentes podem estar relacionados à tesselação  $12g - 6, 3$  [1]. Em 1982, Jørgensen e Näätänen [2] demonstraram a existência de oito emparelhamentos distintos de  $\mathcal{P}_{18}$  no bitoro, associados a cinco grafos trivalentes não isomorfos. Para o tritiro, Nakamura mostrou, em [3], a existência de 65 grafos trivalentes associados a 927 emparelhamentos distintos de um polígono regular com 30 lados.

Com o objetivo de determinar famílias de grafos trivalentes para superfícies de gênero  $g > 3$ , foi introduzido em [4] o conceito de cirurgia de emparelhamento de arestas (ver Figura 1), que permite construir novos grafos de emparelhamento para superfícies de gênero predeterminado a partir de grafos de emparelhamento já conhecidos. Essas operações, que envolvem a soma conexa dos grafos juntamente com a soma conexa das superfícies, possibilitaram demonstrar que todo grafo resultante dessas cirurgias aplicadas a um número finito de grafos de emparelhamento trivalentes é também um grafo trivalente de emparelhamento de arestas, contribuindo para a obtenção de um número significativo de tais grafos.

Em [5, 6], foram introduzidas outras técnicas, como novas cirurgias, trocas de arestas (ver Figura 2) e extensões de grafos sobre superfícies. A combinação dessas técnicas se mostrou suficiente para determinar, sobre a superfície, qualquer grafo de emparelhamento de arestas de um polígono regular.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um panorama das técnicas descritas acima, com seus principais resultados, e exemplificar como construir novos emparelhamentos a partir de emparelhamentos já conhecidos.

## Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio concedido a este trabalho.

<sup>1</sup>Universidade Federal de Juiz de Fora ,  
cmendesjesus@ufjf.br

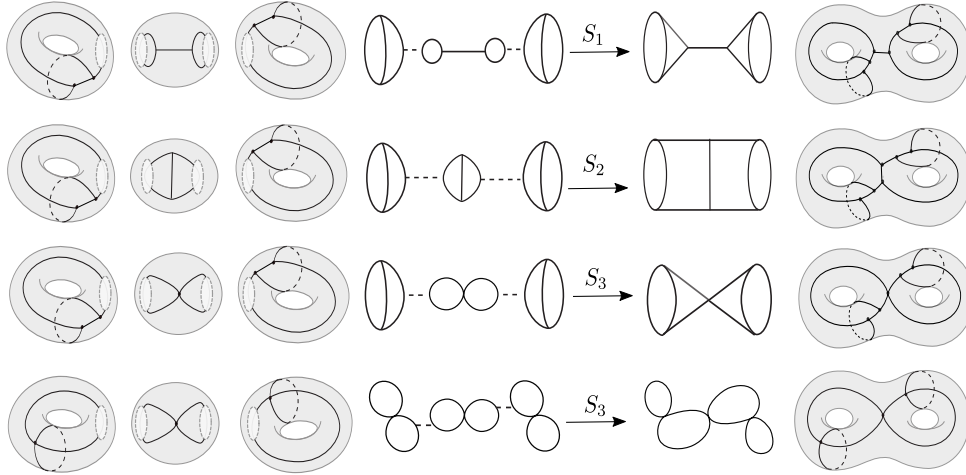


Figura 1: Cirurgias entre dois emparelhamentos de arestas.

Fonte: Elaborado pela autora em [6].

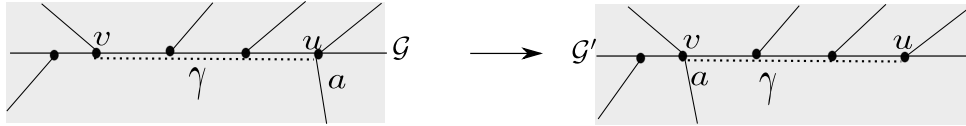


Figura 2: Troca de arestas sobre a superfície.

Fonte: Elaborado pela autora em [6].

## Referências

- [1] M. B. Faria and R. Palazzo Jr, “Emparelhamentos generalizados associados à tesselação  $\{12g- 6, 3\}$ ,” *Trends in Computational and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 1, pp. 59–67, 2010.
- [2] T. Jørgensen and M. Näätänen, “Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons,” *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 33, no. 4, pp. 451–461, 1982.
- [3] G. Nakamura, “Generic fundamental polygons for surfaces of genus three,” *Kodai Mathematical Journal*, vol. 27, no. 1, pp. 88–104, 2004.
- [4] M. B. Faria, C. Mendes de Jesus, and P. D. R. Sanchez, “Surgeries of pairing of edges associated to trivalent graphs,” *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, vol. 47, no. 4, pp. 1085–1095, 2016.
- [5] C. Mendes de Jesus and P. D. Romero, “Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for regular polygons,” *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, vol. 51, no. 2, pp. 527–541, 2020.
- [6] C. Mendes de Jesus, “Grafos associados aos emparelhamentos de arestas de polígonos regulares,” *Trends in Computational and Applied Mathematics*, vol. 23, pp. 335–347, 2022.

# CR Yamabe Flow on Complete CR Manifold

Flávio Almeida Lemos <sup>1</sup>

We present a study of the CR Yamabe flow on complete, strictly pseudoconvex pseudohermitian manifolds. Our analysis is motivated by the search for geometric flows that preserve the CR structure while deforming the contact form in a controlled way. Using the parabolic comparison principle for Hörmander-type operators, we construct explicit ODE barriers that yield two-sided estimates for the evolving Tanaka–Webster scalar curvature. These bounds provide effective control on the curvature, ensuring uniform boundedness under natural assumptions.

Let  $(M^{2n+1}, \theta_0)$ , with  $2n+1 \geq 3$ , be a strictly pseudoconvex pseudohermitian manifold, complete with respect to the Carnot–Carathéodory distance. Consider a smooth family of pseudohermitian contact forms  $\theta(t)$  evolving by the (unnormalized) CR Yamabe flow:

$$\partial_t \theta(t) = -R(x, t) \theta(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (1)$$

where  $R(x, t)$  denotes the Tanaka–Webster scalar curvature associated with  $\theta(t)$ . Writing  $\theta(t) = v(x, t)^{\frac{2}{n}} \theta_0$ , we see that the flow preserves the conformal class of  $\theta_0$ . By the conformal transformation law for the Webster scalar curvature (Jerison–Lee [2]) and the variational formula along (1) (Ho [3, 4]), one obtains that  $R$  satisfies the nonlinear reaction–diffusion equation

$$\partial_t R = (n+1) \Delta_b R + R^2 \quad \text{on } M \times [0, T), \quad (2)$$

where  $\Delta_b$  is the sub-Laplacian associated with  $\theta(t)$ . Our main result concerns the comparison of  $R$  with suitable ODE models.

**Teorema 1** *Let  $(M^{2n+1}, \theta_0)$ ,  $2n+1 \geq 3$ , be complete with Carnot–Carathéodory distance  $d_{cc}$ , and let  $\{\theta(t)\}_{t \in [0, T)}$  be a smooth family of contact forms. Suppose  $R(x, t)$  is a classical solution of (2) with bounded initial data  $R_0 \in C^2(M)$ , and assume  $R(\cdot, t)$  remains bounded on  $M$  for every  $t \in [0, T_0]$ ,  $T_0 < T$ . (For the argument, it suffices that  $\Delta_b$  is a Hörmander operator, i.e., a sum of squares of a bracket-generating family of smooth horizontal vector fields.) Define the ODEs*

$$\phi'_\pm(t) = \phi_\pm(t)^2, \quad \phi_+(0) = \sup_{x \in M} R_0(x), \quad \phi_-(0) = \inf_{x \in M} R_0(x), \quad (3)$$

*on their maximal intervals of existence. Then, for every  $(x, t) \in M \times [0, \tau)$  with*

$$\tau := \min\{T, T_+, T_-\}, \quad T_\pm = \text{maximal existence time of } \phi_\pm,$$

*we have the pointwise bounds*

$$\phi_-(t) \leq R(x, t) \leq \phi_+(t). \quad (4)$$

*In particular, if  $\phi_+(0) > 0$  then  $\phi_+$  blows up at  $t_* = 1/\phi_+(0)$ , and (4) holds on  $[0, \min\{T, t_*\})$ .*

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Ouro Preto,  
flavioalemos@ufop.edu.br

From Theorem 1 and the explicit solutions of (3), we deduce the following corollaries.

**Corolário 1 (Two-sided bounds)** *Under the assumptions of Theorem 1, for all  $t \in [0, \tau)$  and all  $x \in M$ ,*

$$\frac{\inf_M R(\cdot, 0)}{1 - \inf_M R(\cdot, 0)t} \leq R(x, t) \leq \frac{\sup_M R(\cdot, 0)}{1 - \sup_M R(\cdot, 0)t},$$

where the left-hand side is interpreted as 0 if  $\inf_M R(\cdot, 0) = 0$ . In particular,

$$\inf_M R(\cdot, t) \geq \min\{\inf_M R(\cdot, 0), 0\}, \quad \sup_M R(\cdot, t) \leq \frac{\sup_M R(\cdot, 0)}{1 - \sup_M R(\cdot, 0)t}.$$

References: Bony's maximum principle [1] for the comparison argument; the curvature evolution (2) from [2, 3, 4].

**Corolário 2 (Uniform boundedness)** *Let  $R$  solve (2) with bounded initial data.*

1. *If  $\sup_M R(\cdot, 0) \leq 0$ , then  $R(\cdot, t) \leq 0$  for all  $t \in [0, T)$ ; hence  $R$  remains uniformly bounded.*
2. *If  $\sup_M R(\cdot, 0) > 0$ , then  $R$  is uniformly bounded on each  $[0, T_0] \subset [0, T)$  with  $T_0 < 1/\sup_M R(\cdot, 0)$ , and*

$$\sup_{M \times [0, T_0]} R \leq \frac{\sup_M R(\cdot, 0)}{1 - \sup_M R(\cdot, 0)T_0}.$$

*In particular, the maximal existence time satisfies  $T_{\max} \leq 1/\sup_M R(\cdot, 0)$ .*

## Referências

- [1] J.-M. Bony. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 19:277–304, 1969.
- [2] D. Jerison and J. M. Lee. The Yamabe problem on CR manifolds. *J. Differential Geom.*, 25(2):167–197, 1987.
- [3] P.-T. Ho. The Long-time existence and convergence of the CR Yamabe Flow. *Communications in Contemporary Mathematics*, Vol 14, No 02-1240014, 2012.
- [4] P.-T. Ho. Convergence of the CR Yamabe flow. *Mathematische Annalen*, Volume 373, pages 743–830, 2019. .

# Caracterização dos Anéis de Grupos Jordan Nilpotentes de Índices 2 e 3

Francismara Fernandes Guerra <sup>1</sup>

Mariana Garabini Cornelissen Hoyos <sup>2</sup>

A teoria das álgebras de Jordan teve sua origem em 1934 com o trabalho de Jordan, Neumann e Wigner [1], cujo interesse era descobrir um novo sistema algébrico para formalizar a mecânica quântica. Hoje em dia, as álgebras de Jordan possuem conexões com as álgebras de Lie e aplicações importantes em diversas áreas, tais como, física, matemática e até em genética [2]. Uma álgebra é dita uma álgebra de Jordan se valem as seguintes identidades para a multiplicação:  $xy = yx$  e  $(x^2y)x = x^2(yx)$  (essa última é conhecida como identidade de Jordan). Uma álgebra de Jordan é nilpotente se, para algum inteiro positivo  $n \geq 2$ , o produto de quaisquer  $n$  elementos dessa álgebra, em uma certa ordem, é nulo. O menor  $n$  para o qual a álgebra é Jordan nilpotente é dito índice de nilpotência da álgebra. Neste trabalho estamos interessados em caracterizar quando os anéis de grupo  $RG$ , com  $G$  um grupo qualquer e  $R$  um anel associativo, comutativo e com identidade, é Jordan nilpotente de índices 2 e 3, tal como em [3].

## Referências

- [1] P. JORDAN, J. V. NEUMAN, and E. P. WIGNER, “On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism,” in *The collected works of Eugene Paul Wigner: Part A: The scientific papers*, pp. 298–333, Springer, 1993.
- [2] M. Kevin, *A taste of Jordan algebras*, vol. 1. Springer, 2004.
- [3] E. G. Goodaire and C. P. Milies, “Jordan nilpotency in group rings,” *Journal of Group Theory*, vol. 17, no. 4, pp. 541–557, 2014.

---

<sup>1</sup>Instituto Federal de Minas Gerais,  
francismara.guerra@ifmg.edu.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de São João del-Rei,  
mariana@ufsj.edu.br

# Uma Forma Normal Morse-Bott para Hipersuperfícies Real-Analíticas Levi-Flat

Gustavo Franco Marra Domingues <sup>1</sup>

Arturo Fernández-Pérez <sup>2</sup>

Seja  $M \subset \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície real-analítica de codimensão real um dada localmente por  $M = \{F(z) = 0\}$ ,  $F \in \mathcal{A}_{n\mathbb{R}}$ ,  $M^*$  sua parte regular. A *distribuição de Levi* em  $M^*$  é

$$L_p := \ker(\partial F(p)) \subset T_p M^*, \quad p \in M^*.$$

Se  $L$  é Frobenius-integrável,  $M$  é chamada *Levi-flat*. Geometricamente, a condição de integrabilidade significa que  $M$  é localmente folheada por subvariedades complexas de codimensão um.

Se  $M$  é não singular, o teorema clássico de E. Cartan [1] garante que em torno de cada ponto  $q \in M$  existem coordenadas holomorfas  $(z_1, \dots, z_n)$  tais que  $M = \{\operatorname{Re}(z_n) = 0\}$ , chamada *forma normal local* para hipersuperfícies Levi-flat suaves.

O estudo de formas normais para hipersuperfícies Levi-flat singulares se inicia com Burns e Gong [2]. Cerveau e Lins Neto obtêm o mesmo resultado em [3] usando resultados de teoria de folheações holomorfas. Diversas generalizações foram obtidas para diferentes tipos de hipersuperfícies desta forma, ver [4], [5], [6], [7], [8].

Neste trabalho, combinamos estas técnicas de teoria de folheações holomorfas e o Lema de Morse-Bott. Provamos o seguinte resultado:

**Teorema 1** *Seja  $M = \{F = 0\}$  um germe de hipersuperfície real-analítica Levi-flat em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $n \geq 2$ , tal que:*

1.  $F(z_1, \dots, z_n) = \operatorname{Re}(z_1^2 + \dots + z_{n-c}^2) + H(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  com  $n - c \geq 2$ ;
2.  $H(z, \bar{z}) = \overline{H(\bar{z}, z)}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial z_j}(z, \bar{z}) = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j}(z, \bar{z}) = 0$  para todo  $n - c + 1 \leq j \leq n$ , e  $H(z, \bar{z}) = O(|z|^3)$ .

Então, existe um germe de biholomorfismo  $\Phi \in \operatorname{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  tal que

$$D\Phi(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{id}_{n-c} & \star \\ 0 & \operatorname{id}_c \end{pmatrix},$$

em que  $\operatorname{id}_{n-c} \in \operatorname{GL}(n - c, \mathbb{C}^n)$ ,  $\operatorname{id}_c \in \operatorname{GL}(c, \mathbb{C}^n)$ , e

$$\Phi^{-1}(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^n, 0) : \operatorname{Re}(x_1^2 + \dots + x_{n-c}^2) = 0\}.$$

<sup>1</sup>Universidade Federal de Itajubá, *campus* Itabira  
marra@unifei.edu.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de Minas Gerais,  
fernandez@ufmg.br

Quando  $c = 0$ , este teorema recupera formas normais de Burns e Gong [2]. Quando  $n = 3$  e  $c = 1$ , o resultado corresponde a formas normais de hipersuperfícies Levi-flat com linha singular isolada [6]. Além disso, o resultado também dá uma nova forma normal para a hipersuperfície quadrática Levi-flat do tipo  $\mathcal{Q}_{0,2(n-c)}$  descrita em [2].

## Referências

- [1] É. Cartan, “Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes,” *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 11, no. 1, pp. 17–90, 1933.
- [2] D. M. J. Burns and X. H. Gong, “Singular levi-flat real analytic hypersurfaces,” *American Journal of Mathematics*, vol. 121, no. 1, pp. 23–53, 1999.
- [3] D. Cerveau and A. Lins Neto, “Local levi-flat hypersurfaces invariants by a codimension one holomorphic foliation,” *American Journal of Mathematics*, vol. 133, no. 3, pp. 677–716, 2011.
- [4] A. Fernández-Pérez, “On normal forms of singular levi-flat real analytic hypersurfaces,” *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N.S.)*, vol. 42, no. 1, pp. 75–85, 2011.
- [5] A. Fernández-Pérez, “Normal forms of levi-flat hypersurfaces with arnold type singularities,” *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (5)*, vol. 13, no. 3, pp. 745–774, 2014.
- [6] A. Fernández-Pérez, “On normal forms for levi-flat hypersurfaces with an isolated line singularity,” *Arkiv för Matematik*, vol. 53, no. 1, pp. 65–78, 2015.
- [7] A. Fernández-Pérez and G. Marra, “Local normal forms of singular levi-flat hypersurfaces,” *Journal of Geometric Analysis*, vol. 29, no. 3, pp. 2776–2804, 2019.
- [8] A. Fernández-Pérez and G. Marra, “On levi-flat hypersurfaces with singularities on a manifold boundary,” *Mathematische Nachrichten*, vol. 297, no. 10, pp. 3641–3649, 2024.

# Sistemas dinâmicos com entropia nula: novos invariantes

Hellen de Paula <sup>1</sup>

Um problema clássico em sistemas dinâmicos é estimar a complexidade de um mapa em termos da dispersão de suas órbitas, e um dos principais conceitos usados para esse fim é a entropia topológica clássica. Entretanto, muitas famílias interessantes de sistemas dinâmicos apresentam todos os seus elementos tendo entropia topológica nula. Nosso objetivo é apresentar ferramentas que se propõem ao estudo de sistemas com entropia topológica nula, nomeadamente, a entropia polinomial, introduzida por Marco [4], e a entropia generalizada, proposta por Correa e Pujals [3]. Apresentaremos resultados recentes obtidos em [1] e [2] com o uso dessas ferramentas na classificação de famílias interessantes de sistemas dinâmicos. Este trabalho é desenvolvido em parceria com Javier Correa<sup>2</sup>.

## Referências

- [1] J. Correa and H. de Paula. Polynomial entropy of morse-smale diffeomorphisms on surfaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 182:103225, 2023.
- [2] J. Correa and H. de Paula. Flexibility of generalized entropy for wandering dynamics. Preprint-2024. arXiv: 2303.14780 [math.DS].
- [3] J. Correa and E. R. Pujals. Orders of growth and generalized entropy. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 22(4):1581–1613, 2023.
- [4] J.-P. Marco. Polynomial entropies and integrable hamiltonian systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 18(6):623–655, 2013.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Minas Gerais,  
hellenlimadepaula@ufmg.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de Minas Gerais,  
jcorrea@mat.ufmg.br

# Pontos $\mathbb{F}_q$ -primitivos em hipersuperfícies

José Alves Oliveira <sup>1</sup>

Marcelo O. Veloso <sup>2</sup>

É conhecido que o grupo multiplicativo  $\mathbb{F}_q^*$  de um corpo finito  $\mathbb{F}_q$  com  $q$  elementos é um grupo cíclico. Os geradores desse grupo são denominados elementos primitivos de  $\mathbb{F}_q$ . Um ponto  $\mathbb{F}_q$ -racional sobre uma hipersuperfície afim dada pela equação

$$f(x_1, \dots, x_s) = 0$$

é dito primitivo se todas as suas coordenadas são elementos primitivos de  $\mathbb{F}_q$ . A análise da existência e distribuição desses pontos tem sido motivada por estudos anteriores envolvendo pares da forma  $(\alpha, f(\alpha))$ , com  $\alpha$  e  $f(\alpha)$  ambos primitivos (como é feito, por exemplo, em [1]), onde inicialmente foram considerados curvas afins [2] e superfícies afins [3]. A presente abordagem generaliza esse problema para hipersuperfícies afins em várias variáveis, ampliando esse estudo sobre estruturas algébricas em corpos finitos.

Nesse contexto, apresentamos estimativas para o número de pontos primitivos  $\mathbb{F}_q$  que satisfazem a equação  $f(x_1, \dots, x_s) = 0$ , considerando diferentes classes de polinômios. Em particular, são tratados os casos em que  $f$  é um polinômio Dwork-regular e quando  $f$  é do tipo Fermat. Utilizando técnicas baseadas em somas de caracteres, demonstramos que, para essas classes, o número de pontos primitivos é positivo quando  $q$  é suficientemente grande. Além disso, como consequência dos resultados obtidos, é provada uma conjectura recentemente proposta por Takshak, Kapetanakis e Sharma [3]. Por fim, no caso especial em que  $f$  define um hiperplano e  $q$  é um primo de Fermat, fornecemos uma fórmula explícita para o número de pontos primitivos sobre tal hipersuperfície.

## Referências

- [1] S. Cohen, T. Oliveira e Silva, and T. Trudgian, “A proof of the conjecture of cohen and mullen on sums of primitive roots,” *Mathematics of Computation*, vol. 84, no. 296, pp. 2979–2986, 2015.
- [2] S. D. Cohen, G. Kapetanakis, and L. Reis, “The existence of  $\mathbb{F}_q$ -primitive points on curves using freeness,” *Comptes Rendus. Mathématique*, vol. 360, no. G6, pp. 641–652, 2022.
- [3] S. Takshak, G. Kapetanakis, and R. K. Sharma, “ $\mathbb{F}_q$ -primitive points on varieties over finite fields,” *arXiv preprint arXiv:2410.03836*, 2024.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Lavras,  
jose\_oliveira@ufla.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de São João del-Rei, Alto Paraopeba,  
veloso@ufsj.edu.br

# Atribuição de Docentes com Priorização Exponencial: Um Estudo Aplicado ao SME/ICMC–USP

José Eduardo Saroba Bieco <sup>1</sup>

Elias Salomão Helou Neto <sup>2</sup>

O problema de atribuição de docentes, também conhecido como *Faculty Assignment Problem* (FAP) [1], é recorrente em instituições de ensino e caracteriza-se como um problema combinatório de alta complexidade, classificado como NP-difícil [2]. No Departamento de Matemática Aplicada e Estatística (SME) do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP), esse processo era realizado manualmente, demandando diversas horas da comissão responsável para concluir o quadro de atribuições.

Diante desse cenário, propusemos o desenvolvimento de um sistema de apoio à tomada de decisão, baseado na metaheurística de Busca Tabu, com o objetivo de gerar soluções otimizadas para avaliação da comissão. A proposta considera diversas restrições, como: evitar atribuições de turmas para docentes que não manifestaram interesse, penalizações para conflitos de horário e para turmas não atribuídas, preservação de atribuições travadas via interface e penalizações relacionadas à carga de trabalho — quando não se atinge a carga mínima ou se ultrapassa a carga máxima estabelecida.

Um aspecto particular do SME é a consideração de um *saldo de carga didática*, que representa o histórico de carga didática atribuídas a cada docente ao longo dos semestres. Docentes com saldo negativo — ou seja, com menos aulas do que o esperado — tendem a receber mais atribuições, visando o equilíbrio da carga ao longo do tempo.

Na literatura [1, 2], é comum encontrar formulações do FAP cuja função objetivo visa maximizar a adequação entre preferências dos docentes e as atribuições realizadas. Considerando uma matriz  $P \in \mathbb{Z}_+^{|D| \times |T|}$ , em que  $p_{i,j}$  representa a prioridade do docente  $i$  pela turma  $j$  (sendo que valores menores indicam maior preferência), e uma matriz binária  $X \in \{0, 1\}^{|D| \times |T|}$ , em que  $x_{i,j} = 1$  indica que o docente  $i$  foi atribuído à turma  $j$ , a formulação clássica da função objetivo é dada por:

$$\max \sum_{i \in D} \sum_{j \in T} x_{i,j} \cdot p_{i,j}. \quad (1)$$

No entanto, no contexto do SME, essa formulação foi adaptada de forma a intensificar a priorização de atribuições mais desejadas. Inicialmente, utilizamos um multiplicador  $K$

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado, Instituto De Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) - Universidade de São Paulo (USP),  
jose.bieco@usp.br

<sup>2</sup>Professor Orientador, Instituto De Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) - Universidade de São Paulo (USP) ,  
elias@icmc.usp.br

para ajustar o peso da função objetivo com relação as penalizações associadas às restrições flexíveis. Posteriormente, visando amplificar a diferença entre níveis de prioridade, foi incorporada uma ponderação não linear, inspirada na pontuação utilizada na Fórmula 1. A nova função objetivo foi então modelada como:

$$\max \sum_{i \in D} \sum_{j \in T} x_{i,j} \cdot \lambda(p_{i,j}), \quad (2)$$

em que  $\lambda(p_{i,j})$  representa o valor atribuído à prioridade  $p_{i,j}$ , definido por:

$$\lambda(p_{i,j}) = 2^{P_{\max} - p_{i,j}}, \quad (3)$$

sendo  $P_{\max}$  o maior valor presente na matriz  $P$ . Essa formulação promove uma progressão exponencial entre prioridades, de modo que, por exemplo, a diferença entre prioridades 1 e 2 não será apenas unitária, mas dada por um fator de  $2^{P_{\max}-2}$ , enfatizando preferências mais fortes.

Como consequência dessa reformulação, foi necessário revisar também as penalizações associadas às restrições de carga de trabalho, devido ao grande aumento de suas violações. Ainda assim, os experimentos indicaram que a nova formulação se mostrou eficaz na geração de soluções iniciais de melhor qualidade, especialmente por reduzir o número de docentes com carga atribuída abaixo do mínimo e acima do máximo estipulado pelo departamento.

## Referências

- [1] J. A. Breslaw, “A linear programming solution to the faculty assignment problem,” *Socio-Economic Planning Sciences*, vol. 10, no. 6, pp. 227–230, 1976.
- [2] S. Khorbotly and D. White, “A preference-based faculty-assignment tool for course scheduling optimization,” in *2024 ASEE Annual Conference & Exposition*, (Portland, Oregon), pp. 1–8, American Society for Engineering Education, June 2024. DSA Technical Session 4, Data Science & Analytics Constituent Committee (DSA).

# Soluções Locais e Globais para Equações Integro-Diferenciais Abstratas com Retardo Dependente do Estado

José Paulo Carvalho dos Santos <sup>1</sup>

Michelle Pierri <sup>2</sup>

Nesta apresentação, investigamos classes de equações integro-diferenciais que podem ser modeladas pela equação abstrata

$$\frac{d}{dt} \left( u(t) + \int_0^t P(t-s)u(s) ds \right) = Au(t) + \int_0^t Q(t-s)u(s) ds + G(t, u(t-\sigma(t, u_t))), \quad t \in [0, a],$$

com condição inicial

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B} = C([-p, 0]; Z),$$

onde  $A$  e  $Q(t)$ , para  $t \geq 0$ , são operadores lineares fechados definidos em um domínio comum  $D(A)$ , denso em  $Z$ , enquanto  $(P(t))_{t \geq 0}$  é uma família de operadores lineares limitados sobre  $Z$ . A variável  $u_t$  representa o histórico de  $u(\cdot)$  no instante  $t$  ( $u_t \in \mathcal{B}$  e  $u_t(\theta) = u(t + \theta)$  para  $\theta \in [-p, 0]$ ,  $t > 0$ ), e  $G(\cdot)$  e  $\sigma(\cdot)$  são funções contínuas.

É amplamente conhecido que equações integro-diferenciais em espaços abstratos desempenham um papel importante na literatura, devido à sua capacidade de modelar uma ampla gama de equações relevantes que surgem em sistemas físicos e biológicos. Por exemplo, na teoria clássica desenvolvida por Gurtin e Pipkin [1], Miller [2] e Nunziato [3], equações integro-diferenciais são utilizadas para descrever a condução de calor em materiais com memória amortecida.

Uma técnica importante para a análise de equações integro-diferenciais parciais em espaços abstratos é a teoria dos operadores resolventes. Essa teoria é amplamente utilizada para estabelecer a existência, unicidade e propriedades qualitativas das soluções dessas equações. A abordagem por operadores resolventes foi desenvolvida em diversos trabalhos: inicialmente por Grimmer et al. [4, 5]; posteriormente, Da Prato et al. [6] e Lunardi [7] investigaram o caso com  $P \equiv 0$ . Mais recentemente, Dos Santos et al. [8, 9] trataram o caso geral, no qual  $P \neq 0$  e  $Q \neq 0$ .

Neste trabalho, utilizando a teoria de operadores resolventes e inspirados nas ideias de [10], estabelecemos a existência local e global, bem como a unicidade do problema (1)-(2), em espaços de funções Lipschitz. Nesse contexto, enfatizamos a importância de desigualdades do tipo:

$$\|u(\sigma(\cdot, u(\cdot))) - v(\sigma(\cdot, v(\cdot)))\|_{C([0, b]; Z)} \leq (1 + [v]_{C_{Lip}([-p, b]; Z)}[\sigma]_{C_{Lip}([0, b] \times \mathcal{B}; \mathbb{R})})\|u - v\|_{C([0, b]; Z)},$$

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, ICEX, Universidade Federal de Alfenas, [zepaulo@unifal-mg.edu.br](mailto:zepaulo@unifal-mg.edu.br). Este autor é financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) projeto N°. APQ-02561-25.

<sup>2</sup>Departamento de Computação e Matemática, FFCLRP, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, SP, Brasil. [michellepierri@ffclrp.usp.br](mailto:michellepierri@ffclrp.usp.br)

onde

$$[v]_{C_{Lip}([-p,b];Z)} := \sup_{\substack{t,s \in [-p,b] \\ t \neq s}} \frac{\|v(t) - v(s)\|_Z}{|t - s|}.$$

Como aplicação, estudamos a existência e unicidade de solução para um sistema integro-diferencial parcial acoplado com memória.

## Referências

- [1] M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, “A general theory of heat conduction with finite wave speeds,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 31, pp. 113–126, 1968.
- [2] R. K. Miller, “An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 66, no. 2, pp. 313–332, 1978.
- [3] J. W. Nunziato, “On heat conduction in materials with memory,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 29, no. 2, pp. 187–204, 1971.
- [4] R. C. Grimmer, “Resolvent operators for integral equations in a banach space,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 273, no. 1, pp. 333–349, 1982.
- [5] R. C. Grimmer and F. Kappel, “Series expansions for resolvents of volterra integro-differential equations in banach space,” *Siam Journal of Math. Anal.*, vol. 15, no. 3, pp. 595–604, 1984.
- [6] G. D. Prato and M. Iannelli, “Existence and regularity for a class of integro-differential equations of parabolic type,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 112, no. 1, pp. 36–55, 1985.
- [7] A. Lunardi, “Laplace transform method in integro-differential equations,” *Journal of Integral Equations and Applications*, vol. 10, pp. 185–211, 1985.
- [8] J. P. C. D. Santos, “Existence results for a partial neutral integro-differential equation with state-dependent delay,” *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, vol. 2010, no. 29, pp. 1–12, 2010.
- [9] H. Henríquez and J. P. C. D. Santos, “Differentiability of solutions of abstract neutral integro-differential equations,” *J. Integral Equations and Applications*, vol. 25, no. 1, pp. 47–77, 2013.
- [10] E. Hernández, D. Fernandes, and J. Wu, “Existence and uniqueness of solutions, well-posedness and global attractor for abstract differential equations with state-dependent delay,” *Journal of Differential Equations*, vol. 302, no. 25, pp. 753–806, 2021.

# Bifurcations in the family of billiards associated with the curvature flow

Josué Geraldo Damasceno <sup>1</sup>

Mário Jorge Dias Carneiro <sup>2</sup>

Carlos Salazar <sup>3</sup>

This talk aims to describe some dynamical properties of the family of billiard maps associated with a one-parameter family of curves satisfying the curvature flow or the curve shortening flow.

This flow was studied in a series of papers by M. Gage and R. Hamilton [1], [2], and M. Grayson [3] that were published in the late 1980s. These works deal mainly with the long-time behavior of regular closed plane curves which deform in the direction of the curvature vectors. The curves generally shrink to a point, but they become increasingly "round". This geometrical feature is proved by considering a *normalized flow* such that the enclosed area is constant equals to  $\pi$ . In this case, the curvature converges uniformly to one. Grayson proved that any simple closed curve becomes convex and then evolves as a family of convex curves approximating the circle of radius one.

Therefore it is natural to ask what type of changes occur in the billiard maps associated with this family of curves. In other words, changes in the dynamical properties can be observed as the curve evolves by the curvature flow.

Billiard maps generally may have very complicated behavior, since it may contain chaotic regions, the Birkhoff instability regions. On the other hand, billiard on circles are trivial in the sense that the phase space is foliated by invariant circles and the map restricted to each circle is a rotation. Hence as the curves evolves the dynamics should tend to a less (although not monotonically) complicated behavior.

The main result of this paper is analogous to Theorem 1.1 of [4] for homotopically trivial invariant curves around the elliptic period 2 orbit of the ellipse. The caustics corresponding to such invariant curves are co-focal hyperboles:

The normalized curvature flow breaks all resonant hyperbolic caustics of the billiard map on the ellipse.

We also study the bifurcations of another type of periodic orbits, the normal periodic orbits  $NP(2n)$  for a family of ovals satisfying  $C_t$  satisfying the normalized curve shortening flow.

Similar to the period two orbits, these periodic orbits start perpendicular to the boundary curve and after some reflections, they hit the boundary again orthogonally. Thus,

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Ouro Preto,  
josue@ufop.edu.br

<sup>2</sup>Universidade Federal de Minas Gerais ,  
carneiro@mat.ufmg.br

<sup>3</sup>Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
carloossalazar@cefetmg.br

after the reflection they return tracing back the same polygon arriving to the initial point.

There is a geometric condition for the existence of these orbits in terms of curves similar to evolutes. We show in Theorem 4.10 [5], that, as the boundary curve evolves by the curvature flow, these orbits disappear gradually.

In other words, in Theorem we prove:

*If  $X(t, s)$  is a family of convex curves satisfying the curvature flow, then for any integer  $N > 1$ , there is a real number  $T$  such that, for every  $t > T$ , the billiard map associated with the curve does not have a normal periodic orbit of period  $2n \leq 2N$ .*

This also may be interpreted as *the long term breaking of a family of invariant rotational resonant curve around elliptic diameters.*

## Referências

- [1] M. Gage, “An isoperimetric inequality with applications to curve shortening,” *Duke Math. Journal*, vol. 50, no. 1, pp. 1225–1229, 1983.
- [2] M. Gage and H. R. S., “The heat equation shrinking convex plane curves,” *J. Differential Geometry*, vol. 23, pp. 69–96, 1986.
- [3] M. Grayson, “Shortening embedded curves,” *Ann. of Math.*, vol. 129, pp. 71–111, 1989.
- [4] J. G. D. M. J. D.-C. R. Ramirez-Ros, “The billiard inside an ellipse deformed by the curvature flow,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 2, pp. 705–719, 2017.
- [5] M. J. D. C. C. Salazar, J. G. Damasceno, “Bifurcations in the family of billiards associated with the curvature flow,” *Preprint*, 2025.

# Limite de Alta Densidade para um Sistema de Reação-Difusão

Gurgel, L.A. <sup>1</sup>

Neste seminário apresentarei um trabalho em andamento em conjunto com Tertuliano Franco (UFBA). Buscamos o limite de alta densidade para um sistema de passeios aleatórios independentes superpostos com uma dinâmica de nascimento e morte com condições de fronteira. Nos baseamos em [1], onde obtivemos estimativas de grandes desvios na norma supremo para um sistema semelhante, porém evoluindo no toro discreto com  $N$  sítios. Um ingrediente importante na prova de grandes desvios consiste em fornecer um limite de alta densidade uma classe adequada de perturbações do processo original.

## Referências

- [1] T. Franco, L. Gurgel, and B. N. de Lima, “Large deviations in the supremum norm for a reaction–diffusion system,” *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, vol. 36, no. 1, pp. 45–80, 2022.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Ouro Preto, luana.gurgel@ufop.edu.br

# Efeitos de concentração da H-medida em diferentes ambientes ergódicos

Luís Salvino<sup>1</sup>Jean Silva<sup>2</sup>

A H-medida foi um instrumento matemático introduzido por L. Tartar em [1], P. Gerárd em [2] e posteriormente melhorada por E.Y. Panov em [3]. Em suma, essa medida quantifica, na fase (ou seja, o espaço físico vezes o espaço de Fourier das direções de propagação), a falta de compacidade de sequências fracamente convergentes. Neste trabalho, calculamos a H-medida gerada por funções em álgebras ergódicas distintas. Vimos que a H-medida gerada por funções fracamente quase-periódicas tem a mesma estrutura de uma que é periódica: a direção da variável de Fourier  $\xi$  é uma medida puramente atômica. Mas, J. Silva em [4], construiu uma função contínua tal que a maioria de suas realizações são funções ergódicas que estão além do espaço das funções fracamente quase-periódicas. Sendo assim, computamos a H-medida gerada por uma função ergódica que está além das configurações fracamente quase-periódicas e observamos que sua H-medida correspondente tem uma estrutura completamente diferente: a direção da variável de Fourier  $\xi$  é uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

## Referências

- [1] L. Tartar, “H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, p. 193–230, 1990.
- [2] P. Gerárd, “Microlocal defect measures,” *Communications in Partial Differential Equations*, p. 1761–1794, 1991.
- [3] E. Panov, “On sequences of measure-valued solutions of first-order quasilinear equations,” *Russian Academy of Sciences Sbornik Mathematics*, pp. 211–227, 1995.
- [4] J. Silva, “Ergodic algebra beyond the weak almost periodic function,” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, pp. 441–456, 2021.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Minas Gerais,  
luisfsalvino@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal de Minas Gerais,  
jean@mat.ufmg.br

# Álgebras com involução graduada de crescimento quadrático das codimensões

Luiz Henrique de Souza Matos <sup>1</sup>

Em 2021, Ioppolo, dos Santos, Santos e Vieira [1] classificaram todas as variedades de  $\ast$ -superálgebras minimais de crescimento quadrático da sequência de codimensões. Posteriormente, Bessades, Costa e Santos [2], classificaram as variedades de crescimento quadrático geradas por  $\ast$ -superálgebras unitárias, mostrando que estas são soma direta de uma quantidade finita de  $\ast$ -superálgebras de crescimento no máximo quadrático.

Recentemente, Cota e Vieira [3] classificaram as álgebras com involução grupo graduada que geram variedades minimais de crescimento quadrático. Motivados pelo trabalho de Bessades, Costa e Santos, buscamos responder se as variedades geradas por álgebras unitárias com involução grupo graduada são soma de uma quantidade finita de minimais de crescimento no máximo quadrático.

Este é um trabalho em andamento junto com Cota e Vieira.

## Referências

- [1] A. Ioppolo, R. B. dos Santos, M. L. O. Santos, and A. C. Vieira, “Superalgebras with graded involution: classifying minimal varieties of quadratic growth,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 621, pp. 105–134, 2021.
- [2] D. C. L. Bessades, W. D. S. Costa, and M. L. O. Santos, “On unitary algebras with graded involution of quadratic growth,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 689, pp. 260–293, 2024.
- [3] W. Q. Cota and A. C. Vieira, “Minimal varieties of algebras with graded involution and quadratic growth,” *Preprint*.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Minas Gerais ,  
luizmatos@ufmg.br

# Vértices e Inflexões de Curvas Planas Implícitas

Marco Antônio do Couto Fernandes <sup>1</sup>

Vértices e inflexões de curvas planas representam aspectos fundamentais da geometria dessas curvas. Estes pontos são definidos como os pontos críticos e os zeros da curvatura, respectivamente. Entretanto, definições equivalentes podem ser dadas utilizando, por exemplo, o contato com círculos e retas (ver [1] para mais detalhes).

Em curvas singulares, vértices e inflexões estão concentrados na singularidade e podem aparecer quando a curva é deformada. Dado um germe de curva plana suave definido implicitamente por  $f(x, y) = 0$ , com uma singularidade isolada na origem, definimos dois invariantes  $I_f$  e  $V_f$ , que contam o número de inflexões e vértices “concentrados” na singularidade, respectivamente. Nesta apresentação, serão abordados os resultados obtidos em [2] a respeito destes invariantes, como a relação existente entre eles, o número de Milnor da singularidade e o contato entre a curva e o círculo osculador.

## Referências

- [1] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities*. Cambridge: Cambridge University Press, 2a. ed., 1992.
- [2] J. W. Bruce, M. A. C. Fernandes, and F. Tari, “On vertices and inflections of singular plane curves,” *arXiv:2405.19239*.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Viçosa,  
marco.a.fernandes@ufv.br

# Estimando a dimensão de conjuntos de coincidência em teoremas do tipo Tverberg

Nelson Antonio Silva <sup>1</sup>

O resultado clássico de Bourgin e Yang [1, 2] estabelece que, se  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um mapa  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante, então o conjunto  $Z_f = f^{-1}(0)$  satisfaz

$$\dim(Z_f) \geq n - m - 1,$$

onde  $\dim$  denota a dimensão de recobrimento. Em um trabalho recente, Błaszczuk et al. [3] apresentaram formulações abstratas e gerais do teorema de Bourgin–Yang em diversos contextos. Entre as aplicações discutidas, destaca-se uma versão de Bourgin–Yang para o teorema de Tverberg topológico no caso em que  $r$  é uma potência de primo.

Quando  $r = p^k$  é uma potência de primo e  $d \geq 1$ , o teorema de Tverberg topológico clássico [4] afirma que, para toda aplicação contínua  $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  com  $N \geq (d+1)(r-1)$ , existem faces  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  de  $\Delta_N$  que são duas a duas disjuntas e tais que

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Em [3], os autores obtêm uma estimativa para a dimensão do conjunto de pontos nessas faces que são mapeados para o mesmo ponto em  $\mathbb{R}^d$ , em função de  $N - (d+1)(r-1)$ .

Motivados por esse resultado, utilizamos o índice topológico  $\mathcal{A}$ -genus [5] para fornecer estimativas da dimensão de recobrimento de conjuntos de coincidência que aparecem em outras versões do tipo Tverberg.

Uma variação do teorema de Tverberg é a versão  $j$ -disjunta, formulada da seguinte maneira: “Para toda aplicação contínua  $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ , com  $N$  suficientemente grande em função de  $d, r$  e  $j$ , existem faces  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  de  $\Delta_N$  tais que quaisquer  $j$  delas não possuem vértice em comum e  $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$ .”

Obtivemos estimativas para a dimensão do conjunto de pontos nessas faces em função de  $(N+1)(j-1) - (d+1)(r-1) - 1$ .

Outra versão é o teorema colorido de Živaljević e Vrećica, que afirma: “Sejam  $d \geq 1$ ,  $r = p^n \geq 2$  uma potência de primo, e  $\lambda \geq d+1$ . Para toda aplicação contínua  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$  e toda coloração (partição)  $(C_1, \dots, C_{\lambda+1})$  do conjunto de vértices de  $\Delta$ , com  $|C_i| \geq 2r-1$  para todo  $i$ , existem  $r$  faces  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , duas a duas disjuntas, cada uma contendo no máximo um vértice de cada  $C_i$ , tais que  $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$ .”

Nossas conclusões indicam que a dimensão do conjunto de pontos dessas faces é pelo menos  $(\lambda - (d+1))r + d$ .

Estes são resultados parciais de uma pesquisa que foi realizada durante o pós-doutorado do autor na Universidade Federal de São Carlos, no período de 2024 a 2025.

<sup>1</sup>Universidade Federal de Lavras-Campus Paraíso,  
nelson.silva@ufla.br

## Referências

- [1] C. T. Yang, “On the theorems of borsuk-ulam, kakutani-yamabe-yujobo and dyson, i,” *Annals of Mathematics*, vol. 60, pp. 262–282, 1954.
- [2] D. G. Bourgin, “On some separation and mapping theorems,” *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 29, pp. 199–214, 1955.
- [3] Z. Błaszczyk, W. Marzantowicz, and M. Singh, “General bourgin–yang theorems,” *Topology and its Applications*, vol. 249, pp. 112–126, 2018.
- [4] A. Y. Volovikov, “On a topological generalization of tverberg’s theorem,” *Mathematical Notes*, vol. 59, no. 3, pp. 454–456, 1996.
- [5] T. Bartsch, *Topological Methods for Variational Problems with Symmetries*, vol. 1560 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

# Curvaturas axiais

Pedro Benedini Riul <sup>1</sup>

Dada uma  $n$ -variedade com singularidade de coposto 1 em  $\mathbb{R}^{n+k}$  em um ponto  $p \in M_{\text{sing}}^n$ , é possível definir até  $l(n-1)$  curvaturas axiais distintas neste ponto  $p$ , onde  $l = \min\{n, k+1\}$ . Tais curvaturas são obtidas utilizando o locus de curvatura (dado pela imagem via segunda forma fundamental dos vetores tangentes unitários) e são, portanto, invariantes de segunda ordem da variedade. De fato, no caso  $n = 2$  essas curvaturas generalizam todas as curvaturas de segunda ordem já definidas para superfícies frontais. Neste trabalho, as curvaturas axiais são relacionadas com as curvaturas principais em determinadas direções de uma  $(n-1)$ -variedade regular associada contida em  $M_{\text{sing}}^n$ . Também são obtidas interpretações geométricas nos casos  $n = 2, 3$ . Os resultados podem ser encontrados em [1].

## Referências

- [1] P. Benedini Riul, J. Deolindo-Silva, and R. Oset Sinha, “Axial curvatures for corank 1 singular  $n$ -manifolds in  $\mathbb{R}^{n+k}$ ,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, vol. 118, no. 1, p. 7, 2024.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de São João del Rei, benedini@ufsj.edu.br

# *Autoencoders* para a Classificação Não Supervisionada de Candidatos a Pulsar

Reginaldo José Silva <sup>1</sup>Angela Leite Moreno <sup>2</sup>Mara Lúcia Martins Lopes <sup>3</sup>

Em nosso universo, pulsares são estrelas de nêutrons que giram rapidamente e emitem um feixe de radiação eletromagnética detectável na Terra. Eles são de considerável interesse científico, pois servem como sondas do espaço-tempo e do meio interestelar. A identificação desses objetos celestes é um problema significativo na radioastronomia. Tradicionalmente, as emissões de rádio eram analisadas manualmente para confirmar a presença de pulsares, um processo que consome muito tempo [1]. A automação desse processo de classificação é fundamental para a análise de grandes volumes de dados de forma rápida e eficiente. Assim, o problema de classificar pulsares a partir de candidatos se tornou uma questão de aprendizado de máquina, onde se distingue um pulsar de uma candidata não-pulsar, que é a vasta maioria dos dados. Este problema é tratado como uma classificação binária, com um alto desbalanceamento de classes, podendo ser abordado como um desafio de detecção de anomalias.

O conjunto de dados apresenta uma distribuição de classes significativamente desequilibradas. A vasta proporção de candidatas não-pulsares, totalizando 16.259 exemplos, contrasta com o número reduzido de pulsares (1.639). Esta característica do conjunto de dados, o desbalanceamento de classes, é um fator importante para a escolha da técnica de classificação. O conjunto de dados HTRU2, fornecido por Robert Lyon, é composto por oito variáveis contínuas e uma variável de classe que indica a presença de um pulsar [2]. As variáveis são obtidas a partir de duas fontes: o perfil de pulso integrado e a curva DM-SNR. As quatro primeiras variáveis descrevem a média, o desvio padrão, a curtose e a assimetria do perfil de pulso. As quatro variáveis restantes medem as mesmas estatísticas para a curva DM-SNR, que reflete como a radiação do pulsar é espalhada por elétrons no espaço interestelar antes de atingir a Terra.

O método utilizado para resolver este problema é o *Autoencoder*, uma arquitetura de rede neural artificial adequada para detecção de anomalias [3]. A arquitetura consiste em duas partes: um *encoder*, que mapeia os dados de entrada  $x \in \mathbb{R}^D$  para uma representação latente de baixa dimensão  $z \in \mathbb{R}^d$  ( $d \ll D$ ), e um *decoder*, que reconstrói os dados de entrada a partir da representação latente. A função de codificação,  $f(x) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d$ , e a função de decodificação,  $g(z) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^D$ , são treinadas para minimizar o erro de reconstrução entre a entrada original  $x$  e a saída reconstruída  $\hat{x} = g(f(x))$ . A função de perda a ser minimizada é tipicamente o erro quadrático médio (MSE):  $\mathcal{L}(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \|x - \hat{x}\|^2$ . A estratégia para a detecção de anomalias consiste em treinar o *Autoencoder* somente com

<sup>1</sup>Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, reginaldo.silva@unesp.br

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, angela.moreno@unifal-mg.edu.br

<sup>3</sup>Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, mara.lopes@unesp.br

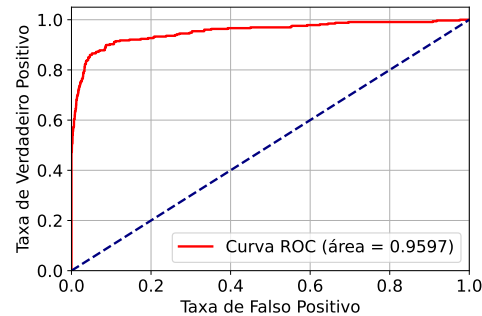
os dados da classe majoritária (os não-pulsares). Ao fazer isso, a rede aprende a reconhecer as características intrínsecas dos dados normais e se torna eficiente em reconstruí-los com um erro baixo. Quando um dado anômalo (um pulsar) é apresentado à rede, ele terá características diferentes das que a rede aprendeu. Consequentemente, o modelo terá dificuldade em reconstruir esse dado, resultando em um erro de reconstrução alto. O erro de reconstrução de cada dado é a pontuação que será usada para classificar o ponto como normal ou anômalo. Um limite é definido, e qualquer ponto com erro acima desse limite é classificado como um pulsar.

A abordagem de usar um *Autoencoder* para detecção de anomalias se mostra particularmente vantajosa para este tipo de conjunto de dados desbalanceado. A metodologia evita o problema de enviesamento comum em modelos de classificação tradicionais, que poderiam ter seu desempenho comprometido por aprenderem a classe majoritária.

O limiar de anomalia foi definido utilizando o Índice de Youden nos dados de treino, uma abordagem que maximiza simultaneamente a sensibilidade e a especificidade. O valor do limiar foi de 1,4022, o que significa que um dado é classificado como pulsar quando o seu erro de reconstrução (MSE) é superior a este valor. O modelo obteve acurácia de 94,92% e AUC-ROC de 0,9597, indicando sua capacidade de distinguir as classes. O *F1-Score* geral de 75,54% mostra o bom balanço entre a precisão e a sensibilidade na identificação dos pulsares. A sensibilidade de 85,67% e a especificidade de 95,85% mostram que o modelo consegue encontrar a maioria dos pulsares e classificar corretamente a maioria dos não-pulsares.

Verdadeiro	Normal	3117	135
	Anomalia	47	281
		Normal	Anomalia
		Predito	

(a) Matriz de Confusão.



(b) Curva ROC.

Figura 1: Resultados da avaliação do modelo *Autoencoder* como detector de anomalias.

## Referências

- [1] D. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of Pulsar Astronomy*. Cambridge Observing Handbooks for Research Astronomers, Cambridge University Press, 2005.
- [2] R. J. Lyon *et al.*, “Fifty years of pulsar candidate selection: from simple filters to a new principled real-time classification approach,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 459, no. 1, pp. 1104–1123, 2016.
- [3] G. E. Hinton and R. R. Salakhutdinov, “Reducing the Dimensionality of Data with Neural Networks,” *Science*, vol. 313, no. 5786, pp. 504–507, 2006.

# Otimização de Redes Neurais ART Minkowski Autoexpansíveis para a Classificação de Alzheimer

Reginaldo José Silva<sup>1</sup>

Beatriz Cogo Debs<sup>2</sup>

Edvaldo José Rodrigues Cardoso<sup>3</sup>

Angela Leite Moreno<sup>4</sup>

A doença de Alzheimer (DA) é a forma mais comum de demência, uma condição neurodegenerativa progressiva que afeta funções cognitivas e motoras [1]. O diagnóstico precoce é difícil devido à falta de testes específicos, o que torna a análise de dados de escrita manual uma alternativa promissora. A caligrafia, por refletir diretamente o estado cognitivo e motor, pode ser avaliada com técnicas de *Machine Learning* para criar sistemas de suporte ao diagnóstico mais objetivos. O objetivo deste trabalho é classificar pacientes com a doença de Alzheimer por meio da análise de dados de escrita manual, utilizando redes neurais baseadas na teoria da ressonância adaptativa [2].

A rede neural proposta, denominada Rede ART Minkowski Autoexpansível, emprega a métrica de Minkowski com diferentes valores de  $P$  (4, 16, 64 e 256) para explorar sua sensibilidade a diferentes distribuições de dados. O conjunto de dados utilizados foi o DARWIN (*Diagnosis Alzheimer With haNdwriting*), que utiliza características de dados de escrita à mão para classificar pacientes entre aqueles com diagnóstico de DA e aqueles sem a doença. O conjunto, elaborado a partir de 174 participantes (89 pacientes com DA e 85 indivíduos saudáveis), é formado por atributos derivados de 25 tarefas de escrita, categorizadas em gráficas, de cópia e de memória/ditado, com 18 atributos para cada tarefa, conforme descrito no protocolo de aquisição de Cilia et al. [3].

Para as simulações, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento (70%) e teste (30%), de forma estratificada. A otimização de hiperparâmetros foi realizada por meio de otimização bayesiana e validação cruzada de 5-*folds* no conjunto de treinamento. Após a otimização, os modelos foram avaliados no conjunto de teste usando métricas como: acurácia (ACC); sensibilidade (Se) e especificidade (Sp), precisão (Pre),  $F_1$ -score; e AUC-ROC (*Area Under the Curve - Receiver Operating Characteristic*).

Primeiramente cada conjunto de tarefas foi tratado individualmente: tarefas de memória/ditado (M), tarefas gráficas (G) e tarefas de cópia (C). Após a avaliação em cada um dos três conjuntos de tarefas, as saídas foram combinadas utilizando duas estratégias de *ensemble*: votação por maioria (VM) e média das probabilidades (MP). Os resultados foram analisados tanto para os modelos individuais quanto para as *ensemble*. Os resultados obtidos na primeira e segunda fase são apresentados nas Tabelas 1 e 2, respectivamente.

<sup>1</sup>Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, reginaldo.silva@unesp.br

<sup>2</sup>Instituto de Ciências da Natureza, Universidade Federal de Alfenas, bia\_debs@hotmail.com

<sup>3</sup>Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Alfenas, edvaldo.cardoso@unifal-mg.edu.br

<sup>4</sup>Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, angela.moreno@unifal-mg.edu.br

Tabela 1: Resultados por Tarefa e Métrica (Primeira fase).

		ARTMAE	ACC	Pre	Se	Sp	F <sub>1</sub>	MCC	AUC
Memória	Ditado	$P = 4$	<b>0,6226</b>	0,6875	<b>0,6875</b>	0,5238	<b>0,6875</b>	0,2113	<b>0,6287</b>
		$P = 16$	0,5472	0,7000	0,4375	<b>0,7143</b>	0,5385	0,1532	0,6138
		$P = 64$	0,5849	0,6786	0,5938	0,5714	0,6333	0,1618	0,6161
		$P = 256$	0,5849	<b>0,7273</b>	0,5000	<b>0,7143</b>	0,5926	<b>0,2127</b>	0,5893
Gráficas		$P = 4$	<b>0,6415</b>	<b>0,8095</b>	0,5312	<b>0,8095</b>	0,6415	<b>0,3408</b>	<b>0,7165</b>
		$P = 16$	0,6038	0,7619	0,5000	0,7619	0,6038	0,2619	0,6376
		$P = 64$	0,5660	0,6800	0,5312	0,6190	0,5965	0,1473	0,6704
		$P = 256$	<b>0,6415</b>	0,7600	<b>0,5938</b>	0,7143	<b>0,6667</b>	0,3018	0,6704
Cópia		$P = 4$	0,6226	<b>1,0000</b>	0,3750	<b>1,0000</b>	0,5455	<b>0,4383</b>	<b>0,7589</b>
		$P = 16$	<b>0,6792</b>	0,8571	<b>0,5625</b>	0,8571	<b>0,6792</b>	0,4196	0,7121
		$P = 64$	0,6604	0,8889	0,5000	0,9048	0,6400	0,4180	0,7299
		$P = 256$	0,6226	0,7727	0,5312	0,7619	0,6296	0,2910	0,6801

Tabela 2: Resultados Agrupados por Estratégia de Ensemble (Segunda fase).

		ARTMAE	ACC	Pre	Se	Sp	F <sub>1</sub>	MCC	AUC
MP	$P = 4$		0,7170	<b>0,8696</b>	0,6250	<b>0,8571</b>	0,7273	0,4758	<b>0,8006</b>
	$P = 16$		0,7170	0,7742	0,7500	0,6667	0,7619	0,4136	0,7455
	$P = 64$		<b>0,7547</b>	0,8065	<b>0,7812</b>	0,7143	<b>0,7937</b>	<b>0,4919</b>	0,7924
	$P = 256$		0,7170	0,7931	0,7188	0,7143	0,7541	0,4255	0,7708
VM	$P = 4$		0,6604	0,8182	0,5625	0,8095	0,6667	0,3693	-
	$P = 16$		0,6415	0,7407	<b>0,6250</b>	0,6667	0,6780	0,2854	-
	$P = 64$		0,6604	0,8182	0,5625	0,8095	0,6667	0,3693	-
	$P = 256$		<b>0,7170</b>	<b>0,8696</b>	<b>0,6250</b>	<b>0,8571</b>	<b>0,7273</b>	<b>0,4758</b>	-

A análise dos modelos individuais mostrou que o desempenho variou conforme o tipo de tarefa, com os melhores resultados sendo obtidos nas tarefas de Cópia e Gráficas. O modelo com Minkowski  $P = 16$  na tarefa de Cópia apresentou a maior acurácia individual. Em contrapartida, as tarefas de Memória e Ditado se mostraram mais desafiadoras, com métricas de desempenho mais baixas.

A aplicação de estratégias de *ensemble* resultou em uma melhoria na classificação. A MP superou a VP, alcançando maior acurácia e sensibilidade. O melhor resultado foi obtido com a combinação utilizando o Minkowski  $P = 64$  e a estratégia de MP, que alcançou 75,47% de acurácia e um F<sub>1</sub>-score de 0,7937. Com isso, a combinação das previsões dos modelos é uma abordagem superior à análise isolada.

## Referências

- [1] Z. Breijyeh and R. Karaman, “Comprehensive review on alzheimer’s disease: causes and treatment,” *Molecules*, vol. 25, no. 24, p. 5789, 2020.
- [2] G. A. Carpenter and S. Grossberg, “A massively parallel architecture for a self-organizing neural pattern recognition machine,” *Computer vision, graphics, and image processing*, vol. 37, no. 1, pp. 54–115, 1987.
- [3] N. D. Cilia, C. Stefano, F. Fontanella, and A. S. Di Freca, “An experimental protocol to support cognitive impairment diagnosis by using handwriting analysis,” *Procedia Computer Science*, vol. 141, pp. 466–471, 2018.

# Teoria de Representações Modulares para Além do Finito: O Segundo Teorema Principal de Brauer em Grupos Profinitos

Ricardo Joel Franquiz Flores <sup>1</sup>

A versão para teoria de módulos do Segundo Teorema Fundamental de Brauer é uma pilar fundamental da teoria de representação modular de grupos finitos que fornece uma descrição muito útil de como módulos se decompõem quando restritos a subgrupos locais.

Neste trabalho, generalizamos a versão para módulos do segundo teorema fundamental de Brauer para o contexto de grupos profinitos e módulos pseudocompactos.

A demonstração adapta as técnicas clássicas existentes para grupos finitos e módulos de dimensão finita para grupos profinitos e módulos pseudocompactos incorporando as particularidades topológicas inerentes a essas estruturas.

## Referências

- [1] D. J. Benson, *Representations and Cohomology*, vol. 1 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1991.
- [2] J. A. Green, “On the Brauer Homomorphism,” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. s2-17, pp. 58–66, 02 1978.
- [3] R. J. Franquiz Flores and J. W. MacQuarrie, “Block theory and Brauer’s first main theorem for profinite groups,” *Advances in Mathematics*, vol. 397, p. 108121, 2022.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Lavras,  
ricardo.franquiz@ufla.com.br

# Teorema da Decomposição Spectral-Smale para Sistemas Dinâmicos não Determinísticos

Túlio Vales Deslandes Ferreira <sup>1</sup>

Neste trabalho, apresentaremos um Teorema de Decomposição Espectral – tipo Smale para sistemas dinâmicos não determinísticos  $f : X \rightarrow 2^X$  cujo gráfico é aberto em  $X \times X$  e as imagens de cada ponto são conjuntos abertos e conexos. Mostraremos que, para tais sistemas, a entropia topológica é positiva. Finalmente, fornecemos uma condição sob a qual um mapa Anosov é transitivo usando uma abordagem de sistemas dinâmicos não determinísticos. É de conhecimento geral que tal problema é uma conjectura em aberto.

Os trabalhos [1, 2] são relativos a sistemas abertos e suas estruturas, já os trabalhos [3, 4] são relativos a sistemas fechados e algumas propriedades topológicas como expansividade e entropia. Nos trabalhos [5, 6] o principal objetivo é introduzir outra noção de sombreamento para esses sistemas.

Esse é um trabalho em conjunto com Cássio Henrique Vieira Moraes e Rafael da Costa Pereira.

## Referências

- [1] P. Duarte and M. Torres, “Combinatorial stability of non-deterministic systems,” *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 26, no. 1, pp. 93–128, 2006.
- [2] P. Duarte and M. Torres, “Stability of non-deterministic systems,” in *From Particle Systems to Partial Differential Equations II: Particle Systems and PDEs II, Braga, Portugal, December 2013*, pp. 193–207, Springer, 2015.
- [3] W. Cordeiro and M. Pacífico, “Continuum-wise expansiveness and specification for set-valued functions and topological entropy,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 144, no. 10, pp. 4261–4271, 2016.
- [4] R. Metzger, C. A. M. Rojas, and P. Thieullen, “Topological stability in set-valued dynamics,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, vol. 22, no. 5, pp. 1965–1975, 2017.
- [5] S. Y. Pilyugin and J. Rieger, “Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. contractive case,” *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, vol. 32, pp. 139–149, 2008.
- [6] S. Y. Pilyugin and J. Rieger, “Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. hyperbolic case,” *Journal of the Juliusz Schauder Center*, vol. 32, pp. 151–164, 2008.

---

<sup>1</sup>UFV-CAF ,  
tulio.ferreira@ufv.br

# Obtendo modelos matemáticos em leis de conservação hiperbólicas: O modelo bifásico.

Wanderson José Lambert <sup>1</sup>

Leis de conservação hiperbólicas regem inúmeros fenômenos físicos, particularmente aqueles dominados pela convecção em detrimento dos processos difusivos ou dispersivos. Tais equações são fundamentais em diversas áreas da ciência e engenharia, sendo uma das principais aplicações o estudo da recuperação de petróleo em meios porosos.

O petróleo, um fluido viscoso e denso, está normalmente confinado em reservatórios subterrâneos. Sua extração ocorre em três etapas principais: recuperação primária, secundária e terciária. Na recuperação primária, o petróleo é produzido graças ao gradiente natural de pressão entre o reservatório e o poço produtor. Na fase secundária, fluidos como água ou gás (ou combinação desses) são injetados para manter a pressão e continuar a extração. Já a recuperação terciária engloba técnicas avançadas, incluindo métodos térmicos, surfactantes e espumas, que visam otimizar ainda mais a produção após a fase secundária.

Este trabalho concentra-se especificamente na recuperação secundária, investigando o escoamento simultâneo de água e óleo em meios porosos saturados, denominado *modelo bifásico*. Tal modelo é essencial para estratégias eficazes de recuperação secundária por meio da injeção de água, permitindo prever a distribuição das fases fluídas ao longo do tempo. A formulação aqui adotada segue a abordagem clássica descrita por Aziz e Settari (1979).

A derivação do modelo bifásico fundamenta-se em três conceitos essenciais:

- A conservação da massa para cada fase fluída;
- A lei de Darcy para descrever o escoamento em meios porosos;
- Hipóteses físicas simplificadoras como imiscibilidade das fases, baixa compressibilidade dos fluidos, e negligência dos efeitos capilares e gravitacionais.

Para o caso do escoamento unidimensional, definem-se as saturações de água ( $S_w$ ) e óleo ( $S_o$ ), que atendem à relação de saturação total:

$$S_w + S_o = 1. \quad (1)$$

A equação de conservação de massa para uma fase genérica  $\alpha \in \{w, o\}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_\alpha q_\alpha) = 0, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Universidade Federal de Alfenas - MG, Campus Poços de Caldas  
wanderson.lambert@unifal-mg.edu.br

onde  $\phi$  representa a porosidade constante do meio,  $\rho_\alpha$  a densidade da fase  $\alpha$  e  $q_\alpha$  sua vazão volumétrica.

Sob a hipótese de incompressibilidade dos fluidos, a lei de Darcy simplifica-se para:

$$q_\alpha = -\frac{k k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

onde  $k$  é a permeabilidade absoluta do meio poroso,  $k_{r\alpha}$  é a permeabilidade relativa,  $\mu_\alpha$  a viscosidade da fase e  $p$  é a pressão comum às duas fases.

Introduz-se então o conceito de mobilidade efetiva ( $\lambda_\alpha$ ) e mobilidade total ( $\Lambda$ ), definidos como:

$$\lambda_\alpha(S_\alpha) = \frac{k k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha}, \quad \Lambda(S_w) = \lambda_w(S_w) + \lambda_o(1 - S_w). \quad (4)$$

Com isso, define-se a fração de fluxo da fase aquosa ( $f(S_w)$ ):

$$f(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\Lambda(S_w)}. \quad (5)$$

Ao substituir estas relações na equação original de conservação, obtém-se a equação de saturação simplificada:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f(S_w)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Esta equação escalar não linear, tipicamente hiperbólica, descreve a dinâmica do escoamento bifásico de forma eficaz. Devido à sua não linearidade intrínseca, naturalmente surgem fenômenos como ondas de choque e rarefações, comuns em escoamentos reais em reservatórios petrolíferos.

Tais tipos de modelos, com pequenas modificações, também aparecem no sequestro de carbono em meios porosos ou em armazenamento de hidrogênio nesses mesmos locais.

Iremos apresentar as soluções que aparecem nesse tipo de modelos, principalmente, do ponto de vista numérico mostrando o aparecimento de choques e rarefações o significado de tais tipos de ondas.

## Referências

Eschenazi, C.; Lambert, W.; Lopez-Flores, M.; Marchesin, D.; Palmeira, C. F.; Plhor, B., *Uma Introdução ao Estudo das Leis de Conservação Hiperbólicas e suas Aplicações na Variedade de Onda*, Editora IMPA, 2025.

# As Sequências de Codimensões Centrais e Centrais Próprias de Subvariedades Minimais

Willer Costa <sup>1</sup>

Juan Pacheco Cruz <sup>2</sup>

Thaís do Nascimento <sup>3</sup>

Ana Cristina Vieira <sup>4</sup>

Seja  $F$  um corpo de característica zero. Considere  $F\langle X \rangle$  a álgebra livre gerada por um conjunto enumerável  $X$  e  $A$  uma  $F$ -álgebra. Dizemos que  $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  é um polinômio central de  $A$ , se  $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$  para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$ , onde  $Z(A)$  é centro de  $A$ . No caso em que  $f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $f$  é uma identidade polinomial de  $A$ , já quando  $f$  assume um valor não nulo em  $Z(A)$ , dizemos que  $f$  é um polinômio central próprio.

Uma das principais ferramentas no estudo das identidades polinomiais de um álgebra  $A$  é a sequência das codimensões  $c_n(A)$  introduzida por Regev em [1]. Também Regev em [2] trouxe o conceito de codimensão central e codimensão central própria, denotadas por  $c_n^z(A)$  e  $\delta_n(A)$ , respectivamente.

Neste trabalho, serão apresentados resultados recentes obtidos em colaboração com Cruz, do Nascimento e Vieira, sobre  $c_n^z(A)$  e  $\delta_n(A)$ , onde  $A$  é uma álgebra que gera uma variedade minimal contida em  $\text{var}(UT_2)$ ,  $\text{var}(\mathcal{G})$ . Estas que são importantes no estudo da PI-teoria devido ao clássico resultado de Kemer em [3] que nos mostra que estas são as únicas variedades de crescimento quase polinomial, isto é, possuem crescimento exponencial, mas toda subvariedade própria de cada uma delas possui crescimento polinomial.

Também serão apresentados resultados similares relacionados às álgebras com uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação, também conhecidas como superálgebras.

## Referências

- [1] A. Regev, “Existence of identities in  $A \otimes B$ ,” *Israel J. Math.*, vol. 11, pp. 131–152, 1972.
- [2] A. Regev, “Growth for the central polynomials,” *Comm. Algebra*, vol. 44, no. 10, pp. 4411–4421, 2016.
- [3] A. R. Kemer, “Varieties of finite rank,” *Proc. 15th all the Union Algebraic Conf*, vol. 2, p. 73, 1979.

<sup>1</sup>Professor da Universidade Federal do Espírito Santo , willer.costa@ufes.br

<sup>2</sup>Pós-doutorando na Universidade Federal de Minas Gerais , juan.mat10@gmail.com

<sup>3</sup>Professora da Universidade Federal de Mato Grosso , thais.nascimento@ufmt.br

<sup>4</sup>Professora da Universidade Federal de Minas Gerais , anacris@ufmg.br